INSTITUTIONUM OPTICARUM

PARTES QUATUOR

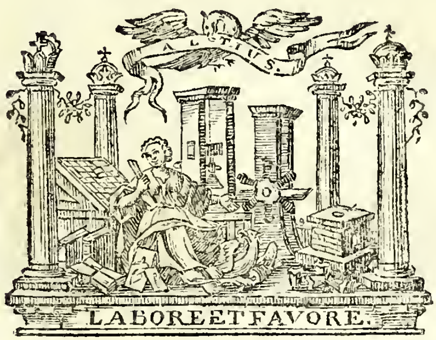
CONSCRIPTÆ

IN USUM TIRONUM

A

CAROLO SCHERFFER

PRESBYTERO, PHILOS. DOCT. ET MATHES. SUBLIM.
PROF. CÆS. REG.



VINDOBONÆ,

TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

MDCCLXXV.

LECTORI BENEVOLO.

Ut *Opticas Inſtitutiones* quatuor in partes dividerem, non modo ab aliis obſervatus mos, ſed ipſa argumentorum diverſitas popoſcit. In prima quippe parte de *Optica proprie ſumpta* agitur, qua leges *viſionis directæ* exponuntur. Et quoniam res hæc tum cum natura luminis, tum etiam cum uſu, & habitudine quadam, qua viſionis inſtrumentum, ſive oculum, ad res objectas cernendas adhibemus, intime connexa eſt, mirum videri haud debet, quod plura e Phyſica depromenda fuerunt, quorum ſi ratio non habeatur, fieri ſane poteſt, ut vel prima ab opticis adhibita adhuc principia, dubitationi habeantur obnoxia (*). At enim hæc ſi debita cum attentione expendantur, adeo nihil relinquunt incerti, ut ea, quæ opponi videbantur, ſtabiliendis potius principiis paſſim receptis ſerviant.

In altera parte, ſive *Dioptrica*, de *viſione* tractamus, quæ *radiis refractis* peragitur. Spectat hæc potiſſimum utiliſſima ea inſtrumenta, quæ ſeu viſum noſtrum ad immenſa ſpatia extendunt, ſeu minutiſſima corpuſcula, quæ ceterum aciem oculi præ exilitate effugerent, nobis conſpicienda præbent. Neque etiam theoriam emendationis teleſcopiorum dioptricorum ſilentio præterivimus. De pretio autem hujus Optices partis non eſt, quod dicamus, cum nemo prope ſit, in quem non aliquid commodi redundet.

Suppar huic eſt tertia pars *Catoptrica*, *viſionem* potiſſimum, quæ *radiis reflexis* fit, complexa. Speculorum genus, quod præ

(*) M. d'Alembert. Opuſc. min.

aliis expendimus, ſphæricorum eſt, quanquam plana, aliaque, quæ oblectationi potius, quam utilitati deſtinantur, haud omittimus.

Denique *Perſpectivam* quarta parte dedimus, qua ſecundum Optices leges, ea, quæ viſui objiciuntur, in tabula delineare docemus. Secuti autem ſumus hac in parte *Cl. de la Caille* & ordinem, & methodum, quod ab eo rigorem geometricum, accuratamque demonſtrandi ſingula rationem ſervatam viderimus, quamvis alia non nihil magis evolvere, contrahere alia viſum ſit, uti res ferebat.

In prioribus tribus partibus offerent ſeſe complura, quæ haud alium finem habere videntur, quam Geometriæ exercitium. Et vero ſi, quod res eſt, fateamur, eſt id nobis ita cordi, ut perraro occaſionem elabi nobis ſinamus, quæ tironibus materiam utiliſſimæ hujus exercitationis præbere poſſit. Fallitur vehementer, qui in mathematicis diſciplinis, etiam ad phyſicos uſus translatis, illum majores progreſſus facere exiſtimat, cui promptior ad uſum manus ſit, quam ſolida theoria. Hanc qui alte animo impreſſerit, cum ad praxin ventum fuerit, nuſpiam caſus implicatior morabitur, nunquam ſubſidia, quæ Geometria ſuis cultoribus abunde ſuppeditat, deſtituent. Quod ſi tandem quædam occurant, quæ *Lector benevolus* majore in lumine collocari debuiſſe exiſtimet, cogitandum erit, nos, ut præcedentia quatuor volumina, ita etiam quintum hoc noſtris prælectionibus deſtinaſſe, ideoque ſi quid obſcurius dictum fuerit, id explicatione illuſtratum iri.

INSTI-

INSTITUTIONUM
OPTICARUM
PARS PRIMA
DE
VISIONE DIRECTA.

Optandum equidem esset, ut in *Optices* institutionibus eodem modo, ac in Geometria, liceret abstractis ab objectis physicis notionibus uti; verum cum ea sit rerum, de quibus nobis agendum est, conditio, ut ipsa phænomenorum expositio primas fere sibi partes vendicet, fieri nequit, ut quicquam, quod a tirone rite intelligatur, adferatur in medium, nisi is præcipuas Luminis affectiones antea perspectas habuerit. Quando itaque physica magis, quam mathematica prima hæc Institutionum pars futura est, libuit *Newtoni* systema, uti a R. P. *Boscovich* paullo ampliatum est, velut datum sumere. Neque propterea animus est illis Philosophis litem movere, qui, *Novam Lucis & Colorum Theoriam* Cl. *Euleri* forte sequuntur, quam is inter alia opuscula A. 1746 Berolini impressam proposuit, quamvis hac nostra ætate paucos esse arbitror, qui a Newtono recesserint. Et vero sunt plurima, quæ in utravis sententia commodum habent explicatum; nobis tamen visum est universe, posse omnia continua serie nonnihil concinnius, si nostram sequamur opinionem, exponi.

CAPUT I.

De præcipuis Affectionibus Luminis.

ARTICULUS I.

De Corporibus Lucentibus, Natura Luminis, & ejusdem propagatione.

I.

Dum in Phyſica de viribus attractivis, & repulſivis agitur, ut plurimis naturæ phænomenis ſatisfiat, oſtenditur, neceſſe eſſe, ut non modo imminuta ultra certum limitem diſtantia attractio tranſeat in repulſionem, conſentiente etiam in mutationem virium mutata diſtantia Newtono; ſed etiam ut ejusmodi limites mutationis virium complures ſint, ſi quidem ſub legem aliquam ſtabilem naturæ operationes cadunt, uti eas cadere indubium eſt. Et quoniam nihil *a priore*, ut ajunt, ſeu ſynthetica methodo utendo, in naturæ ſtudio progreſſus ſperandum eſt, diligente phænomenorum conſideratione in ſubſidium adhibita, facile inducemus in animum, ut generales quasdam affectiones ejusmodi mutationum, aliis in corporibus alias, locum habere exiſtimemus. Sunt enim corpora non nulla, in quibus, etſi in oppoſitas vires tranſitus fiat,

fiat, nullam tamen admodum motus vehementiam advertimus, dum in aliis non nisi violentissimæ fiunt mutationes, ebullitiones, displosiones. Nempe cum particula limitem quempiam alterius impulsu transilit, vis attrahens non gradatim, sed momento in ingentem repulsionem abiisse videtur, qua effectum suum sortita, omnis dein attractio ulterior vincatur, cujus cum vel mediocris est, exemplum manifestum habemus in vaporibus aqueis, qui, ubi semel extra aquæ particulas, dissoluto tenui illo nexu, quem inter se se habebant, constituti fuerint, immanem quamvis resistentiam sua vi expansiva superant. Clariorem hujus rei ideam in displosione pulveris pyrii, in aliis momentaneis fermentationibus habemus. Sed dum fermentationem nominamus, repetendum est animo, eam, uti intestinis motibus peragitur, ita viribus intestinis, non impulsione quadam vehemente extrinseca gigni. Ubi vires partium corporis æquilibratæ sunt, ubi suis particulæ consistunt limitibus, ad quos præsertim actione mutua determinantur, re alia opus non est, quam ut in paucis fiat situs mutatio, quæ amisso cum vicinis æquilibrio, accessu ad has, aut recessu ab illis, jam diversis in utrasque viribus agent. Tum vero plures jam erunt, quæ itidem aliarum positum mutent, deturbent e prioribus limitibus, nexum corporis solvant, atque totam massam ad intestinum motum concitent.

2. Jam vero ut diversi sunt particularum, ex quibus corpora sub sensus cadentia coalescunt, ordines, ita diversi quoque erunt limites, intra quos altiorum ordinum particulæ e loco priore deturbatæ oscillando ultro, citroque excurrunt, quin in quibusdam corporibus dissolutio in ordinis inferioris moleculas consequatur illico, sed opus erit, ut ex ingressu aliarum, & commistione simpliciorum particularum ordo magis compositarum perturbetur, quod cum pro diversa virum mutuarum combinatione difficilius, faciliusve contingere possit, quædam particulæ diutissime perdurabunt in cæpta agitatione, quædam dissoluto nexu minores suppeditabunt, in quibus pro plexus, & cohæsionis diversitate jam motus evadet major; & si rursus in moleculas ordinis simplicioris resolvantur, incomprehensibilis pene tenuitatis nascentur particulæ, quamvis adhuc longe absint a simplicibus, in quibus tam subita in vires oppositas fieri potest transitio, ut summa vehementia excussæ superent omnem attractionem, quæ in majoribus nonnihil intervallis esse potest: atque hæ recte dicentur *effluvia*. Quod si jam cogitemus infinitam plexus in corporibus varietatem, atque infinitam pene diversitatem virium, quæ cujusvis moleculæ textum conservabant prius in æquilibrio, facile concipiemus animo, hujusmodi dissolutiones in particulas inferiorum ordinum vehementissimas, ac frequentissimas, & simul in tam subtiles, ut cum infinitæ propemodum e massa totali ejectæ fuerint, nihil ea admodum amisisse videatur.

Erit

Erit vero adhuc ingens varietas in ipsis massis hujus generis: quædam non tantum evibrabunt moleculas ordinis simplicibus viciniores, sed etiam magis compositas, atque majores, quod in hisce ea sit virium combinatio, ut oscillando facile veniant ad ejusmodi limitem, in quo acquirunt ingentem repulsionem: aliæ omnis generis & ordinis ejicient particulas; aliæ non nisi subtilissimas, ad sensum scilicet, & aliarum comparatione, quæ sunt ordinis altioris.

3. Atque his rite perpensis, *corpora Lucentia* nobis ea sunt, quæ perturbato æquilibrio virium internarum motibus intestinis vehementissimis ita agitantur, ut dissolutis altiorum ordinum multis particulis, ingens numerus particularum ordinum inferiorum, sed in se adhuc compositarum, transiliat ad ejusmodi limites, in quibus ingentem acquirant repulsionem, quæ omnem ulteriorem attractionem vincat. Nam ejusmodi corpora, etsi longissime a nobis absint, nobis reddentur perceptibilia per particulas ejectas, eritque in illis omnis diversitas, quam observamus, ut quod alia sint aliis clariora, alia citius, tardius alia dissipentur, quod alia luceant sine admisto fumo, & fuligine, aliorum splendor fumo, & carbone volatili obscuretur. Dein si ejusmodi corpora nobis sint vicina, etiam calefacient, ut pleraque lucentia, alia tamen, quæ non nisi paucas respective, & subtiliores emittunt particulas, luceant sine sensibili nobis calore.

4. Posita hac corporum lucentium constitutione, *propagatio Luminis* facile explicatur. Nam in propagatione attendenda sunt *primo* ingens celeritas, eaque in ejusdem ordinis particulis proxime æqualis. *Secundo* motus rectilineus pariter ad sensum, donec detorqueatur a via vel refractione, vel reflexione, vel diffractione. *Tertio* diffusio ad omne punctum physicum, & sensibile per sphæram undique corpus lucens ambientem. *Quarto* decrementum lucis in medio libero, aut etiam diaphano in ratione functionis cujuspiam distantiarum a corpore lucido, quantum sensu item percipi potest, atque etiam pelluciditatis medii. Expendamus jam singula.

5. Celeritatem lucis summam esse, phænomena exigunt, utpote cum intra $8' \, 13''$ fere inde a sole ad nos usque perveniat (quemadmodum videbimus), necesse est, ut intra $1''$ (si rotundo utamur numero), plus quam 981030000 pedum spatium conficiat; & cum sonus tempore $1''$ per 1142 pedes fere propagetur, lux sono saltem 859045^es^ velocior est. Tanta celeritas etsi admiratione digna sit, nil tamen habet, quod fidem superet, & quod exemplis a simili petitis non reddatur admodum probabile. Sic videmus incredibili pene celeritate fieri quasdam explosiones corporum particulis, quæ a corporibus lucentibus ejiciuntur, & in quibus lumen constituimus, sine comparatione crassiorum. Sic ipsa celeritas globorum totalium, qua orbitas suas percurrunt, habet rationem sensibilem ad celeritatem lucis, uti videbimus, quando de aberratione agemus. Præterea plerique Philosophi

admittunt in particulis primorum ordinum tam magnam vim cohæsivam, & attractivam, ut arbitrentur, eas nullis naturæ viribus dissolvi posse: cur non ex eadem lege virium dentur etiam quædam intervalla, in quibus attractio mutetur in tantam repulsionem, ut ea omni deinceps attractioni vincendæ par sit? Quod si jam cogitemus, particulas ejusmodi esse tenuissimas, nullamque ipsis superandam resistentiam, præter attractionem, quæ superatis limitibus proximis, in majoribus spatiis in ratione duplicata distantiarum proxime decrescat, nulla apparet causa, cur semel excussæ non in infinitum recedant motu, quantum ad sensum, æquabili, cum attractio nullam prorsus sensibilem rationem amplius habere possit.

6. Erit præterea celeritas in particulis proxime æqualibus itidem proxime æqualis. Nam præterquam quod in corporibus lucentibus adsint quoque causæ proxime æquales, etsi nonnullis particulis, postquam ad limites ingentis illius repulsionis pervenerunt, percurrenda sint intervalla, per quæ agat attractio, quæ conceptam vim minuat in ratione areæ, cujus basis sint illa intervalla, & ordinatæ vires attractivæ illic agentes (quemadmodum id facile ex iis palam fit, quæ Mech. Part. I. a N. 33. de scala celeritatum diximus); aliis vero particulis occurrant nova intervalla, in quibus agant novæ vires repulsivæ, consequenter quæ vim recedendi augeant in ratione similis areæ; nihilominus hoc discrimen celeritatem sensibiliter mutare non potest, quæ semper est in ratione subduplicata differentiæ, vel summæ illarum arearum, nempe ejus, quæ supponit ingentes illas vires repulsivas, & subsequentis attractivæ vel repulsivæ. Cum enim hæ areæ respectu primæ exiguæ sint, etsi summa, vel differentia arearum, quæ sunt in ratione duplicata celeritatum inde genitarum, sensibiliter differant, radix tamen summæ, vel differentiæ incomparabiliter minus differre debet. Sic si numero 10000 addas 4, quamvis 4 sit quantitas non contemnenda, & summa 10004 notabiliter differat a 10000, attamen radices $\sqrt{10000}$, seu 100, & $\sqrt{10004}$, sive 100,019 longe minus differunt, nempe paullo plus, quam 19 partibus millesimis unitatis; itaque etiam cum quadrata celeritatum sint ut summæ vel differentiæ arearum, licet hæ sensibiliter differant, ipsæ tamen radices, id est, celeritates propterea discrimen sensibile non habebunt. At vero omnem omnino inæqualitatem non excludimus; immo ex ea alia lucis phænomena deducemus.

7. Secundum, quod in Luminis propagatione attendendum esse diximus, est motus ad sensum rectilineus, donec ex aliis causis occurrentibus viæ mutatio oriatur. Hoc ut fiat, aliud nihil requiritur, quam ut spatium sit satis liberum, nec occurrant corpora lucis motum turbantia. Jam vero particulæ luminis, si debita sint subtilitate, alias, dum prætervehuntur in majore vicinia, non nisi modicissime a via

detor-

detorquere possunt, quæ tamen deflexio actione contraria alterius ex altera parte prætergredientis; mox corrigetur, ita, ut quamvis perpetuis anfractibus via curvetur, id tamen in tanta flexionum exilitate nullis sensibus percipi possit. Quod si autem medium novum in se homogeneum occurrat, refractio fiet lege alias a nobis exponenda, manebitque rursus post refractionem via ad sensum rectilinea, utpote viribus particularum medii homogenei ex omni parte æqualibus æqualiter in lucem agentibus. At si novum medium continua quadam lege densitatem, & proinde vires refringentes mutet, via quoque particularum luminis curvabitur, quemadmodum ex simili actione vis centralis in corpora projecta certam quandam legem distantiarum rationis sequentis, motus de se se rectilineus, & uniformis in curvilineum mutatur. Demum si corpus densius, & opacum interjiciatur, radius vel reflectetur, vel extinguetur.

8. Ut porro diffusionem Lucis per sphæram indefinitæ magnitudinis, cujus centrum occupet corpus lucidum, rite comprehendamus, repetenda sunt animo, quæ in Physica de divisibilitate corporum traduntur, v. g. de corporibus odoris, quæ per ingens aliquod spatium longo tempore effluvia sua emittunt quaquaversus, quin ponderis notabile fiat decrementum. Quare, modo corporis particulas multo cogitemus minores odoratis effluviis, quæ per vitra, & densiora corpora transitum nondum reperiunt, sed intra ea coerceri possunt; modo obstacula, inæqualitatem sensibilem medii, per quod transeunt, removeamus, nihil erit, ex quo propagatio ab exposita diversa oriatur.

9. Denique in hac propagatione observandum diximus decrementum intensitatis lucis in ratione functionis cujusdam distantiarum a corpore lucido, ac pelluciditatis medii. Radiorum e corpore lucida emanantium triplex esse potest directio, ut vel semper maneant inter se se paralleli, vel ut e puncto lucido divergant, vel ut ad punctum quodpiam convergant, quemadmodum id contingeret, si ope lentis vitreæ, vel speculi in focum quempiam colligerentur. Singuli casus tantisper discutiendi sunt. Fingamus itaque primo, medium esse perfecte liberum, ita ut nullus omnino radius intercipiatur, vel extinguatur, esseque directionem singulorum parallelam. Evidens est, si motus sit æquabilis, in quacunque distantia fore eandem lucis intensitatem, cum totidem numero radii per æquale semper spatium diffundantur; at vero si motus accelararetur, cresceretque velocitas in majoribus a corpore lucente distantiis, equidem lumen in spatiis remotioribus raresceret, verum fieri posset, ut effectus illius, siue impressio seu in oculum, seu in alia corpora, quæ illuminantur, vel maneat idem, vel crescat, vel decrescat, prout diversa accelerationis lex assumeretur. Nam si (fig. 1. Tab. I.) in radiis parallelis AL, *al* exhibeantur intervalla æqualibus tempusculis a particula lucis percursa per AB, BC, CD &c, *ab*, *bc*, *cd*, &c, ad oculum in Ff consti- Fig. 1. Tab. I.

 tutum

tutum intra idem tempus totidem appellent particulæ, quot ad oculum in Ll positum. At vero si exposita intervalla non percurrantur æqualibus tempusculis, non idem particularum lucis numerus ad oculum venire potest, quamquam haud negandum videatur, posse vim impressionis pauciorum particularum eodem tempore in objectum incurrentium compensari per celeritatis incrementum, motus quantitate aucta. Si ex opposito lumen ex Ll versus Aa propagaretur, atque motus retardaretur, facile apparet, densitatem lucis in majoribus distantiis augeri quidem, non tamen necesse esse, ut impressio eadem densitatis lege augeatur. Sed enim nullum prorsus fundamentum est ejusmodi accelerationis, vel retardationis; immo vero si cetera omnia pro motus æquabilitate argumenta deessent, una satis foret lex aberrationis lucis, quæ per observationes stellarum fixarum potissimum innotuit, de qua ea postea adferemus, quæ in rem nostram faciunt. Interea notasse satis sit, in calculo aberrationis semper assumi lucis motum æquabilem, atque calculum, quantum optare possumus, cum observationibus congruere. Quis vero sanæ mentis sibi persuadeat, ita erroneam hypothesin per alios errores corrigi, ut in tanta siderum, distantiarumque varietate nullum unquam discrimen deprehendi possit? Atque hinc motus æquabilitatem deinceps semper tanquam extra omne dubium positam, quamdiu lux in eodem medio versatur, sumemus

10. Divergant modo radii velut e centro sphæræ C quaquaversus producti. Constituatur in distantia CA (fig. 2. Tab. I.) tabula v. g. quadrata, cujus latus DE; incident in hanc omnes radii (in hypothesi medii perfecte liberi), qui in pyramide HCI continentur. Iidem etiam incident in tabulam FG intervallo CB remotam. Ex quo evidens est, fore densitatem, ac intensitatem luminis in DE tanto majorem, quanto minus est spatium, per quod diffunditur, & ex oppsito in FG tanto minorem, quanto spatium, per quod æquabiliter distribuitur, majus est. Hinc erit densitas lucis in FG ad densitatem in DE, ut est DE^2 ad FG^2; est autem $DE : FG = CA : CB$; quare si densitas lucis in DE sit $= D$, in FG vero $= d$; erit $d : D = CA^2 : CB^2$, hoc est, *lucis intensitas* posito motu æquabili & medio perfecte diaphano, *si radii divergant, est in ratione reciproca duplicata distantiarum.*

Fig. 2. Tab. I.

Ex hoc simul intelligitur, radiis HC, IC ad punctum quodpiam C convergentibus, fore densitatem lucis in ratione reciproca duplicata distantiæ a puncto convergentiæ C.

Fig. 3. Tab. I.

Consequitur ex his, quod si radii (fig. 3. Tab. I.) e puncto C divergant in sphæra AHB, & concipiantur quotcunque sphæræ cavæ AHB, KFL &c indefinite tenues, in omnibus futura sit eadem luminis quantitas. Nam per paullo ante dicta in quamvis partem DEGF eadem copia luminis eodem tempore illabitur, quæ in HI incurrit. Hinc data quavis parte superficiei HI, distantia CH, & quantitate luminis in HI, datur quoque quantitas ejusdem in toto ambitu AHB.

Sit

Sit ratio radii CH$=r$, ad peripheriam AHB $r:c$, quantitas luminis erit ut denſitas a ducta in volumen $2cr$, ſeu ſuperficiem ſphæricam. Vocetur quantitas hæc $=$ D. Ut habeatur quantitas luminis in tota ſphæra, oportet, ut ducatur in radium (cum tot ſint ſuperficies cavæ, quot puncta in radio), eritque $= Dr$. In alia ſphæra KFL, cujus radius CF$=x$, erit proinde ut Dx, id eſt, *quantitates luminis erunt ut radii ſphærarum.*

Sed ſi ſphæra AHB foret repleta fluido æquabilis ubivis denſitatis a, maſſa foret $\frac{2car^2}{3}$, ideoque ad ſphæram, in qua denſitas decreſcit in dicta ratione, ut $\frac{2car^2}{3}$ ad $2car^2$, ſive ut 1 ad 3.

Quoniam corpus lucidum in C poſitum, nequit eſſe punctum proprie ſumptum, nuſpiam denſitatis ratio fieri poteſt infinita. Eodem modo cum lumen, uti videbimus, ſucceſſive propagetur, radius ſphæræ, ad quam lumen v. g. e ſole diffunditur, nunquam niſi elapſo tempore infinito, fieri poteſt infinitus; unde etiam quantitas luminis emiſſi nunquam infinita fit. Interim licet tandem aliquando tota ſolis maſſa exhauriri deberet, niſi forte aliunde defectus perpetuo emanantium efluviorum ſarciretur, plurimis tamen ſæculorum millibus maſſæ ſolaris decrementum inſenſibile eſſe debet, ſi attendamus lucis ſubtilitatem, ac raritatem, quibus fit, ut ne quidem tenuiſſima filamenta impactu particularum lucis tam immani velocitate latarum moveantur ullo modo.

11. Ponamus modo radios parallelos propagari per medium diaphanum, ſed non perfecte liberum, æquabile tamen, ita, ut in æqualibus ejus voluminibus æqualis ſit ſemper numerus particularum lucem extinguentium, aut quomodocunque propagationem impedientium. Concipiatur ejuſmodi corpus (fig. 4. Tab. I.) ACDB diviſum in lamellas parallelas indefinite tenues A*a* *b*B, *acfb*, *cdef* &c., & ſit quantitas lucis per ſuperficiem AB ingredientis quæcunque $=1$, ſitque pars, quæ extinguitur in prima lamella $\frac{1}{x}$, egredietur per A*b*, (adeoque ingredietur ſecundam lamellam) pars $1-\frac{1}{x}$; extinguetur in hac denuo pars, quæ ſit ad lumen totum, quod advenit, uti $\frac{1}{x}$ ad 1, hoc eſt, extinguetur pars $\frac{1}{x}-\frac{1}{xx}$, proinde ad tertiam lamellam perveniet quantitas $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{xx}$; hujus particulæ adiaphanæ partem pro- Fig. 4. Tab. I.

 por-

portionalem $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ extinguent, ut ad quartam non nisi pars $1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ pervenire possit. Progressionis lex ex paucis hisce terminis evidens fit; advenit enim lux ad primam lamellam 1, ad secundam $1 - \frac{1}{x}$, ad tertiam $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$, ad quartam $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$ &c. Quod si modo in figura 4 exhibeat AB unitatem, AE vero $\frac{1}{x}$, erit IR $= \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, & I$b$ $1 - \frac{1}{x}$, K$f = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$, G$e = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$. Cum igitur semper sit AE: AB = IR : Ib = KS: Kf &c, evidens est, cum etiam sint partes Bb, bf, fe &c æquales, fore AIKGM logarithmicam.

Fig. 5. Tab. I. 12. Si ponantur radii divergere, vel convergere ad datum punctum C (fig. 5. Tab. I.) dum per corpus diaphanum AEDB transmittuntur, variatur quidem densitas luminis in diversis lamellis AabB, *dhie* ex duplice capite, nempe inprimis ratione convergentiæ, vel divergentiæ (de qua superius), dein ratione partis in singulis lamellis interceptæ. Verum posterior hæc variatio constans est, atque eadem, quæ in radiis parallelis; etsi enim in spatio AabB plures occurrant particulæ lucem intercipientes, quam in parte *mnop*, quia tamen lux ipsa in lamella *dhie* densior est, quam in priore AabB, singulæ eæ particulæ adiaphanæ plures particulas lucis extinguunt, quam singulæ æquales in lamina, per quam lux rarior transmittitur. Unde si tantummodo de quantitate lucis transmissæ, & extinctæ agatur, nihil discriminis est, seu radii parallele propagentur, seu convergant, aut divergant.

Fig. 4. Tab. I. 13. Ut porro (fig. 4. Tab. I) subtangens Logarithmicæ AKM determinetur, opus est, ut experimentis constet ratio quantitatis luminis per AB ingredientis, & per CD egredientis, posito corpore diaphano homogeneo, quæ erit eadem cum ratione duarum ordinatarum AB, MD, quarum abscissæ, sive logarithmi habent differentiam BD, sive crassitudinem corporis diaphani $= c$. Nam constat (N. 41. Lib. I. Part. II. Anal.) Logarithmum rationis duarum ordinatarum (aut numerorum) recte exhiberi per differentiam logarithmorum divisam per subtangentem; & præterea logarithmos in diversis systematis eorundem numerorum esse inter se in ratione subtangentium. Quare si ratio ordinatorum AB: MD sit $m : n$, quærantur in tabulis vulgaribus logarithmi numerorum m & n, & fiat $Lm - Ln : 0{,}4342948 = c : x$, erit quartus terminus subtangens quæsita, cum scilicet sit 0,4342948 subtangens Logarithmicæ vulgaris.

Habi-

Habita ſubtangente Logarithmicæ, invenietur ratio luminis ingredientis, & egredientis pro quavis alia craſſitudine corporis, quippe cum opus tantum ſit, ſuperiorem analogiam invertere, ut ſit ſubtangens inventa ad ſubtangentem Logiſticæ tabularis, ita quævis craſſitudo f ad differentiam duorum logarithmorum tabularium, quorum numeri exponunt rationem quæſitam $p:q$. Subtrahatur ea differentia ex Logarithmo tabulari 10000, ſeu e 4,0000000, erit differentia logarithmus numeri radiorum egredientium, ſi numerus ingredientium ſtatuatur 10000. Etenim eſt ſemper quotus ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, adeoque in noſtra hypotheſi $Lp - Lq$. Log. 1 (= 0) = L. 10000. L. quoti.

14. Ponamus corpora ABDC (fig. 4. & 6. Tab. I.) ejusdem quidem eſſe materiæ, veruntamen varietatem eſſe in denſitate, ita, ut in laminis, ſive ſtratis $Aa\,bB$ fig. 4, & $A\alpha\,\beta B$ fig. 6 ſit eadem quantitas materiæ, licet craſſitudines Bb, $B\beta$ diverſæ ſint. Eodem modo ſit eadem materiæ quantitas in laminis ſequentibus $acfb$ fig. 4, & $\alpha\kappa\varphi\beta$ fig. 6. &c. Facile perſpicitur, ob æqualem materiæ diaphanæ copiam in laminis correſpondentibus, extingui debere in $A\alpha\,\beta B$ tantundem luminis, quantum in $Aa\,bB$ intercipitur. Idem eſt de omnibus reliquis: ideoque ſi in B, β, φ, ε &c erigantur ordinatæ BA, βM, φN, εO &c æquales cum AB, bI, fK, e G &c fig. 4, curva AMNOPQ haud quidem logarithmica erit, utpote cum intervalla $B\beta$, $\beta\varphi$, $\varphi\varepsilon$ &c æqualia non ſint, attamen ad eam aliquam analogiam habet. Fig. 4. & 6. Tab. I.

Deſcribatur ſuper eodem axe BD (fig. 6.) alia curva $abcg$, cujus ordinatæ Ba, βb, φc &c exponant denſitates medii, & ſit $N\varphi c$ infinite propinqua ad $M\beta b$. Evidens eſt, in lamina $\alpha\kappa\varphi\beta$ eo plus luminis intercipi, quo ejus major copia incidit, ſeu quo major eſt $M\beta$; quo major eſt denſitas materiæ in lamina, ſeu quo major eſt βb; & tandem quo laminæ ejusdem craſſitudo $\beta\varphi$ major eſt. Quia itaque MV exponit partem luminis in transmiſſu per laminam interceptam, erit $MV = M\beta \times \beta b \times \beta\varphi$, quæ quantitas propter Legem homogeneitatis intelligatur diviſa per quantitatem aliquam conſtantem a^2. Dicatur $M\beta = y$, $B\beta = x$, $\beta b = v$, erit $MV = dy$, $\beta\varphi = dx$, & $dy = \frac{yvdx}{a^2}$ proinde $\frac{a^2dy}{y} = vdx$, ac $a^2Ly = \int vdx$. Quare manifeſtum eſt, data curva denſitatum acg, reperiri etiam ſpeciem curvæ AMQ. Quia vero (ſi ducatur tangens MNT) eſt $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2}{v} = \beta T$, liquet, eſſe ſubtangentes in ratione reciproca denſitatum v, ob a^2 conſtantem.

15. Data curva denſitatum, & calculatis ſpatiis $B\beta ba$, $B\varphi ca$ &c, iisque ſumptis in progreſſione Arithmetica, pro curva AMQ ſumi poterit Logarithmica eadem cum AKM figuræ 4^{tæ}. Atque hoc artificio

cio *D. Bouguer* reduxit ſpatia aeris atmoſphærici in majoribus altitudinibus ſemper rarioris, ad ſpatia aeris homogenei, & ejusdem ubivis denſitatis cum aere noſtro prope Telluris ſuperficiem, in quo deprehendit per experimenta, lumen per ſpatium 7469 hexapedarum decreſcere in ratione 2500 ad 1681, & calculavit tabulam, quæ exprimit rationem intenſitatis luminis in diverſis altitudinibus, a zenith uſque ad horizontem, e ſideribus ad nos transmiſſi.

Sed enim pro curva denſitatum *abg* aſſumit logarithmicam, cujus ſubtangens ſit 4197 hexapedarum, quam hunc in modum definit. Fig. 7. Tab. I. Sit MAN (fig. 7. Tab. I.) ſuperficies telluris, FDB Logiſtica, ad quam æquatio $\frac{ady}{y} = dx$, exprimente a ſubtangentem. Erit $ady = ydx$, & $ay = \int ydx =$ areæ CDFE, ſi fuerit CD $= y$, aut areæ ABFE, ſi ponatur $y =$ AB; conſequenter omiſſa ſubtangente conſtante eſt area ABFE ad aream CDFE, ut AB ad CD. Si jam ordinatæ exponant denſitates aeris in diverſis altitudinibus, areæ exponunt pondera aeris incumbentis: porro altitudines in barometro ſunt itidem proportionales ponderibus incumbentibus, conſequenter etiam ſunt ut ordinatæ, cum ſint ut areæ. Quod ſi itaque obſervetur altitudo barometri in A & C, erit prima ad ſecundam, ut AB ad CD, & hinc fiet, ut logarithmorum differentia, qui reſpondent altitudinibus barometri in A, & C, ad ſubtangentem logarithmicæ tabularis 0,4342948, ita altitudo AC ad ſubtangentem Logarithmicæ FDB, exponentis denſitates aeris in diverſis altitudinibus a ſuperficie Telluris.

Poſita hac Logarithmica poterat utique maſſa aeris in quavis altitudine contenti reduci ad æqualem maſſam ejusdem denſitatis cum noſtro iſthic prope ſuperficiem Telluris, & decrementa luminis per eam transmiſſi methodo ſuperius (12) expoſita calculari.

16. At enim multa ſunt, quæ hypotheſin reddant erroribus obnoxiam. Imprimis diverſimode agit calor in ſuperficie Telluris, & in locis magis editis, conſequenter denſitas nequit accurate reſpondere ponderibus incumbentibus, ſive preſſionibus, quæ pendent a vi expanſiva elaſtica, uti Cap. IV. Part. II. Inſt. Mech. diximus, & quibus ſolis debentur hydrargyri altitudines in barometro. Dein ponendum eſſet, actionem gravitatis manere conſtantem in aerem, cum tamen vel ex obſervationibus in pendulis ab ipſo *D. Bouguer* inſtitutis conſtet, quod in magnis montibus etiam ad ſenſum decreſcat; & *Newtonus* L. II Princ. Prop. 22 demonſtrat, quod ſi gravitatis actio decreſcat in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro, denſitates ſint in proportione Geometrica, ſi ſumantur altitudines in proportione harmonica, hoc eſt, ut ſit prima ad tertiam, ut differentia primæ & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ. Accedit, quod ipſa inæqualitas ſuperficiei Telluris nec unam, nec alteram rationem actionis gravitatis ſinat tuto aſſumi.

17. Ceterum quod diximus, lumen e corpore emanans undique in sphæram diffundi, ita sumi volumus, ut semper ponatur omne impedimentum abesse, quod non tantum interjecta corpora opaca, mediumve minus pellucidum, adferre possunt, sed etiam ipse situs nimis obliquus respectu oculi. Refert *D. Bouguer* (Opt. de divers. lum. gradibus dimetiend. L. 1. Sect. 2. Artic. 12.) partes superficiei disci solaris apparentis admodum differre inter se se splendore: eam, quæ sumitur in distantia $\frac{3}{4}$ radii a disci centro, videri minus lucidam, quam quæ prope ejus centrum est, & quidem in ratione 35 ad 48 prope, quæ minor est, quam ratio sinus distantiæ a limbo, ad sinum totum. Observationem difficilem equidem ter, quaterve repetiit eodem eventu, quamvis fateatur, nil adhuc de ratione decrementorum luminis constitui certi posse, idque unum constare, quod partes superficiei solaris limbis viciniores notabiliter splendore differre videantur.

Exhibeat AB (fig. 8. Tab. I.) diametrum apparentis disci oculo in O constituto. Si fuerit AD $= \frac{1}{4}$ CA, pars superficiei E versus O pauciores radios emittet, quam pars F in ratione exposita. At si fuerit AFB æquator solis, axe, circa quem motu vertiginis revolvitur, ad ejus planum perpendiculari, cum E ad F pervenerit, multo clarior apparebit. Hujus autem phænomeni quæ causa sit vera, haud equidem scio a quopiam proditum esse. An fortasse ipsa lux e vicina quapiam parte G directione CGM emissa, ac densior, impedit aliquantum propagationem ejusdem digredientis e parte E directione EO, etsi non obsit propagationi juxta directionem CEL ad superficiem perpendicularem? An potius corpus solare atmosphæræ quadam specie ambitur, quæ prope superficiem densior sit, ut luci ex E digredienti majus ejus spatium emetiendum sit non sine decremento aliquo, quemadmodum fit in atmosphæra Telluris, quam radiis ex F directione FO propagatis? An denique propterea particula $\frac{3}{4}$ radii a centro remota obscurior visa est, quod in axe alterius vitri objectivi heliometri, quo usus est *Bouguerus*, collocata non fuerit, uti altera centralis in alterius vitri objectivi axe sita? quamquam haud putem tantam claritatis diversitatem ex tam exiguo situs discrimine oriri posse. Quæcunque autem hujus rei causa sit, eam indagare nostri instituti non est. Fig. 8. Tab. I.

ARTICULUS II.

De successiva Luminis Propagatione, & Aberratione Siderum.

18. Qui superiore sæculo majore industria Astronomiam coluerunt, cum stellarum longitudinem & latitudinem observarent, notabilem intra anni spatium varietatem deprehenderunt, ut jam aliquantum in longitudinem progressæ imminuta latitudine, jam regressæ latitudine aucta viderentur. Has variationes cum primum parallaxi orbis annui, quem Tellus percurrit, tribuendam putarent, utpote ex qua fieri necesse est, ut stella, quæ reapse locum non mutat, videatur nobis ellipsin exiguam percurrere in superficie sphæræ cœlestis, accurate dein collatis observationibus cum theoria parallaxeos, deprehensum est, aliam subesse phænomeni causam, quam cum ignorarent, motum hunc apparentem fixarum *aberrationem* dixerunt. Eundem motum instrumentis exactissime elaboratis postea sibi examinandum sumpserant *D. Molineux*, & *D. Bradley*, quorum posterior tandem causam detexit, non modo ad insignem sui nominis celebritatem, sed etiam maximum rei Astronomicæ incrementum; itaque jam ad certas leges redacti sunt hi apparentes motus, ut, quantum ex hoc capite, stellarum loca accuratissime determinari possint.

Fig. 9. Tab. I. 19. Animadverterat *Roemerus*, Satellitem intimum *a* (fig. 9. Tab. I.) Jovis I, dum ex umbra emergit, fere semiquadrante horæ videri citius, quam spectato motu juxta tabulas recens a *Dominico Cassini* constructas apparere deberet, Tellure circa locum T posita; at vero tardius, si Terra versetur circa t; cujus rei cum causa nulla alia appareret, præter viarum *a*T, *a*Q, *at* diversas longitudines, quas lux a satellite umbram egresso in diversis hisce positionibus usque ad oculum spectatoris emetiri debet, intulit, eam tempore indigere, quo per datum quoduis spatium propagetur, ideoque eam non nisi successive propagari. Ex eadem causa, dum idem satelles ad *b* umbram ingreditur, Tellure prope D constituta, citius videri desinit, quam si ea versetur circa *d*, quippe cum in primo casu postremo reflexa lux viam *b*D, in altero vero longiorem *bd* habeat. Rœmeri opinio primum etiam ipsi Cassino probata est, quamvis postea a sententia recesserit. Selegerat autem sibi Rœmerus primum, sive intimum, potissimum satellitem, quod ob exiguam orbitam nunquam immersionem in Jovis umbram effugiat, & brevissimo tempore revulutionem peragat, 42 prope horarum, quibus fit, ut ejus eclipses frequentius multo spectari possint. Porro computatis locis Telluris T, t, & observato discrimine temporis, jam nulla erat difficultas reperiendi tempus, quo lumen per spatium æquale cum SQ, sive distantia Telluris

a sole,

a ſole, propagatur, quod alii a nobis ſuperius indicato non nihil brevius faciunt.

20. Duo ſunt præcipue, quæ huic Roemeri opinioni *Maraldus* olim oppoſuit. Imprimis, quod ſi in reliquorum ſatellitum occultationibus, vel emerſionibus correctio ex ſucceſſiva luminis propagatione petita adhibeatur, diſſenſus potius a calculo & tabulis augeatur, quam minuatur. Dein protulit obſervationes factas Jove in perihelio, & aphelio conſtituto, in quibus proinde diſtantiarum differentia erat dupla orbitæ Jovis eccentricitas, cui competere debuerat differentia temporis 3 circiter minutorum; fuerunt vero eæ obſervationes ejusmodi, ut id diſcrimen penitus abfuiſſe videatur. Verum facile animadvertit R. P. *Boſcovich* in *Part. I. Diſſert. de Lumine* (quæ etiam Viennæ A. 1766. typis Trattnerianis excuſa eſt) tabulas a Caſſino conſtructas minus accuratas eſſe, quam ut tuto adhiberi poſſint; omnesque perturbationes ex mutuis viribus oriundas in Satellitibus reliquis multo majores eſſe, quam in intimo; non attendi in illis tabulis orbitarum obliquitatem (quod tamen neceſſarium foret, ut mora ſatellitis in umbra definiri poſſet), non ullam eccentricitatem &c, ut adeo facile majores inde errores enaſci poſſint, quam ſit temporis diſcrimen ex ſucceſſiva propagatione lucis ortum. Hinc fieri debere, ut errores non adeo leves quandoque ita ſeſe compenſent mutuo, ut computus juxta tabulas initus haud aberrare ab obſervatione videatur; verum alio tempore, omnibus, aut potiſſimis, in unam ſummam coaleſcentibus, multo magis diſſideant obſervationes a calculis. Jam *Poundius* inde ab A. 1719. animadverterat, etiam in aliis ſatellitibus aberrationem ex ſucceſſivo Luminis motu attendi debere; jam æquationem ab eccentricitate orbitæ Jovis pendentem adhibuerat (Transact. Phil. N. 361). Denique jam nemini recentiorum Aſtronomiæ cultorum in animum venit, rem tot deinceps accuratis obſervationibus comprobatam in dubium vocare.

21. Ut mutationem loci apparentis ſtellarum ex ſucceſſiva luminis propagatione ortam rite intelligamus, finge ex loco quodam edito Σ (fig. 10. Tab. I.) directione perpendiculari decidere minuta corpuſcula, qualia v. g. forent guttulæ ex nube depluæ, teque manu geſtare tubum quempiam verticaliter erectum Aβ. Evidens eſt, ſi in eodem loco A immotus perſtes, ea corpuſcula poſſe citra impactum in tubi laterea per β ingreſſa rurſus per A egredi; at ſi ipſe ex A verſus *a* una cum tubo progrediaris, ſitque hic motus tuus celerior in directione A*a*, quam ut, dum ſpatio diametro tubi æquali verſus *a* moveris, corpuſculum per β ingreſſum longitudinem tubi βA percurrat, fieri non poteſt, ut non antea illidantur ea corpuſcula in tubi latera, quam ad orificium A perveniant. Quæcunque autem fuerit ratio celeritatum motus tubi in directione A*a*, & corpuſculi decidentis directione perpendiculari, nunquam ullum corpuſculum per centrum Fig. 10. Tab. I.

orificii β ingressum, per centrum orificii oppositi egredi poterit, quamdiu tubus situm verticalem habet. Ut hoc fiat, necesse est, tubum eo situ tenere obliquum AB, ut percurrentibus particulis deciduis spatium B*a*, ipse tubus sibi semper parallelus moveatur spatio A*a*; tum enim particula per B ingressa egredietur per *a*, tubo jam situm *ab* obtinente. Quodsi præterea fingamus, te nescire, quod reapse tubus spatio A*a* motus sit, evidens est, tibi videri debere, particulas illas non directione SB*a* venisse, sed alia directione *sba*, quæ cum priore, ac vera cadentium corpusculorum directione facit angulum S*as* = AB*a*, in qua est A*a* (spatium confectum a tubo) ad *a*B (spatium descriptum a particula tubi axem percurrente), ut sinus anguli S*as* ad ejusdem cosinum, aut siquidem motus tam tubi, quam corpusculorum cadentium foret æquabilis, & angulus S*as* admodum parvus, puta minor $\frac{1}{2}$ minuto, celeritas tubi ad celeritatem corporis tubum peragrantis, ut arcus metiens angulum inclinationis tubi ad radium.

Fig. 11. Tab. I. 22. Ut jam hæc ad Lumen, & oculum spectatoris una cum Tellure motum applicemus, sit (fig. 11. Tab. I.) Tellus in C constituta, ad quam e stella quapiam S pertingant radii SC. Si terra immota perstaret, equidem stellam eadem recta CS videret, & ea producta in R, referret ad punctum R superficiei sphæræ cœlestis apparentis. Verum si motus Telluris habet ad motum, & celeritatem luminis rationem aliquam sensibilem, spectator, qui motum suum proprium non advertit, existimare debet, impressionem lucis, qua stellam videt, in oculum non fieri directione *n*C, sed alia *m*C, quæ ita sit ad priorem inclinata, ut sit celeritas Telluris ad celeritatem lucis, ut est *mn*, *n*C, quemadmodum id facillime ex iis deducitur, quæ superiore numero diximus. Cum porro hæc inclinatio sit admodum parva, satis est, orbitam Telluris CQO*q* assumere circularem, ejusque motum æquabilem, posita distantia media solis a Terra 23742,609 semidiametrorum Telluris, adeoque orbitæ peripheria continente 149179,224 semid. quod spatium terra tempore 365*d*. 6h. 9′$\frac{1}{4}$ fere percurrit, consequenter intra 8′ 8″ sive 488″ proxime 2,306 semidiametros. Est autem 149179,224 : 2,306 = 360° (seu 1296000″) : 20″ proxime, quare terra in gradibus eodem tempore conficit 20″, quo lumen e sole ad Tellurem propagatur, hoc est, quo lumen conficeret itidem in gradibus arcum 57° 17′ 45″ fere. Est autem ratio 20″ ad 57° 17′ 45″ seu 206265″, sensibilis, nempe fere 1 ad 10312, unde consequitur, inclinari debere directionem apparentem ad veram sub angulo 20″ proxime, ideoque locum stellæ apparentem a loco vero tantundem differre.

23. Exhibeat modo in tangente orbitæ Telluris particula CT celeritatem oculi, *n*C celeritatem lucis, ut sit TC ad C*n*, ut 1 ad 10312, referet spectator stellam S ad locum *p* ejus orbitæ apparentis. Dum vero spectator quadrantem CQ peragrat, stella videbitur, percurrere quadrantem *pc*. Et terra in quadrante QO versante, motus

stellæ

ſtellæ fieri apparebit in quadrante *cr*. Ubi terra venerit in *q*, ſtella ad *o* appellet; & terra ad C revertente, ſtella denuo ad *p* progreſſa videbitur, ita, ut orbita apparens ſtellæ ſit circulus parallelus cum orbita Telluris, cujus radius apparet ſub angulo 20″, in qua orbita ſtella ſemper videtur quadrante præcedere locum correſpondentem Telluris.

Verum enim vero aſſuevimus objecta cœleſtia referre ad ſuperficiem quandam ſphæricam cavam, quam nobis cœli aſpectus exhibet. Hinc orbita apparens ſtellæ jam non circulus, ſed ellipſis videtur, quæ deſignatur e ſingulis punctis orbitæ Telluris per ſingula puncta orbitæ apparentis ſtellæ *opcr* ductis rectis, ac in ſuperficie ſphæræ cœleſtis terminatis, velut ABDE. Eſto *v*V*u* pars eclipticæ, *v*AZ, VRZ, *u*DZ ſint circuli latitudinis ſtellæ, qui per polum eclipticæ Z tranſeunt; erit longitudo ſtellæ vera V, quoties eam in arcu VRZ videmus, latitudo autem vera erit arcus RV = D*u* = A*v*. Evidens eſt, ſi motus directus, ſeu juxta ſignorum ordinem fiat in Tellure directione CQO*q*, motum ſtellæ apparere directum, dum ſemiellipſin AED peragrat, retrogradum vero, dum conficit partem DBA. Itaque terra in C poſita, dum ſtella eſt in conjunctione cum ſole, & in A apparet, habet ſtella veram latitudinem, ſed longitudo eſt vera minor arcu RA. Quando terra ad Q progreſſa ſtella videtur in E, motum habet directum, ſed ejus latitudo vera minor eſt arcu RE. Tellure arcum QO peragrante, ſtellæ motus manet directus uſque in D, ubi denuo acquirit veram latitudinem, ſed amittit longitudinem, quæ veram excedit arcu RD. Promota ulterius terra in quadrante O*q*, poſtquam ſtella fuit in oppoſitione cum ſole, eadem conficit quadrantem DB motu retrogrado, ubi in B recuperat veram longitudinem, ſed latitudo ejus excedet veram arcu BR. Denique dum terra ex *q* in C redit, abſolvit ſtella quadrantem BA motu retrogrado, atque in A veram acquirit latitudinem, longitudine arcu RA imminuta.

Ceterum ex iis, quæ in ſectionibus conicis traduntur, facile intelligitur, rationem axis minoris ellipſeos EB ad majorem DA eam eſſe, quæ eſt ſinus latitudinis, ſeu anguli RLV, ad ſinum totum, utpote cum ellipſis illa nil aliud ſit, quam ſectio cylindri obliqui (cujus baſis eſt O*q* CQ) cum ſuperficie ſphæræ cœleſtis, quæ in ſpatio 40″ non excedente pro plano haberi poteſt. Porro axis minor ſemper decreſcere debet, ut decreſcit ſinus latitudinis; & ſiquidem ſtella verſaretur in ipſa ecliptica, tota abiret in rectam; uti ex oppoſito, ſi ſtella foret in polo eclipticæ Z, mutaretur in circulum.

24. Ex hoc motu apparente intelligitur, eum longe alium eſſe, quam foret ille, qui ex parallaxi orbis annui oriretur. Nam vi hujus (fig. 12. Tab. I.) quando terra eſt in C, ſtella S referretur ad punctum E ſuperficiei ſphæræ cœleſtis, & non ad A, ſeu extremum orientalius axis majoris, quemadmodum fit ratione ſucceſſivæ propagationis Fig. 12. Tab. I.

luminis. Terra dein ad Q progreſſa, ſtella videretur in D; ubi terra attingit O, ſtella in B apparere deberet. Ex quo intelligitur, ſtellam in orbita apparente, ſi qua foret, ex parallaxi debere ſemper præcedere locum apparentem ex propagatione lucis integro quadrante.

25. At quis tandem foret motus apparens alicujus ſtellæ fixæ, ſi reapſe haberetur aliqua parallaxis ſenſibilis ex motu Telluris in orbe annuo? In hac hypotheſi is motus combinandus eſſet cum motu apparente ex ſucceſſiva propagatione lucis. En vero methodum eum
Fig. 13. Tab. I. ſchemate aliquo exhibendi. Ponatur (fig. 13. Tab. I.) Locus verus ſtellæ fixæ in F, per quod punctum ducatur indefinita recta RS, quæ repræſentat aliquem circulum parallelum ad eclipticam; huic inſiſtat ad angulum rectum DE, exhibens circulum latitudinis ſtellæ, & per polum eclipticæ transeuntem. Accipiatur in DE utrinque ad F pars FB, F*b*, tot partium æqualium, quot ſecundorum ponitur parallaxis dimidia annua in longitudinem in circulo maximo, & deſcripto hoc radio circulo BA*ba* ducatur ex *b* ad FS parallela *b*M viginti partium ejusmodi æqualium, ſeu $20''$ circuli maximi. Tum radio FM deſcribatur circulus MDRE. Accipiatur in radio FD terminus quartus ſequentis analogiæ: *ſin. totus*: *ſin. lat. ſtellæ* = DF $(=\sqrt{Fb^2+bM^2})$: TF; ſemiaxibus TF, FS fiat ellipſis RTSV, quæ erit orbita apparens in ſuperficie ſphæræ ſtellæ.

Nam e num. præced. patet, ratione parallaxeos, quando terra eſt in C (fig. 12. Tab. I.), ſeu dum ſtella eſt in conjunctione, eam apparere in *b*; & ſimul ex aberratione luminis debet videri orientalior $20''$, ſeu quantitate *b*M, adeoque ſi ſphæræ cœleſtis ſuperficies foret parallela cum plano eclipticæ, ſtellæ locus foret M. Eodem modo liquet, Tellure in Q conſtituta, ſtellam ratione parallaxeos fore in *a*, & ratione aberrationis luminis in *n*, & ſic deinceps. Sed quoniam ſuperficies ſphæræ cœleſtis oblique objicitur ſpectatoris oculo, circulus mutabitur in ellipſin, in qua ſit TV ad RS, ut ſinus latitudinis ſtellæ ad ſinum totum.

Sequitur hinc, ſi ex M demittatur ad FS perpendiculum MGL, fore punctum ellipſeos G locum apparentem ſtellæ, quando ſol eſt cum ea in conjunctione, ideoque tunc vera ſtellæ latitudo imminuta apparebit quantitate GL, longitudo vero parte FL = M*b* = $20''$. Eodem modo dum Terra eſt in primo quadrante poſt conjunctionem, locus apparens ſtellæ eſt H, in quo latitudo imminuta eſt arcu *a*H, longitudo vero juſto major eſt arcu *a*F. Intelligitur hinc, qua ratione pro quovis tempore dato longitudo, & latitudo ſtellæ apparens definiri poſſit. Verum cum id in præſens non agamus, ſatis ſit indicaſſe methodum.

26. Id unum quæri adhuc poſſet a tirone, cur in computo aberrationis luminis non attendatur motus rotationis Telluris circa axem, cum per eum fiat, ut ſpectator, præcipue a polis remotior, intra 24

horas

horas multa milliaria percurrat, adeoque ingenti celeritate moveatur. At enim hæc celeritas cum velocitate lucis comparata, pene evanescit. sumpta quippe Tellure sphærica (quod pro præsente casu satis est), & radio = 1, erit circulus æquatoris, in quo est velocitas rotationis maxima, proxime 6,283 semidiametrorum, quas oculus intra 24 horas seu 86400″ percurrit, consequenter intra 8′ 8″, sive 488″ non plus, quam 0,03548 partem diametri, adeoque erit sub æquatore velocitas lucis ad velocitatem oculi spectatoris ex motu rotationis, cum lux intra idem tempus percurrat 23742,609 semidiametros Telluris, fere ut 2374260900 ad 3548, seu 669126 ad 1, ex qua ratione velocitatum haberetur aberratio 0″,308 proxime, quæ proinde oculum spectatoris fugit.

ARTICULUS III.

De heterogeneitate luminis, & refractione.

27. Ut quæ de refractione dicenda sunt, rite comprehendat tiro, necesse est, ut notionem prius corporis diaphani, sive lucem transmittentis, sibi animo effingat. Cartesiani Philosophi fere discrimen inter opaca, & pellucida corpora in eo reposuerunt, quod priorum meatus, & poros varie flexos, tortuosos, ac irregulares arbitrarentur, posteriorum vero putarent eam esse conditionem, ut inter solidas materiæ particulas interstitia vacua, sed quaqua versus recta linea disposita interciperentur, per quæ liber radiis lucis commeatus foret. Non est, cur difficultates, quibus hæc opinio premitur, exponamus, uti neque opus est, ut cogitemus cum illis, qui lucis naturam in pulsibus quibusdam ætheris concitati constituunt, moleculas corporum pellucidorum chordarum instar elasticarum tensas esse, quæ per allabentes ætheris concitati pulsus itidem ad oscillationes quasdam impellantur, quas ita successive propagent per totam corporum ejusmodi crassitudinem, ut extimæ, quæ in superficie opposita sunt, contiguo ætheri consimiles vibrationes imprimant, videaturque hac ratione lux per corpora propagata fuisse, cum tamen non nisi vibrationis motus, ad quem ab æthereis pulsibus concitatæ fuerint corporum particulæ, transmissus sit. Nobis satis est, si in omnium ordinum particulis compositis detur ingens copia meatuum, & revera longe plus vacui sit sub corporum volumine, quam materiæ. Deflexiones enim illæ exiguæ radiorum lucis, quæ ab actione continua molecularum corporis diaphani inæquali oriuntur, & momento ab actione contraria corriguntur, quibus sæpe evitari etiam possit occursus particulæ luci impervíæ, hujusmodi, inquam, deflexiones nequaquam officiunt motui rectili-

rectilineo lucis, quando ultra fatemur, eum non fieri in linea recta Geometrica, sed ad sensum.

28. Verum itaque discrimen corporum tralucentium ab opacis in eo cum Newtono constituimus, quod ita æquabiliter meatus inanes, solidæque partes sint dispositæ, & intervalla vacua sint distributa cum materia, ut non alicubi plus spatii sit vacui, alibi plus materiæ solidæ; sed ut exiguis, & definitis dimensionibus hæc illa, & illa rursus hanc excipiant. Hoc si sit, vires undique circa lucis particulam corpus diaphanum semel ingressam æqualiter ad sensum agent, neque ejus poterit fieri notabilis in hanc, illamve partem deflexio, sed debebit ea directione moveri, quam in ingressu acquisivit. Patet autem, hanc affectionem nequaquam connexam esse cum densitate, poteritque corpus diaphanum tantundem continere materiæ, quantum solidissimum quodvis, & opacissimum, cum totum reponamus in æqualitate virium, quæ sane haberi potest, seu multæ sint particulæ agentes, seu paucæ. Unde habebimus diaphana non modo densa, sed rara etiam quovis gradu. Præterea non dependet æqualitas ejusmodi virium a nexu firmiore, vel nullo inter moleculas corporis diaphani; ut proinde æque fluida, ac solida possint esse diaphana. Ceterum nullum habemus corpus pellucidum, quod nihil omnino lucis vel absorbeat, vel extinguat, ut proinde summam illam homogeneitatem in gradu quodam exactissimo ad phænomena non requiramus.

29. Quando itaque in æquabili meatuum, ac solidarum partium distributione, quæ cum quovis densitatis gradu consistere possit, diaphaneitatem reponimus, illico sequitur, lucem, dum per medium quodpiam propagatur, atque occurrit superficiei alterius, magis, minusve activi, debere necessario a via sua discedere. Quando enim illuc usque ad novum medium accesserit, ubi vires ejus sensibiles evadunt, æquilibrium actionum particularum lucis moleculam ambientium sublatum est, ut ea proinde actioni fortiori obsequi debeat. Porro ex innumeris combinationibus partium elementarium innumeræ quoque in particulis compositis virium species enasci possunt, ut absolute si loquamur, major diaphani densitas non inferat ex se se majorem actionem in lucem, sed possint esse corpora rariora, attamen efficacius in lumen agentia, quam quædam densiora, & ex opposito: possint item alia habere vires attractivas, repulsivas alia. Si, quid in natura fieri nos doceat experientia, quæras? respondeo, hanc legem esse satis universalem, ut corpora diaphana densiora magis attrahant lucem, quam rariora, quando sub certis inclinationis angulis incidit; reflectant itidem fortius incidentem sub aliis angulis; attamen observari, ceteris paribus, corpora sulphureæ naturæ, & oleosa efficacius agere in lucem. Nos hic agemus de refractione, ejusque leges simpliciores exponemus, reliqua suis locis reservantes. Ponemus autem superficiem corporis diaphani, quod lux per aliud medium adveniens subit, pla-

planam

nam tam ex ea parte, qua intrat, quam qua exit; & quidem ut leges generales explicemus, satis est, si hæ superficies sint parallelæ.

30. Sit itaque medium novum, v. g. aqua, vel vitrum, comprehensum superficiebus parallelis SN, *sn* (fig. 14. Tab. II); sint ad has parallelæ LM, *lm*, & æquidistantes ad intervallum, ad quod actio corporis SN*sn* in lumen est sensibilis, quæ quidem in se admodum exigua est. Adveniat 1*mo* particula lucis directione ABC ad superficiem SN perpendiculari. Ubi ad B pervenerit, si magis attrahatur a particulis corporis N*s*, quam a particulis medii, ex quo venit, necesse est, ut cum directio attractionis sit perpendicularis ad SN, augeatur ejus velocitas toto illo spatio a B usque ad C: sed particula in nullam partem poterit deflectere, cum vires undique circa C sint æquales, vt per se clarum est. Ubi penetraverit per superficiem SN, rursus ex ipsa hypothesi vires undique æquales agunt in particulam: quare neque tum deflectet, sed perget recta usque ad *c*, ubi, cum emerget, actio corporis *s*N contraria est directioni lucis, & æqualis actioni in superficie superiore, adeoque per spatium *cb* tantundem imminuere debet celeritatem particulæ, quantum per spatium BC auxit. Quare sequitur in hac hypothesi incidentiæ perpendicularis, I° nullam fieri refractionem. II°, si medium novum magis attrahat lucem, quam illud, ex quo venit, & in quod transmisso corpore rursus exit, celeritatem lucis in æqualibus ab illo corpore distantiis esse æqualem, quæ intra ipsum corpus æquabilis est, & maxima. III°. Celeritatem extra LM, *lm* manere æquabilem, & constantem; intra LMNS iisdem gradibus augeri, quibus intra *snml* minuitur. Fig. 14. Tab. II.

31. Ponamus *secundo* particulam advenire directione DE ad LM obliqua. Poterit motus DE resolvi in DF, FE juxta Mechanices leges. Jam vero attractio corporis S*n* ad LM normalis motum DF nec augere, nec minuere potest, utpote cum ei nec opponatur, neque etiam cum eo conspiret; at debebit mutare celeritatem directione FE, cum qua congruit, adeoque hac crescente necessario particula a puncto E usque ad superficiem SN debebit describere lineam curvam EI, & quidem versus SN cavam, cum motus per FE acceleretur, sicut corpus grave directione DE projectum describeret curvam vi gravitatis ad superficiem telluris perpendiculariter agente, & motum corporis perpetuo inflectente. Hinc tangens curvæ in I, nempe I*i*, magis accedet ad perpendiculum I*g*, seu illud sub minore angulo *g*I*i* secabit, quam recta DE producta. Est autem I*i* directio particulæ lucis novum medium ingressæ, in quo jam vires agunt in omnem partem æquales; & DE via ejusdem particulæ ante refractionem; quare evidens fit, particulam lucis per ejusmodi refractionem accedere in novo medio magis in lucem agente ad perpendiculum, itaque via deinceps recta in eodem usque ad *i* moveri. Hic vero attractio corporis

ad ſuperficiem *sn* perpendicularis opponitur motui lucis; quare iisdem gradibus ab *i* uſque ad *e* flecti debebit motus particulæ, quibus facti ſunt flexus per EI, unde etiam quidquid augmenti celeritati perpendiculari FE acceſſit uſque ad I, id totum in egreſſu per *ie* perdetur, & ubi particula ad *e* pervenerit, recuperabit priorem celeritatem æquabilem, quam habuit per DE, ut adeo eadem hinc deducantur corollaria (primo dempto), quæ in primo caſu deduximus, quibus etiam ſequentia addenda ſunt. I°. Ob æqualitatem flexuum contrariorum per EI, *ie*, directionem lucis DE eſſe parallelam ad *ed*. II° Radium luminis in corporis ſuperficiem oblique incidentem refringi ad perpendiculum, ſi corpus refringens magis attrahat lucem, quam medium, ex quo incidit; & ex oppoſito refringi illum a perpendiculo, quando medium, ad quod venit, minus attrahit. III°. Quia vires, cis & trans ſectionem corporis, quam exhibet ſchema, æquales ſunt in lucem, totam viam DEI*ied* eſſe in eodem plano, in quo eſt perpendiculum GI*g*, ſcilicet in plano ad ſuperficiem refringentem normali. Sed quoniam diſtantia linearum LM, *lm* a ſuperficiebus SN, *sn* admodum parva eſt, ita refractionem poſthac conſiderabimus, quaſi fieret in ipſis punctis I & *i*.

32. Porro facile intelligitur, quod fit majore attractione corporis refringentis in egreſſu per *i*, idem poſſe fieri in ingreſſu aliqua vi repellente medii ſuperficiebus SN, *sn* contenti, ut nempe refringatur a perpendiculo. Sic ſi particulæ directio ſit XV., & ad LM uſque ſe extendat vis repellens corporis S*n*, ubi pervenit ad V, jam ejus celeritas perpendicularis minui debet, ideoque per ſpatium VY curvabitur via particulæ ita, ut ſuperficiei SN obvertatur convexitas, conſequenter tangens curvæ in Y producta ſecabit perpendiculum ſub majore angulo, quam producta directio XV. Quod ſi vis repellens eſſet tanta, ut poſſet totam celeritatem perpendicularem OT particulæ O directione OP incidentis extinguere, deſcriberet particula arcum PQ*p*, ita, ut ramus PQ eſſet æqualis ramo Q*p*, & ſequeretur reflexio, de qua inferius agemus, ubi etiam dicemus, reflexionem etiam fieri poſſe per ſolam attractionem in quibusdam caſibus.

33. Quod in hac expoſitione refractionis primo obtutu alicui mirum videri poſſet, illud eſt, quod negaverimus (5), attractionem corporis alicujus totalis, v. g. Solis, poſſe lucis motum ſenſibiliter retardare, hic vero aſſeramus augmentum tantum celeritatis perpendicularis particulæ luminis oblique incidentis effici attractione corporis ſubinde perexigui, uti eſt guttula aquæ, vel fruſtillum vitri, ut directio admodum ſenſibiliter inde mutetur, & angulo ſat magni numeri graduum. Sed ſi rite advertamus, aliam longe eſſe legem gravitatis, aliam attractionum in minimis diſtantiis, omnis difficultas diſparebit. Quis dicat, ingentem aliquam vim requiri, ut exiguus aliquis lapillus a ſuperficie telluris elevetur? & tamen hæc vis vincit attra-

attractionem totius Telluris. Quis item dicat, exiguam vim satis esse, ut idem lapillus comminuatur, in cuius diffractione tantam difficultatem experimur? & tamen vires alicujus menstrui, v. g. aquæ fortis, (si lapis fuerit ejus indolis, ut menstruum hoc solutioni aptum sit, uti si fuerit species marmoris) in minimos pulveres eum brevissimo tempore redigunt. Ut adeo vel obviis exemplis ingens illud discrimen virium in majoribus, & minimis distantiis agentium luculenter pateat. At non æque expeditum illis est negotium, qui refractionem vel a subtili quodam fluido corporibus refringentibus atmosphæræ instar circumfuso, vel a majore, minoreve resistentia, quam ipsæ corporis partes luci objiciant, repetunt. Enimuero si in eadem figura ponamus spatium LMNS ejusmodi fluido occupari, particulæ lucis D non modo resistentia objicietur secundum directionem perpendicularem EF, sed etiam secundum DF superficiei parallelam, ut adeo utroque motu proportionaliter ad resistentiam impedito via DE non flecteretur in curvam, sed tantummodo longiore tempore percurreretur. Præterea, nisi adsint vires activæ, celeritas in trajectu per LMNS nequaquam posset recuperari, sed decresceret adhuc in spatio *snml*, ut proinde celeritas per DE major foret, quam per *ed*, aut ex opposito per *de* major, quam per ED in motu contrario, ex quo rursus impediretur multorum phænomenorum explicatio, quæ ab alternis vicibus facilioris transmissus, & reflexionis pendent, quarum vicium in mediis homogeneis æqualia sunt intervalla, quod fieri non posset, nisi celeritas esset æqualis, & hæc sublatis viribus corporis in lucem agentis, in pristinum statum, ubi semel mutata foret, restitui haud posset.

34. Quod summi momenti est in omni Dioptrica, jam nobis est exponendum, nempe in eodem medio refringente, quando lux ex eodem itidem medio advenit, semper esse *sinum incidentiæ ad sinum refractionis in ratione constante*, quiscunque sit angulus incidentiæ; ad cujus rei veritatem evincendam vel una constans experientia satis est, quamvis nec ipsa causa adeo abstrusa sit, ut non possit facile a tirone intelligi. Angulum porro incidentiæ dicimus angulum PIA (fig. 15. Tab. II.), quem perpendiculum PID ad superficiem GIH refringentem cum radio incidente AI comprehendit, qui idem est, cum angulo EID ad verticem opposito; angulus refractionis est BID ab eodem perpendiculo, & radio refracto comprehensus; sinus incidentiæ (si intelligatur descriptus arcus DBE radio ID), est EF, refractionis BC. Ostendendum igitur, quiscunque sit angulus PIA, seu EID, semper esse EF ad BC in ratione constante, v. g. si lux ex aere veniat in aquam, esse EF : BC = 4 : 3 fere; si incidat ex aere in vitrum, proxime EF : BC = 3 : 2. Etenim cum vires aquæ, vel vitri non mutent celeritatem in directione ad GH parallela, hoc est, celeritatem, quæ exponitur per AP, sed eam tantummodo, quæ est ad GH perpendicularis, & per PI exhibetur, lumen æquali tempore post refractionem discedet a perpendi- Fig. 15. Tab. II.

 pendi-

pendiculo ID æquali ſpatio CB, quo ante refractionem ſpatio AP acceſſit. Dein cum vires ſuperficiei GH agant in ratione functionis alicujus diſtantiarum (quæcunque ea ſit), qua demum cunque directione lux adveniat, ſemper per omnes diſtantias illius ſpatii, ad quod actiones eæ extenduntur, tranſire debet, donec attingat ſuperficiem refringentem: unde quacunque directione lux adveniat, incrementum (ſi ſint attractiones, ut in præſens ſupponimus) vel decrementum (quando lux a perpendiculo refringitur) celeritatis perpendicularis erit idem, hoc eſt, PI ad IC ſemper habebit conſtantem rationem, cum PI exponat celeritatem perpendicularem ante refractionem, IC celeritatem perpendicularem poſt refractionem auctam per actionem perpendicularem corporis refringentis. Quare neceſſe eſt, ut etiam IP celeritate reſpectiva perpendiculari ante refractionem eodem tempore percurratur, quo celeritate perpendiculari aucta poſt refractionem percurritur IC. Ex quo evidens fit, celeritate compoſita ex AP, PI eodem tempore ante refractionem percurri AI, quo celeritate compoſita poſt refractionem percurritur IB, ut proinde ſit celeritas ante refractionem ad celeritatem poſt refractionem, ut AI ad IB ob motus æquabilitatem. Eſt autem AI ad IB in ratione conſtante, cum ſemper ſit AP = BC, & PI ad IC rationem conſtantem habeat; igitur etiam celeritas ante refractionem ad celeritatem poſt refractionem eſt in ratione conſtante. Jam vero eſt:

AI: AP (= BC) = *ſin. tot.*: *ſin. incidentiæ.*
BC: BI = *ſin. Refract.*: *ſin. tot.*
ergo compoſitis rationibus AI: BI. = *ſin. refract.*: *ſin. incident.*

35. Sumpſimus adhuc ſuperficies corporis, per quas lux intrat, & egreditur, parallelas; at ſi eæ ſint ad angulum aliquem inclinatæ, alia præter communem refractionem obſervantur phænomena, quæ naturam Luminis nobis ulterius declarant, qua via etiam Newtonus ad præſtantiſſima ſua inventa perductus eſt.

Sit conclave obſcurum, per cujus valvæ exiguum foramen F (fig. 16. Tab. II) incidat radius lucis FI, occurrens in I plano prismatis triangularis vitrei, cujus ſectio eſt eſt STV: per leges expoſitas refringetur a via FI ad perpendiculum PIC. Ubi ad E pervenerit, egreſſurus in aerem, iterum recedet a perpendiculo ME, & ſi in diſtantia aliqua majore ei tabula alba opponatur, depinget in ea figuram oblongam, ſuperius, & inferius ſemicircularem, & lateribus parallelis rectilineis. Hujus figuræ, quæ *ſpectrum priſmaticum* appellari ſolet, pars ſuprema erit coloris violacei, & contigua Indici, tum deſcendendo ſequetur color cæruleus, viridis, flavus, aurantius, ruber. Si ſitus priſmatis eſſet oppoſitus, ut angulus S eſſet pars ſuprema, ordo colorum inverteretur. Quod ſi metiamur longitudinem & latitudinem, priſmate debitum ſitum obtinente (quod advertitur, dum exigua converſione circa axem in utramvis partem facta, ſpectrum

Fig. 16. Tab. II.

colo-

coloratum quasi stare, nec amplius attolli, vel deprimi videtur), si, inquam, metiamur longitudinem imaginis, sumpto latere rectilineo, ubi semicirculi in utrovis extremo incipiunt aut desinunt, & latitudinem, erit illa fere hujus quintupla. Item si comparemus angulum νEr cum angulo totius refractionis, is fere erit pars 27, vel 28 totius. Quibus cautelis opus sit, referre longum foret, & habetur tum apud Newtonum in *Optica*, & *Lectionibus Opticis*, tum apud alios. Magis necessaria attingemus in *Dioptrica*.

36. *2do* Si totum spectrum excipiatur lente ampla vitrea, in cujus foco radii colorati rursus colligantur, atque ibidem charta alba constituatur, videbitur circellus albus, uti erat radius incidens.

3tio Si in tabula, in qua depingitur spectrum coloratum, fiat foramen, per quod radius unius certi coloris, v. g. violaceus, reliquis interceptis, transire possit, & hic sub eodem, vel alio quovis incidentiæ angulo post tabulam excipiatur prismate *stν*, seu æquali, seu inæquali, vel etiam colore certo imbuto, v. g. viridi, vel flavo. refringetur quidem eodem modo, ac prius, & si quidem anguli æquales sint, etiam eadem quantitate; at colorem non amplius mutabit, nec in spectrum sensibiliter oblongum dispescetur, sed nova tabula exceptus coloris violacei circellum Q depinget.

4to. Quæ diximus, non tantum vera sunt de radiis solaribus, sed etiam cujuscunque lucidi, cujus lumen ad album proxime accedit (ipse enim color solis aliquantum flavescit), licet in aliis colores sint plerumque obscuriores, nec tam accurate discerni possint.

5to. Si (fig. 17. Tab. II.) mensuræ intervallorum coloratorum Fig. 17. Tab. II.
in lateribus parallelis, v. g. AG, accipiantur, Aa, Ab, Ac &c., deprehendit Newtonus in suo, quo usus est, prismate, (posita AG = 1), $Aa = \frac{1}{8}$, $Ab = \frac{1}{5}$, $Ac = \frac{1}{3}$, $Ad = \frac{1}{2}$, $Ae = \frac{2}{3}$, $Af = \frac{7}{9}$, AG = 1. Intelligatur GA producta in Q, ut sit AQ = AG, erunt intervalla exposita eadem cum intervallis, quibus chorda Musica GQ (saltem in paullo antiquiore systemate) dividi debet in *f*, *e*, *d*, &c, ut progrediendo a G versus A edat tonos illos 8 Musicos per *tertiam minorem*, & *sextam majorem*, ipsa vero intervalla singula ad unitatem AG relata erunt $Aa = \frac{1}{8}$, $ab = \frac{3}{40}$, $bc = \frac{2}{15}$, $cd = \frac{1}{6}$, $de = \frac{1}{6}$, $ef = \frac{1}{9}$, $fg = \frac{2}{9}$.

6to. Si ope plurium prismatum duo diversi colores permisceantur, v. g. flavus, & cæruleus, orietur quidem color mixtus viridescens, sed qui ope prismatis iterum in pristinos resolvitur. At color viridis ejusdem gradus, qui habetur ex separatione prima unius prismatis ope instituta, nunquam in alios duos specie diversos dividi potest.

Hæc omnia innumeris propemodum, atque certissimis experimentis Newtonus confirmavit, ingenti simul varietate methodi adhibita. Sed videamus, quæ ex hisce paucis necessario consequantur.

37. Et *1mo* quidem ex I & II experimento evidenter constat, lucem, quam albam dicimus solis, etsi reapse aliquantum ad flavam

 accedat,

accedat, haberi ex permiſtione omnium colorum. Etenim in prisma lux alba incidit, in quo nil aliud patitur, niſi quod diverſæ ejus particulæ diverſimode refringantur, quoniam ſpectrum multo longius fit, quam eſſe deberet, ſi in omnibus particulis haberetur eadem refractio: igitur ſola ſeparatione oriuntur ex albo radio colores. Dein iidem colores ope lentis in focum collecti reddunt lucem albam, hoc eſt, talem, qualis prius fuerat.

Secundo. Affectio, vi cujus certæ particulæ lucis certi coloris ideam excitant, conſtans eſſe debet, uti & ea, qua facilius, difficiliusve refringuntur. Etenim ſi haberetur color ex quadem modificatione per priſma, is in ſecundo prismate vel intendi, vel mutari deberet; hoc non fit per III experimentum; igitur eſt quædam affectio conſtans. Idem dicendum de gradu refrangibilitatis, uti tum ex I, tum ex III experimento liquido conſtat. Utraque hujus ſequelæ pars magis adhuc firmatur per experimentum VI.

38. Atque ex his jam intelligimus, quomodo ſpectrum coloratum prismatis efformetur. Scilicet cum incredibilis ſit particularum diverſitas, viribus, ac celeritate diſcrepantium, illæ quidem, in quas vitri actio minimum poteſt, ad *r* refringuntur, atque imaginem ſolis circularem depingunt; tum paullo ſupra *r* depingitur altera imago circularis per particulas paullo facilius, magisque refractas, atque ita deinceps per innumeros circellos (quorum diameter eſt ſpectri latitudo, & centra in eadem recta jacent) efformatur ſeries imaginum, quarum peripheriæ utrinque infinite fere propinguis interſectionibus latera rectilinea efficiunt. Jam vero etſi ſint innumeri gradus refrangibilitatis, & infinita pene diſcrimina impreſſionum, ex quibus alterius ſemper coloris ſenſus excitari deberet; nequimus tamen differentiam inter gradus admodum vicinos percipere (quanquam etiam oculus exercitatus probe adhuc in diverſis rubri v. g. coloris gradibus, diverſam colorum rubrorum intenſitatem advertat; idem eſt de aliis), ſed omnes ad ſeptem præcipuos revocamus, quos ipſos ſi attentius inſpiciamus, diſcernemus in ſingulis aliquos gradus minores, quibus ſucceſſive cum contiguis committuntur. Res prorſus ſe ſe habet, ſicut in ſono: in dimidia chordæ longitudine infinita ſunt intervalla infinitis tonis muſicis reſpondentia, interim tamen exiguum eorum numerum ſatis accurate diſtinguere poſſumus.

39. Præterea, ſi communem incidentiæ ſinum ponamus = 1, luce e vitro communi in aerem exeunte, ſinus refractionis a principio longitudinis computando erit intra ſequentes limites.

Pro radiis rubris uſque ad confinia coloris aurantii	ab 1,54 ad 1,5425
A confiniis aurantii ad confinia flavi	ab 1,5425 ad 1,544
A confiniis flavi ad confinia viridis	ab 1,544 ad 1,54667
A confiniis viridis ad confinia cærulei	ab 1,54667 ad 1,55
A confiniis cærulei ad confinia indici	ab 1,55 ad 1,55333

A con-

A confiniis Indici ad confinia violacei ab 1,55333 ad 1,55555
A confiniis Violacei ad finem longitudinis ſpectri ab 1,55555 ad 1,56.

Ex hac tabella perſpicitur, diſcrimen virium agentium in diverſas lucis particulas, ex quibus refractio pendet, eſſe perexiguum, cum differentia inter extremos colores 1,54 & 1,56 tam modica ſit. At cum ipſi colores tantopere differant, neceſſe eſt, ut aliæ adhuc ſint in luce affectiones non minus, ac expoſitæ, ſtabiles.

Idem refrangibilitatis diſcrimen deducitur etiam ex diverſa longitudine focorum lentis alicujus vitreæ, qui a radiis rubris, & violaceis efformantur, in quibus differentia eſt proxime $\frac{1}{27}$ pars totius diſtantiæ a lente uſque ad focum radiorum violaceorum. Et id quidem in eo vitri genere, quo uſus eſt Newtonus. Eſt tamen hic aliquid humani paſſus, quod rem non ſatis exploratam ad omnia refringentia corpora transtulerit, cum tamen hæc diſcriminis ratio nec in aqua ſemper, nec in quavis vitri ſpecie ſubſiſtat, uti *Dollondus* magno Dioptrices emolumento reperit, de cujus emendatione jam plerique Optici, auctoritatis tanti viri, quantus Newtonus erat, pondere quodammodo oppreſſi, ſpem fere omnem abjecerant, & ipſe fortaſſis Dollondus ſe ſe parti majori adjunxiſſet, niſi dubitationibus *Euleri*, & argumentis *D. de Klingenſtierna* excitatus fuiſſet ad ulteriorem diſquiſitionem per experimenta faciendam.

40. Illud unum hoc loco addimus, diſcrimen refractionis in diverſis luminis particulis, quæ diverſi coloris ſenſum excitant, non poſſe ex integro pendere a diverſa propagationis celeritate, aliquem enim etiam hanc poſſe habere influxum haud negavero. Nam ſi celeritas abſoluta particulæ eſſet in eadem ratione cum refractione, cum inter hanc ſit diſcrimen in coloribus extremis 0,02, etiam idem diſcrimen in propagatione foret; unde cum lux a ſole ad Tellurem tempore 8′ 8″ = 488″ propagetur motu æquabili, radii extremi violacei tardius 2″,88 advenirent, quam extremi rubri; & ſi ſumamus rationem diſtantiæ mediæ Telluris a ſole ad diſtantiam mediam Jovis a ſole, 1000: 5198, a Jove ad Tellurem circa Q (fig. 9. Tab. I.) verſantem radii violacei ſaltem 14″,97 tardius appellerent, quam rubri, ideoque hoc diſcrimen temporis ad 18″ aſcenderet tellure prope *t* poſita, & adhuc aliquantulum foret majus in ſpatio *at*, quod lux conficit, antequam ſatelles ex umbra emergens videatur. Ex quo ſequitur, quod cum lucis celeritas per reflexionem non mutetur, debere ſatellitem ex umbra Jovis egreſſum ſaltem per plura ſecunda in poſitione Telluris aſſumpta alterius coloris apparere, quam candidi illius, quo ſemper primo emerſionis momento, dum videri incipit, ſeſe nobis conſpiciendum præbet. Multo magis hoc diſcrimen coloris ſentiri deberet in ſatellitibus Saturni. Quoniam igitur id phænomenis repugnat, ſaltem illud conficitur, refractionis differentiam differentiæ celeritatum diverſarum particularum Luminis proportionalem non eſſe. Fig. 9. Tab. I.

ARTI-

ARTICULUS IV.

De Vicibus alternis facilioris reflexionis & transmissus.

41. Persecutus est hoc argumentum et fuse, & dilucide, & accurate R. P. *Carolus Benvenuti* in *Dissert. de Lumine* Romæ 1754 edita, & Viennæ 1761 recusa, ubi etiam multa sane supplet, quæ Newtonus vel solita brevitate indicat, vel data ponit. Nobis præfixi limites id tantummodo permittunt, ut methodum indicemus, qua Newtonus usus est in hujus rei pervestigatione, calculis, etsi non difficilibus, sepositis, atque ut inde profluentia corollaria adferamus, quæ plurimis phænomenis accurate explicandis viam sternunt, ac tandem ut conjecturam nostram de natura harum vicium aperiamus.

Acceperat Newtonus majoris tubi optici vitrum objectivum, parum admodum convexum, quod alteri vitro plano imposuerat. In conclave obscurum immissum radium solarem, atque interjectu prismatis in colores divisum, ita exceperat tabula perforata, ut non nisi, cuius vellet, coloris radius trans eam in chartæ albæ plagulam incideret, e qua lux illa colorata magnam partem in vitra, ut diximus, composita reflexa, atque inde denuo velut a speculo in oculum remissa, exhibebat in medio, ubi se se contingebant superficies plana, & Fig. 18. Tab. II. convexa, maculam obscuram C (fig. 18. Tab. II). Inde intervallo C*a* (quo semper indicatur intervallum a centro usque ad peripherias quæ vel lucidissimæ, vel obscurissimæ videbantur) ambiebat priorem maculam annulus lucidus ejus coloris, quem charta in vitrum reflectebat. Tum interjecto spatio annulari obscuro, alter intervallo C*b* sequebatur priori concolor annulus lucidus, & hi alternis obscuri, lucidique annuli intervallis C*d*, C*e* &c plurimi se se excipiebant. At cum Newtonus trans vitra aspiceret lucem incidentem, non exciperet reflexam; eæ partes, quæ reflexione obscuræ apparebant, transmissu coloratæ videbantur, & ex opposito orbes illi, qui prius colorati cernebantur, nunc erant nigri.

42. Quando mutabatur color lucis, atque loco radii v. g. rubri immittebatur viridis, annulorum non modo color mutabatur in viridem, sed etiam eorum diametri aliæ erant, atque id in omni colorum specie accidebat.

Eodem modo alia erat annulorum amplitudo, ut mutabatur obliquitas radiorum incidentium. Præterea quando superficies convexa vitri magis apprimebatur planæ, annuli semper una cum macula obscura, quæ medium occupabat locum, majores fiebant. Tandem dum non certi generis radii, sed alba lux incidebat, annuli diversorum colorum videbantur, ita, ut idem annulus incipiendo ab interiore peripheria

ripheria usque ad extimam plurium esset colorum, neque horum ordo in singulis esset constans, & tum quidem lucidis non interjiciebantur obscura intervalla, sed macula tantummodo in medio fortiore vitrorum compressione efficiebatur.

Erat adhuc inquirendum, utrum iidem manerent annuli, si intra superficies vitrorum, qua parte se se non contingebant, aliud medium, quam aer, comprehenderetur. Quapropter oras vitrorum madefecit, & illico aqua se se circumquaque interposuit, attracta versus centrum, usque ad maculam mediam. At tum colores omnes erant notabiliter dilutiores, & annuli multum contrahebantur.

43. Ex hisce facile collegerat Newtonus, dum vitra singulis collustrabantur coloribus, per spatia ab annulis coloratis occupata lumen reflecti; per illa vero, quæ cernebantur obscura, transmitti.

Secundo inferebat, reflexionem hanc non posse adscribi vitro, sed laminæ aereæ a vitris interceptæ, alias enim aqua interjecta nulla fieri potuisset in annulis mutatio. *Tertio* non eandem crassitudinem laminæ aereæ aptam esse reflectendis radiis v. g. cæruleis, quæ apta est reflectendis rubris: quippe primus annulus cæruleus minor erat primo rubro, secundus cæruleus secundo rubro, & sic deinceps. Atqui in minore distantia a puncto contactus vitrorum minor erat laminæ aereæ crassitudo, major in majore. *Quarto* multiplum aliquod crassitudinis certæ posse rursus ejusdem coloris radiis reflectendis esse aptum, quibus apta est simpla crassitudo: etenim erant plures ejusdem coloris annuli, & singuli efficiebantur reflexione aeris, cujus crassitudo semper augebatur recessu a centro vitrorum. *Quinto* ad certi coloris radios reflectendos, quando incidunt sub certo angulo, vel perpendiculariter, necessariam crassitudinem aeris non esse eandem cum illa, quæ requiritur, quando oblique, vel sub alio angulo incidunt; & quidem quo major est obliquitas, eo majorem requiri crassitudinem. Idem dicendum de harum crassitudinum multiplis. *Sexto* quando angulus est idem, idemque genus radiorum, crassitudinem lamellæ reflectentis in diversis mediis esse diversam. Sic quia interposita aqua contrahebantur annuli, necesse est, ut tenuior lamella aquæ effecerit primum annulum, quam fuerit lamella aeris, ex qua habebatur antea annulus primus latior. *Septimo* quod hic dictum est de reflexione, intelligi oportere etiam de transmissione. *Octavo* nullum amplius observari colorem, vel annulum obscurum, quando laminæ reflectentes, vel transmittentes lucem crassitudinis majoris evadunt.

44. Supererat jam, ut debitæ dimensiones haberentur crassitudinem lamellarum, quæ radios vel reflectebant, vel transmittebant, ad quas determinandas hæc se se via Newtono aperiebat.

Repræsentet MCN sectionem vitri convexi, OCP plani, transeuntem per axem lentis QC, C punctum contactus (fig. 19. Tab. II.). Fig. 19. Tab. II.
Sint C*a*, C*c*, C*e* &c radii annulorum, qua parte erant lucidissimi, vel

vero ſint radii annulorum obſcurorum, ubi maxime nigreſcebant. Manifeſtum eſt, craſſitudines aeris ſingulis correſpodentes *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, &c eſſe ſinus verſos arcuum *Ca*, *Cc*, *Ce*, *Cg*, &c, quos ipſos dimenſus eſt. Cum igitur nota fuerit diameter ſphæræ, ad quam lens tornata fuit, habebat hoc ipſo ſinus eorum verſos. Eodem modo innoteſcebat craſſitudo lamellarum aeris certi coloris radios transmittentium, quamquam hac in re opus fuit, ut haberetur ratio refractionis, quæ fiebat in radiis per ſuperficiem planam QN ad oculum venientium, & quæ refractio mutabat ſitum punctorum *a*, *c*, *e*, *g* &c apparentem. Hujusmodi dimenſionibus accurate captis, ceterisque rite ſubductis calculis, reperit Newtonus, radios, qui in confiniis flavi coloris, & aurantii ſunt, requirere intervallum, ſeu craſſitudinem lamellæ aereæ (dum perpendiculariter incidunt) æqualem $\frac{1}{178000}$ unciæ, ut per primam ejus ſuperficiem ingreſſi a ſecunda reflectantur; ut autem transmittantur etiam per ſecundam ſuperficiem, debere eſſe craſſitudinem duplam nempe $\frac{1}{89000}$ unciæ. Eodem modo pro radiorum extremorum violaceorum reflexione requiritur craſſitudo fere $\frac{1}{250180}$ unciæ, pro transmiſſione dupla. Quod ſi igitur lamella ſit triplæ craſſitudinis, v. g. $\frac{3}{178000}$, lux flava reflectetur; ſi $\frac{4}{178000}$, transmittetur &c. At quando in aere profunditas lamellæ ſit $\frac{77}{1000000}$, in aqua $\frac{58}{1000000}$, in vitro $\frac{50}{1000000}$, jam nullus color fere ex integro vel reflectitur vel transmittitur, quæ craſſitudo fere 20^{es} continet craſſitudinem lamellæ neceſſariam ad reflexionem lucis violaceæ.

45. Ex his principiis reſolvitur etiam ſequens problema: *data craſſitudine lamellæ, & angulo incidentiæ, nec non ratione ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; invenire colorem lamellæ*, quæ conditiones cum in multis corporibus notæ ſint, patet fructus pulcherrimus hujus inventi. Etenim uti hæc intervalla determinata ſunt pro radiis diverſi generis perpendiculariter incidentibus, ita determinata quoque ſunt pro variis angulis incidentiæ; ſuntque pro obliquitate paullo majora, ita, ut licet via obliqua longior ſit perpendiculari, hæc tamen majorem vicium alternarum numerum contineat, quam obliqua. Sed nobis hæc generatim indicaſſe ſatis eſt. Ex quibus etiam illud intelligitur, quod Num. 42 ultimo loco attulimus, nempe luce alba incidente debuiſſe non modo (dempta media macula) nullum apparere annulum obſcurum, ſed in ſingulis annulis colorum ſeries definitas ab

inte-

interiore usque ad exteriorem peripheriam, quæ jam interior respectu sequentis annuli erat: utpote laminæ aereæ crassitudine usque crescente, reflectebantur ibi certi colores, ubi luce homogenea, v. g. flava, incidente videbatur color niger, qui requirebant pro reflexione paullo majorem crassitudinem, quam esset lamellæ in annulo præcedente flavo. Et quoniam innumeri crassitudinum gradus succedebant, habebantur quoque ejusmodi, qui diversa multipla intervallorum plurium colorum ad reflexionem necessaria continebant, ut proinde etiam colores mixti orirentur, v. g. dum tanta fuit crassitudo, ut tria intervalla unius, & prope quinque alterius minora contineret. Quod autem diximus de hisce crassitudinibus, non ita rigide sumi debet, ut summa æqualitas requiratur: satis est, si intervalla ad hujusmodi dimensiones proxime accedant, ut patebit e sequentibus.

46. Quæstio hic jam oritur, quænam sit affectio in luce, ut post certa intervalla decursa in eodem medio, facilius reflectatur, post alia facilius transmittatur (id quippe intelligimus nomine vicium alternarum facilioris reflexionis, & facilioris transmissus), & quæ ceteris phænomenis expositis faciat satis? Fateor lubens, nil nisi conjecturas hic dari posse; placet autem præ ceteris illa oppinio, quam R. P. *Boscovich* in *Differt. de Lum. Part.* 2. & in *Philos. Nat. Theor.* a N. 490. edit. Vien adfert, scilicet, uti jam diximus, esse in diversis luminis particulis diversi coloris impressionem facientibus præter exiguum velocitatis discrimen, aliud magis notabile, e compositione & combinatione virium ortum. Jam cum talis molecula non tota momento ad illos limites repulsivos in corpore lucente veniat, per quos tanta velocitate excutitur, partes jam limites illos paullum prætergressæ retardari debent mutuo nexu ab illis, quæ nondum limites attigerunt: postquam vero hæ posteriores maximam velocitatem acquisiverunt, priores ab hisce rursus accelerantur, quæ reactione iterum illarum motum aliquantum retardant, ut consequenter oscillationes quædam, & excursus partium anteriorum, & posteriorum, longiores, brevioresve pro virium habitudine in diversis moleculis lucis oriantur. Jam lucis motu æquabili existente, cum ejusmodi oscillatio, & figuræ reciprocatio definito fiat tempusculo, pariter in eodem medio a particula totali interea definitum percurri spatium debet; igitur ut post certa intervalla ejusmodi peragatur oscillatio, necesse est, quæ intervalla in diversis particulis diversa esse debebunt.

Dein oportet, ut alia sit summa virium in alia particularum moleculam lucis componentium dispositione. Quapropter fiet, ut dum in una dispositione ad diversum medium advenit, magis attrahatur, ac proinde facilius transmittatur quam dum medium attingit cum altera dipositione. Jam, ut in excursu pendulorum contingit, in quibus corpora oscillantia circa limites lentissime moventur, & plus temporis insumunt, quam circa medium, ubi maxima aguntur velocitate, ita probabile est, in utrovis

 reci-

reciprocationis figuræ limite moram haberi longiorem, quam ubi particula in medio quodam ſtatu eſt, & illi figuræ proxima, quam haberet, ſi oſcillatio abeſſet. Et probabile quoque eſt in diverſo hoc virium genere moram in limitibus eſſe reſpective multo longiorem, quam ſit apparens illa mora penduli circa terminos excurſuum alternorum. Liquet autem ſimiliter, in medio illo ſtatu, qui omnium breviſſime durat, virium ſummam poſſe plurimum diſcrepare ab illa, quæ habetur in maximis, & oppoſitis mutationibus particulæ lucis per oſcillationem inductis.

47. His poſitis, ratio intelligi poteſt, cur *primo* intervallum, ſeu craſſituto lamellarum reflectentium in eodem medio pro diverſis radiis perpendiculariter incidentibus debeat eſſe diverſa, quod nempe poſt majora, vel minora ſpatia decurſa extremæ diſpoſitiones redeant in diverſis particulis. *Secundo* cur alia ſit magnitudo intervallorum pro iisdem radiis, quando eſt diverſa obliquitas. Nam ex diverſa obliquitate ſit alia combinatio virium totalium particulæ cum viribus medii, cum ſit alius ſitus particularum moleculam lucis conſtituentium reſpectu particularum medii. *Tertio* cur eadem intervalla mutentur pro diverſitate medii in eodem lucis genere, quippe cum medii diverſitas inducat in particulam lucis aliam actionem. *Quarto* cum ejusdem magnitudinis vices in egreſſu v. g. e vitro in aerem redeant, quæ erant in aere ante ingreſſum in vitrum: quia ſcilicet vitrum velocitatem ad ejus ſuperficiem parallelam non mutavit, perpendicularem autem, uti jam expoſuimus, quantum in ingreſſu auxit, tantum in egreſſu imminuit, ut proinde eadem reſtituta ſit celeritas abſoluta, quæ prius habebatur. Præterea oſcillatio contracta per vires vitri, moleculæ lucis extrinſecas, reſtitui poſt egreſſum debet. Animadvertendum enim, per vitrum non mutari vires particulæ, quibus ad oſcillandum impellitur, ſed tantum effectum earum aliquem impediri; unde cum rurſus ad aerem ventum fuerit, prioribus viribus extrinſecis agentibus eædem vires internæ particulæ lucis eundem effectum habere debent. Aliud foret, ſi ipſæ vires mutarentur. Rem hanc ſequenti exemplo declarare licet. Si globulum plumbeum e filo ſuſpenſum impulſu in latus oſcillare facias in aere, & dein ita jam oſcillantem immergas aquæ, oſcillationes in aqua multo fient contractiores, quam in aere; & ſi denuo globum oſcillantem ex aqua extrahas, quin novum ad oſcillandum impulſum addas, manebunt in aere oſcllationes æque parvæ, ac in aqua, quippe cum extracto globo ex aqua, etſi idem redeat medium, is tamen non incipit oſcillationes per eandem gravitatem reſpectivam, quæ agebat in globum ante immerſionem in aquam. At vero ſi ſumas virgam tenuem, quæ non vi gravitatis ſuæ, ſed per actionem laminæ elaſticæ oſcillet, ejus oſcillationes tam ante immerſionem in aquam, quam poſt eam ejusdem erunt magnitudinis, licet ob majorem reſiſtentiam medii intra aquam aliquantum minuantur. *Quinto*

cur

cur hæc intervallorum viciſſitudo effectum ad diverſos colores reflectendos vel transmittendos habere non poſſit, niſi in laminis admodum tenuibus. Nam non eſt credendum, ejusdem generis radios, exempli cauſa rubros, cum appellunt ad primam ſuperficiem laminæ, eſſe omnes, qui hanc penetrant, in extrema diſpoſitione ad faciliorem transmiſſum; ſed uti eſt immenſa eorum copia, ita aliæ eorum particulæ adveniunt cum hac extrema diſpoſitione, aliæ prope eam, aliæ in medio intervalli inter extremas diſpoſitiones, aliæ prope diſpoſitionem contrariam, aliæ denique in ipſa diſpoſitione reflexionis, Jam, uti diximus, cum circa extremos terminos oſcillatio ſit lentiſſima, maximus numerus earum erit, quæ prope illos terminos adveniunt: unde credibile eſt, ſpectata hac affectione lucis rubræ totidem particulas reflecti debere a prima ſuperficie, quot transmittuntur, etſi poſſint etiam plures transmitti, immo & debeant, quando vires attractivæ ſuperant vim diſpoſitionis contrariæ, ad quam accedunt quædam particulæ. Quod ſi jam craſſitudo lamellæ, ſit exigua, ut intervalla quibus mutantur diſpoſitiones in oppoſitas, pauca in ea contineantur, differentia, qua ab integro aliquo intervallorum numero deficit, vel eundem ſuperat, reſpectu unius integri intervalli erit itidem exigua, ut conſequenter vires mutari debeant; ſi ſint numero pari, vel redire, ſi ſint impari. At quando craſſitudo major eſt, diſcrimen multiplicatur, ut jam non amplius poſſit eſſe parvum reſpectu unius intervalli debiti eidem radiorum generi, ac proinde habebitur eadem inæqualitas in egreſſu, quæ habebatur in ingreſſu, hoc eſt, totidem fere radii reflectentur (hac ſpectata affectione) quod transmittentur. Et quoniam id verum eſt de quovis radiorum genere, nec reflexa, nec transmiſſa lux habebit colorem ſenſibilem in craſſioribus laminis, radiis ſcilicet omnium generum ſufficienter commiſtis. *Sexto* ex hac affectione lucis partem maximam pendet ingens illud diſcrimen quantitatis luminis transmiſſi, & reflexi, prout major, vel minor fuerit angulus obliquitatis lucis incidentis. Sic obſervavit cel. *Bouguerus* (*Opt. de grad. Lum.* L. 2 ſect. 2. Art. 3) ingentem copiam lucis reflecti ab aqua, dum admodum oblique incidit, cum tamen in majoribus angulis, propius accedentibus ad rectum, parum reflectatur, v. g. ſub angulo 25° minus decima parte incidentis. *Ipſe*, inquit, *non nunquam ambigebam, utrum radiorum reflexio e ſuperficie aquæ ſub admodum parvis incidentiæ angulis non vehementior ſit, quam e ſuperficie argenti vivi; omnibus tamen conſideratis ea tantiſper minor reperitur, quanquam valde operoſum exiſtimem illius diſcrimen conſtituere. Id certo conſtat, lumen ex aqua reflexum propemodum tres quartas eſſe luminis directi ſub anguloexiguo incidentis.* Etenim cum in figuræ particularum lucis reciprocatione tantum adeſſe poſſit virium totalium diſcrimen, citius utique multo velocitas perpendicularis, exigua reſpectu velocitatis parallelæ, quando eſt magna obliquitas, extingui poteſt, & vero debet, quam ſub aliis majori-

bus angulis, ubi velocitas perpendicularis ad parallelam majorem habet rationem, uti id clarius etiam fiet, quando de reflexione agemus. Interim hoc loco juverit observare, nos jam monuiſſe, dum de diaphanis corporibus egimus, nobis nullum notum eſſe, quod non magnam lucis vim extinguat, vel abſorbeat, id, quod non modo provenit a deflexione luminis a via cæpta ex inæqualitate virium particularum corporis diaphani, ſed etiam ex contrarietate & oppoſitione virium, quoniam etiam reflexiones plurimæ contingunt intra ipſum corpus diaphanum. Unde corpus erit diaphanum etiam tum, cum vires attractivæ prævalent repulſivis, & refractio peragitur differentia virium. Jam cum alia ſit ſumma virium particulæ lucis, prout fuerit in alia diſpoſitione vicium alternarum, fieri debet quandoque, ut prævaleat in una diſpoſitione lucis vis corporis refringentis altera, & altera in diſpoſitione lucis contraria, atque adeo loco refractionis, & transmiſſionis fiat reflexio, conſequenter ex ſola diverſa inclinatione phænomenon aliud oriatur.

48. Eædem fere colorum alternæ ſeries, quas in vitris leniter appreſſis obſervari diximus, ſe ſe ſpectandas præbent in bulla, quæ ex aqua admiſto ſapone tenaciore reddita inflando fiunt, modo caveatur, ne motu aeris quicquam turbetur, atque adeo in hunc finem dimidia fere bulla incumbat plano cuivis alteri corpori, ut (fig. 20 Tab. II.) exhibet, ut nempe vitro cavo obtegi poſſit. Quemadmodum enim defluens ad ima liquor ſuperne ſemper bullam tenuiorem reddit, ita in vertice macula nigra, circum undique autem annuli colorati apparent, alii aliis ſuccedentes, dum primi latius ſemper ſe ſe explicant.

Fig. 20. Tab. II.

Iisdem alternis vicibus debentur annuli illi, quos Newtonus obſervavit in reflexione ſpeculorum cavorum vitreorum, quando fere e centro cavitatis ſpeculi radius incidit per chartæ perforatæ plagulam. Vide (fig. 21. Tab. II.) Etenim in ipſam chartam reflexum lumen exhibet annulos quam ſimillimos Dux de *Chaulne* (Monum Acad. Pariſ. A. 1755) cum advertiſſet, ſpeculo vitreo halitu oris inducta tenui pellicula eos annulos reddi vivaciores, dein aqua, cui aliquid lactis inſtillavit, oblinivit ſpeculum, quo ejusmodi pelliculam durabilem obtinuit, qua colores annulorum in chartam reflexorum diſtinctius cernerentur. Sciendum autem, hoc phænomenon non adſcribendum eſſe radiis regulariter reflexis, ſed illis, qui irregulari reflexione a ſpeculi vitrei ſecunda ſuperficie remittuntur. Diximus enim, cum mora oſcillationis ſit maxima circa limites, minima in tranſitu per medium ad diſpoſitiones oppoſitas, admodum probabile eſſe, in eo tranſitu pauciſſimos radios appellere ad aliquam ſuperficiem; & cum in hoc ſtatu nec reflexioni, nec transmiſſioni aptiores videantur, debebunt irregulariter vel refringi, vel reflecti, uti reapſe in omni refractione, vel reflexione ejus generis aberrationes obſervamus.

Fig. 21. Tab. II.

Ratiis

Radiis ſimiliter aberrantibus debentur quoque faſciæ quædam, quæ in ejusmodi ſpeculis e luce diurna incidente obſervantur, quando oculus definitam habet eorum reſpectu poſitionem. Verum ipſa phænomenorum copia impedit vel eorum recenſionem. Tum de faſciis, tum de annulis agit *Benvenutus* in diſſert. laudata accurate, ad quem etiam Lectorem remittimus.

49. Sunt quoque corpora quædam diaphana, quæ in luminis refractione ſingulare quid exhibent, uti ſunt Cryſtallus Islandica, & aliæ cryſtalli montanæ, quæ radium album citra colores ſenſibiles in duos quodammodo diſpeſcunt, & ſingulos lege ſibi propria refringunt, ubi etiam multum intereſt, quo cryſtalli plano lux excipiatur. Sunt nempe ejusmodi corpora non modo e laminis tenuibus compoſita, ſed & certam affectant figuram, ſi totam eorum maſſam ſpectes; e quo probabilis admodum conjectura ducitur, ſimile quid fieri in particulis minoribus, ut nempe etiam hæ convenientem ſibi figuram affectent, quæ diverſas vires in diverſis habeat lateribus, ideoque mira oriatur actionum in lucem diverſitas, ut ejusdem generis particulæ luminis, quæ reſpectu unius lateris ſunt in diſpoſitione facilioris reflexionis, eſſe poſſint reſpectu alterius in diſpoſitione facilioris transmiſſus. Cryſtalli Islandicæ deſcriptionem ſatis claram Lector apud Newtonum in Optica reperiet. Nobis ſcitu magis neceſſaria ſunt pertractanda.

ARTICULUS V.

De reflexione Luminis, & Corporibus Specularibus.

50. Quando radius lucis in ſuperficiem politam ſpeculi, velut AI in CD (fig. 22. Tab. II.) incidit, conſtante experientia teſte Fig. 22. Tab. II. ita per IB reflectitur, ut angulus PIA incidentiæ ſit æqualis angulo reflexionis PIB, & præterea radius incidens AI, & reflexus IB ſit in eodem plano ad ſuperficiem CD normali, in quo eſt perpendiculum PI. Simile quid videmus fieri etiam in corporibus majoribus vel elaſticis in corpus alterum elaſticum, vel duris in elaſticum, vel elaſticis in durum incurrentibus. Etenim cum motus AI in duos per leges Mechanices AP, & PI reſolvatur, pars ea, quam AP exhibet, etiam poſt incurſum perſtat; at altera ad CD normalis, vi impactus extinguitur quidem, actione tamen partium (ſaltem ſi corpus alterum ſit perfecte elaſticum) in ſitum priſtinum ſe reſtituentium mox recuperatur cum directione oppoſita, quæ proinde cum AP perdurante, ſeu ID, compoſita efficit motum per IB. Hinc plurimi Philoſophi exiſtimarunt, eadem principia ad lucis reflexionem ſatis eſſe, ejusque particulas elaſticas, vel duras in ſuperficiem elaſticam incurrentes ſub æquali reſilire angulo, quippe

pe qui tam perfectam lævigationem sibi in superficiebus corporum specularium effinxerant, ut exiles illi sulci, fossulæque, ac eminentes asperitates nihil officere possent. At si summam tenuitatem lucis perpendamus, facile animadvertemus cum Newtono, utcunque polita, ac lævia appareant corpora, asperitates, quas microscopia in iis nobis detegunt, esse ingentes, ob quas non magis regularis reflexio haberi posset, quam si quis minutissimæ arenulæ granum versus acervum lapidum temere congestorum projiceret.

51. At vero si admittamus, uti in refractione, sic & hic vires ad superficiem perpendiculariter agentes, quæ ad aliquam, exiguam licet, ultra superficiem distantiam pertineant, radiorum plurimorum regularem reflexionem citra negotium explicabimus. Potest autem virium genus vel esse simplex, vel compositum, quantum quidem ad reflexionem corporum, quæ specularia dicimus, hoc est, possunt esse vel vires repulsivæ tantummodo, ex definita molecularum combinatione ortæ, vel vires partim attractivæ, partim repulsivæ, ita tamen, ut dominentur postremæ, atque harum excessui supra illas tribuatur præsens effectus. Si corpora haberemus ex integro homogenea, quorum partes æqualibus viribus repulsivis præditæ essent, atque polituram admitterent, haberemus specula perfecta, quale nemo adhuc vidit. Specula nostra non modo multos radios irregulariter dispergunt, sed & absorbent, & intra se se admittunt. Unde verius videtur, in iis prævalere repulsionem, atque attractionem aliquam esse.

Fig. 14. Tab. II. Sit itaque ejusmodi corpus SN*ns* (fig. 14. Tab. II), cujus excessus virium repulsivarum supra attractivas se se porrigat usque ad lineam LM superficiei parallelam. Incidat particula lucis directione OP, cujus velocitas perpendicularis OT, postquam ad P pervenerit, per vires corporis contraria directione agentes continuo minuetur, & cum non opponantur directioni TP ad superficiem parallelæ, hæc velocitas nullam subibit mutationem. Quare necesse est, ut particula ultra P progressa describat curvam, quæ convexitatem corpori SN obvertat, atque perpetuo magis flectatur, donec ad Q acquirat directionem superficiei parallelam, velocitate perpendiculari penitus extincta. Sed, uti diximus de refractione, actione continua corporis, & perdurante celeritate TP, ultra Q describetur alter curvæ ramus, priori prorsus æqualis, & flexibus iisdem, per quem particula lucis iisdem gradibus amissam perpendicularem velocitatem recuperat, atque inde per *po* evolat. Sunt autem OP, *op* tangentes punctorum curvæ a vertice Q, & axe QK æqualiter distantium, ramique QP, Q*p*, æquales; igitur axem productum in eodem puncto H eæ tangentes secant, fientque anguli KHO, KH*o* omnino æquales, quos facere videntur radius incidens, & reflexus, qui etiam in eodem plano cum KH erunt. Et quoniam totum intervallum inter LM, SN tam exiguum est, ut aciem oculi fugiat, radius videbitur in puncto superficiei speculi reflexus fuisse, in quo a KH secatur.

52.

52. Si naturam corporum, minimasque eorum partes perspectas haberemus, atque modum, quo moleculæ inter se se nectuntur, facile esset rationem reddere, cur in regulari reflexione non fiat ejusmodi sensibilis separatio lucis heterogeneæ in diversos coloratos radios, ut in refractione: nil enim aliud mutationis observare licet in radio reflexo, nisi quod aliquantulum dilatatus appareat; sed quoniam res tam exiguæ aspectui, & examini propiori subducuntur penitus, e phænomenis tantummodo inferre licet, hanc virium speciem non eodem modo repellendo agere in lucem, ac alterum virium genus agit attrahendo.

Illud etiam facile colligitur, hanc affectionem corporum, qua lumini reflectendo apta sunt, non pendere a definito densitatis, vel raritatis gradu, neque a nexu partium mutuo, quo solida, ac firma redduntur; sed corpora reflectentia dari posse omnis generis, ex quibus tamen *specularia* illa tantummodo vocamus, quæ non modo maximam luminis partem reflectunt, sed etiam ita lævia sunt, ut inæqualitas, atque asperitas superficiei, etsi ingens, si comparetur subtilitati lucis, parva tamen sit, si conferatur cum spatio, ad quod actio corporis totalis se se extendit. Jam vero hoc spatium saltem centesimam sexagesimam partem pollicis exæquat, uti colligitur e lucis diffractione, & mensuris a Newtono captis, quoniam si acies duarum laminarum hoc intervallo a se se distent, luce inter eas transmissa, circa medium umbra advertitur, radiis omnibus a via detortis. Sed procul dubio in multis corporibus majus erit hoc intervallum; neque enim in diffractione limites satis accurate discerni possunt.

53. Quemadmodum vero ingens discrimen observatur in transmissu luminis per corpora diaphana, quando diversa est incidentium radiorum obliquitas, ita non minus notatur in speculis diversis. Dum angulus obliquitatis erat 15 graduum, speculum vitreum, cujus postica superficies argento vivo tegebatur, eam reflectebat luminis copiam, quæ proxime esset ad incidentem, ut 628 ad 1000; metallicum probe politum vero paullo plus radiorum extinguebat, ut ratio reflexorum ad incidentes fere fuerit 56 ad 100. sed angulo a recto differente tribus fere gradibus, speculum idem vitreum partem lucis videbatur reflectere, quæ se se haberet ad incidentem, ut 7 ad 10; at vero aliquanto majorem metallicum, uti observavit D. *Bouguer Optic. de divers. lum. Grad. Lib.* 1 *Sect.* 1. *Art.* 2. Nec vero ratio obscura esse potest, si naturam vicium alternarum in luce, & aliquam heterogeneitatem in speculis perpendamus, quæ non omnino carent partibus attrahentibus, sed majorem partem constant ita inter se se permistis, ut repellentes prævaleant. Itaque fieri debebit, ut sub magis obliquis angulis advenientes particulæ, quæ sunt prope extremam dispositionem facilioris transmissus, magis experiantur attractionem, quam repulsionem, ideoque absorbeantur. Et quoniam etiam in perpendiculari incidentia non nullæ adveniunt in ipsa extrema ad transmissum dispositione,

tione, has abſorberi conveniet, uti & illas ſine lege diſpergi, quæ in ipſo tranſitus medio ab altera ad alteram diſpoſitionem appellunt.

54. Eſt & aliud quoddam reflexionis genus, quod pariter citra ſeparationem in colores ſenſibiles peragitur, & attractioni potius adſcribendum eſt. Si (fig. 23. Tab. II.) lux directione AB ad priſmatis planum ST, cujus ſectionem STV ad axem perpendicularem figura exhibet, fere perpendiculariter, ſed ſatis oblique ad planum SV incidat, citra ſenſibilem refractionem per ST tranſmiſſa ex C verſus D reflectitur; unde ſi per D egreſſa fere ſine refractione excipiatur ab oculo ad E conſtituto, apparebit ſpatium C utcunque magnum inſtar ſpeculi, nec ullum corpus infra SV poſitum videri poterit, quod nempe copia lucis reflexæ ab SV paucos illos radios, qui forte ex ſpatio infra SV ad E perveniunt, reddat prorſus inſenſibiles. At vero ſi ſpatium C madefiat, vel aliud vitrum ſuperficiei SV fortiter apprimatur, jam evadet pars contactus, aut madefacta pellucida, ut & corpora infra SV poſita per illud ſpatium cerni poſſint. Evidens itaque eſt, plurimum lucis a ſuperficie SV reflecti, quæ res certe nulli alteri cauſæ adſcribi poteſt, niſi quod radii per C egreſſuri fortius attrahantur a vitro, quam a contiguo aere, in quem emergere deberent. Etenim ſi radius AB (fig. 24. Tab. II.) per planum CF vitrum ingreſſus refringatur ad BI, ut per I valde oblique emergat in aerem, attractio vitri per arcum IL velocitatem lucis perpendicularem facile extinguet, deſcribetque particula alterum ramum LH, ubi rurſus ingredietur vitrum ad H, ac refringetur ad K, & ſi angulus non ſit nimis obliquus, directione KM exibit. Si jam ad ſpatium IH ſuperficiei FD apponatur vel aliud vitrum, vel aqua, hæc multo fortius attrahet radium IL, quam aer; unde conſpirante hac attractione cum velocitate perpendiculari lucis, vincetur attractio corporis CD, neque radius amplius redire poterit per LH.

Fig. 23. Tab. II.

Fig. 24. Tab. II.

55. Hujusmodi reflexio totius fere lucis incidentis ſemper continget, quando radii e medio denſiore in rarius exire deberent tam oblique, ut ſinus refractionis evaderet major ſinu toto. Unde data ratione ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis pro certo quovis corpore facile definitur angulus incidentiæ in medium rarius, ſub quo vel tranſmitti, vel reflecti debeant radii. Sic quia ſinus incidentiæ eſt ad ſinum refractionis, quando lumen exit e vitro in aerem, proxime ut 20 ad 31, ſi fiat $20 : 31 = x : 100000$, eſt $x = 64516 =$ ſinui anguli paullo majoris 40° 10′; hinc jam nullus radius exit e vitro in aerem, quando angulus incidentiæ ſit notabiliter major, quam ſit allatus.

Atque ex hac re pendet aliud phænomenon, quod priſma circa diverſos colores lucis exhibet. Si radius albus AK (fig. 25. Tab. II.) incidat in priſma GFE, ut ab initio lux per D tranſmittatur, in tabula TS exhibebitur ſpectrum coloratum VR, radiis ſupremis violaceis, infimis ad R rubris. Sed ſi dein priſma lente circa axem ſuum convertatur

Fig. 25. Tab. II.

tatur, disparere incipient successive colores in illo spectro VR, & quidem primo disparebit color violaceus, tum indicus, post cæruleus, viridis, flavus, aurantius, ac tandem ruber. Nempe sinus refractionis violaceorum radiorum in egressu e vitro in aerem paullo major est, quam in reliquis coloribus; unde aucta obliquitate plani GE, hoc genus radiorum primum pertingit ad illum angulum incidentiæ, sub quo sinus refractionis major esse deberet sinu toto; quare tum egredi non poterunt, sed reflectentur. Idem fiet successive radiis ceteris. Unde infertur, hoc genere reflexionis radios magis refrangibiles esse simul magis reflexibiles. Quod autem radii, qui ad V, I, C &c successive disparent, reapse reflectantur, facile est ostendere: nam adhibita alia tabula *ts* prismatis plano GF oblique opposita, in ea ad *v*, *i*, *c*, *v*, *f* &c alter color post alterum apparet, eodem ordine, quo in priore tabula TS disparent, donec totum spectrum ex VR in *vr* transferatur.

56. Ceterum observet tiro, nos in corporibus specularibus requirere aut vires repulsivas, aut saltem harum excessum supra attractivas non alia de causa, quam ut explicetur regularis reflexio plurimorum radiorum incidentium, quo tamen haud negamus, etiam multorum radiorum aberrationem pendere non solum ex diversitate dispositionum particularum in alternis illis vicibus, verum etiam a defectu exactæ politturæ, & superficiei asperitatibus. Neque tamen generatim dici potest, vel concipi animo, quod si (fig. 26. Tab. II.) aspera superficies exhibeatur per ABCDEF &c, consimilem limitem *abcd ef* &c habituræ sint actiones corporis reflectentis, utpote cum ad æque magnum intervallum se se extendat actio partis B, ad quod porrigitur alterius C vis, ideoque inter *b* & *d* æque magnus hiatus futurus sit *bcd*, ac inter BCD. Nam imprimis non omnino fingi potest summa homogeneitas in particulis corporis reflectentis, ut æqualitas accurata omnium virium consequatur, & possunt multæ particulæ ad B, D &c collocatæ habere vires minores, quam aliæ ad C, E &c positæ. Deinde intervallum, ad quod se se extendit actio totalis superficiei, non modo multo majus est, quam sit magnitudo asperitatum in corpore probe expolito (utpote cum pars illa $\frac{1}{160}$, quam N. 52 assignavimus, unciæ, utique oculis facile cerneretur, si eam asperitates exæquarent, & sane corpus rudius appareret politum), verum etiam multo alio limite terminari debet, quam sit limes intervallorum, ad quæ singulæ tantummodo particulæ agunt. Unde poterit ad sensum esse ille rectilineus, velut LM, dum hic *abcd* &c admodum sinuosus est. Quod si tamen ponas, majores adhuc in corpore asperitates adesse, tum vero negabo corpus illud satis lævigatum esse, ut non multi radii etiam ex hac causa irregulariter reflectantur.

Fig. 26. Tab. II.

ARTICULUS VI.

De Corporibus Opacis, Semiopacis, nonnullis Phoſphoris, & diffractione Luminis.

57. Corpora opaca dicimus, quæ lumen ſenſibiliter non transmittunt, ſed colluſtrata vel in quavis oculi poſitione eundem colorem exhibent, vel ſitu oculi mutato alterius apparent coloris. Si quid eſt in inductione efficacitatis, facile nobis perſuadebimus, partes minores horum corporum eſſe pellucidas, quando ut id evidens fiat in plurimis corporibus, opus tantummodo eſt, ut lamellas eorum, avulſosque flocculos microſcopiis conſpiciamus. Ligna plurima, flores, oſſa, plumæ, pili animalium, lapides non modo ad gemmas pertinentes, ſed etiam marmora &c vel ſola ſciſſione ad eam tenuitatem redigi poſſunt, ut pelluceant.

Laminæ metallicæ etſi adhuc opacæ videantur, jam tamen incipiunt aliquid lucis transmittere, modo ſatis ſint tenues: ſed demum menſtruis Chemicorum ſolutæ ita ſalibus permiſcentur, ut corpus cum iis conſtituant, in quo nullam microſcopio ullo particulam opacam deprehendas, uti manifeſtum eſt in variorum vitriolorum cryſtallis, ſi ſatis puræ a craſſioribus fæcibus examini ſubjiciantur. Quod ſi itaque eam legem Philoſophandi æquum videatur ſequi, ut naturam in rerum conſtituendis principiis ſimplicem admodum, & quodammodo parcam arbitremur, liberalem autem, ac velut combinationum prodigam, e quibus tanta varietas in hac rerum Univerſitate exiſtat, procul dubio nullum aliud inter opaca, & diaphana corpora ſtatuendum erit diſcrimen, quam quod e textu, ordine, combinatione oriatur.

58. Revocentur paulliſper ad animum, quæ de natura vicium alternarum facilioris transmiſſus, & reflexionis attulimus, & cogitentur in corpore lamellæ admodum tenues, ſed ita diſpoſitæ, ut virium ingens ſit diſcrimen, ſeu ob admodum diverſas particulas inter ſeſe commiſtas, ſeu ob majuſcula intervalla penitus vacua relicta. Fiet tum quidem, ut lux omnis generis ex ipſa ſuperficie reflectatur ſub quovis angulo, adeoque in tanta reflexionum varietate, ac lamellarum diverſitate radii omnis coloris ad ſenſum æquabiliter ſub quovis angulo permiſceantur, hoc eſt, ut corpus album appareat. Sed radii, qui ultra priores lamellas progreſſi, quod in appulſu ad earum poſticam ſuperficiem in diſpoſitione transmiſſus fuerint, inæqualitate virium interjectarum partium infinitis flexibus ita detorquebuntur a via, ut per immenſas ambages errantes alii ex aliis ſuperficiei partibus ſatis magno temporis diſcrimine, & directione qualibet tandem emergant, nun-

nunquam vero majore copia ſimul, atque æquali directione: quare corpus opacum ſimul erit.

59. Quod ſi ſumma concipiatur lamellarum tenuitas, ut in earum trajectu lucis particulæ vices diſpoſitionum non mutent, vel vero tanta craſſitudo, ut citra coloris ſenſibilem mutationem pellucidæ ſimul maneant, ſed multo adhuc majus intra corpus virium diſcrimen adſit, ut lux majoribus ambagibus corporis viſcera quodammodo pererrans, tardior, rariorque emergat irregulariter; corpus nigrum erit. Hoc enim caſu ne quidem e lamellis ſuperficiem conſtituentibus ſufficiens radiorum copia ſimul reflectetur, quæ impreſſionem vehementiorem in oculos efficiat. Verum ut innumera ſunt combinationum genera, ita gradus nigredinis diverſiſſimus eſſe poteſt.

60. At ponamus manere quidem virium internarum inæqualitatem, qua radii ultra ſuperficiem progreſſi detorquentur, laminarum tamen tenuium eſſe minorem varietatem, atque majorem earum numerum ad illas pertinere, quarum craſſitudo certi coloris vicibus alternis reſpondeat. Tum quidem e ſuperficie plurimi reflectentur radii definitæ ſpeciei, multis adhuc aliis admiſtis ſpecierum aliarum, quibus tamen illi efficacius agent, certique coloris impreſſionem facient, ut proinde corpora opaca cujuslibet coloris pro lamellarum diverſitate haberi poſſint. Equidem nullum habemus corpus coloratum, quod non ſimul omnium colorum reflectat radios, quandoquidem corpora rubra, ſi luci viridi ope prismatis ſeparatæ exponantur, viridia apparent; ſi cæruleæ, cærulea &c, quamvis color ille viridis, vel cæruleus minus ſit elegans, & nitidus, quam ſit ruber, ſi radios rubros e priſmate excipiant, qui omnium videtur maxime illuſtris. Idem eſt de aliis.

61. Verum eſt quoddam, ut diximus, inter opaca corpora diſcrimen: alia namque conſtanter ejuſdem videntur coloris, ſub quocunque angulo lux incidat; alia ut diverſa eſt poſitio oculi, ita colorem quoque alium intuenti exhibent. Ad hoc diſcrimen plurimum conferet diverſus textus partium, cujus ut ideam aliquam accuratiorem nobis effingamus, ponamus (fig. 27. Tab. II.) laminam tenuem ABCD Fig. 27. Tab. II.
cingi undique medio valde raro, cujus comparatione magnam habeat denſitatem. Sit ad ejus ſuperficiem PIOQ perpendicularis, atque IO ejus craſſitudinis, ut certi coloris radii ad I ingreſſi, quando ad O veniunt, mutent vicem diſpoſitionis; atque idem contingat radiis per O ingreſſis, quando ad I appellunt. Incidant ejuſdem ſortis radii FI, MI; refringentur ex legibus communibus eo magis verſus perpendiculum directionibus IL, IG, quo majorem ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis habuerit rationem, ut proinde longitudo IL, IG parum ab IO differre poſſit. Conſtat quoque ex obſervatontibus Newtoni, intervalla vicium ſingula in IL, IG ita mutari, ut habita ratione exceſſus longitudinis IL ſupra IO, pauciora contineantur in IL, quam IO, in IG item, quam in IL; ſed quoniam exiguum eſt diſcrimen ipſa-

 rum

rum IO, IL, IG, etiam perparum possunt intervalla in IG differre ab intervallis in IO, consequenter seu lux per IO, seu per IG vel IL appellat ad superficiem DC, erit proxime in eadem dispositione, in qua est in O, dum perpendiculariter incidit. E quo evidens est, seu oculo ad P posito lux fere ad perpendiculum reflectatur, seu illo ad H, vel N collocato reflectatur oblique ex L vel G, laminam apparituram ejusdem coloris, qui proinde in corporibus hujus conditionis non ita facile ratione obliquitatis mutabitur, sed constans manebit, quacunque demum ex parte aspiciatur.

Fig. 28. Tab. II. Ex opposito si (fig. 28. Tab. II.) cogitetur lamella ABCD ambiri medio densiore, ut radii incidentes FI, MI refringantur a perpendiculo in IL, IG, spatia IL, IG, utpote secantes majorum angulorum OIL, OIG, jam notabiliter different a sinu toto IO, ac propterea numerus intervallorum minorum in IO alius est, ac numerus intervallorum majorum in IL, vel IG; quare si radii perpendiculares IO fuerint in O in dispositione reflexionis, obliqui IL, IG ejusdem speciei erunt in vice transmissus; verum erunt alterius generis radii, qui versus L vel G refracti, veniant ad dispositionem reflexionis, consequenter alii videbuntur colores reflexi, quando lux oblique incidit; alii, quando perpendiculariter. Et hæc quidem diversitas, ut colores constantiores sint in lamellis densis intra medium rarius, & magis mutabiles in lamellis raris intra medium densius, mirum in modum augeri adhuc poterit ab ipsa figura superficiei, quam, ut aliquomodo discrimen indicaremus, interea planam assumpsimus.

62. Quod inæqualitas virium in partibus internis corporum maxima opacitatis causa sit, & earundem æquabilitas pelluciditatis, innumeris pene exemplis illustrari posset. Sic corpora diaphana si in pulveres conterantur, ut multa inania spatia inter solidas partes intercipiant, opaca redduntur, uti vitrum, aqua spumescens &c; quin sola partium majorum separatio efficit, ut lucis transmissio impediatur, ut experimur in densis pluviis, ubi guttatim spargitur aqua, quæ si collecta esset, sane haud ita illos cœli tractus obscuros redderet, quorum aspectum pluviæ eripiunt. Sic multa corpora, ubi ad ignem fluunt, v. g. cera, sebum, satis pellucent, eorum moleculis majorem extensionem nactis; sed dum refrigerata densantur, relictis majoribus vacuis opaca fiunt. Ex opposito charta, tela, & consimilia multa, oleo, vel aqua tincta fere semipellucida videntur, quod nempe interstitiis interpositus liquor impediat vacua, viresque ad majorem æquabilitatem reducat.

63. Ex iis, quæ diximus, intelligetur facile, cur quædam corpora sint semiopaca, in quibus scilicet est minor virium internarum æquabilitas, quam in diaphanis, major tamen, quam in opacis. Unde & lucis aliquid certa directione simul emergentis transmittent, aliquid intercipient. Quin etiam reddetur ratio, cur gemmæ fere omnes

(uti

(uti summa industria observavit *Beccarius*) luci solari expositæ, dein in tenebris conspectæ, aliquo tempusculo lucem reddere videantur, hoc est, species phosphororum sint: scilicet oculus tenui impressioni percipiendæ aptus videt tum etiam illam lucem, quæ post multos, longosque errores paullatim emergit. Verum notatur id longe evidentius in lapide Bononiensi, qui calcinatione ad id præparari debet, hancque affectionem sat longo tempore conservat, si debite custodiatur. Demum velut generale corollarium sequitur, omnia ea corpora colorem mutare, quæ partium vires internas notabiliter mutant. Videmus liquores quosdam vitrioli injectu atros fieri, uti aqua, in qua galæ solutæ sunt: ejus enim admistu summa inducitur inæqualitas virium. Sic quoque aqua rubra, in qua lignum Brasilum maceratum est, instillatione liquoris acidi fit flava. Sic innumeræ aliæ mutationes fiunt diversorum corporum admistione, qua partes corporis mutentur. Calor etiam subinde efficit, ut latentes intra poros particulæ in superficiem prodeant, coloremque alium inducant. Notum est, ac pervulgatum illud, quod liquor rubeus, qui obtinetur, si Bismuthum aqua forti solutum affundatur sali, quo ad cibos condiendos utimur, atque inde abstracto per ignem lenem humore relictus sal cæruleus in aqua pura solvatur, notum inquam, est, quod hic liquor vix sensibili colore tingat chartam, & siquidem exsiccetur, nullum ejus apparet vestigium. At si charta eo semel imbuta in loco calidiore teneatur, aut quavis demum ratione calefiat, viridis apparet. Ceterum, uti de corporibus diaphanis diximus, ita nunc quoque monemus, hasce affectiones corporum nec cum gradu certo densitatis, nec cum duritie, vel fluiditate ulla ratione connecti, sed omnis generis corpora omnis item generis coloris esse posse.

64. Hisce breviter aliquid de diffractione luminis adjungemus, quam *Grimaldus* noster primus observavit, & Newtonus sub Lib. III. Opt. principium attingit, undecim subnectens observationes, quas tamen vel ipse ad incudem revocare voluerat, si id genus studii licuisset resumere: nemo, quantum quidem scio, post Newtonum hoc argumentum accuratorum experimentorum serie, qualia multa sane facienda essent, pertractandum suscepit. R. P. Boscovich Phil. Nat. Theor. N. 497 inchoatam velut reflexionem vocat, qua radii corporum aciem prætervolantes a via detorqueantur. Est autem Grimaldianum phænomenon sequens a Newtono deinceps repetitis vicibus exhibitum. In obscurum conclave per exiguum foramen (quod Newtonus in plumbea lamina acicula fecit, cujus diameter $\frac{1}{42}$ partem digiti æquabat) immittitur solaris radius: umbræ corporum, velut styli alicujus, capilli &c latiores justo sunt, quæ ex intercepta hac luce projiciuntur, simulque ternas versus latera fascias coloratas parallelas exhibent, quarum prima umbræ contigua ceteris latior a secunda nova umbra separatur, secunda itidem a tertia, si umbræ ejusmodi in majoribus distan-

tiis

tiis a suis corporibus excipiantur charta nitida; at si intervallum hoc exiguum sit, tertia fascia secundæ jungi continenter videtur. Fortassis reliquæ fasciæ ultra ternas, in majoribus distantiis semper debiliores, oculos effugiunt. Et ne quis putaret hasce refractione aeris fieri, capillum umbram projecturum Newtonus aquæ intra duas tabulas vitreas planas contentæ immisit, idemque erat phænomenon.

Luculentiores fiunt hæ fasciæ, si lux intra duorum corporum acies vicinas trajiciatur. Inclinabat Newtonus duorum cultrorum acies adversas alteram alteri ad se se sub angulo circiter $1^{\circ}\ 54'$, ut ab hujus anguli vertice pergendo omne genus distantiarum haberetur. Animadvertit, quando distantia $\frac{1}{160}$ unciæ æquabat, lumen totum, quod transire recta debuerat, in utramque partem deflexisse, atque in medio reliquisse umbram. Observaverat quoque in charta oblique posita ordinem colorum sequentem: limbus primæ fasciæ ipsi umbræ continens erat violaceus, tum notabatur cæruleus color clarior, viridis, flavus, ruber, qui terminabat fasciam primam. Interjiciebatur, ut diximus, huic & secundæ fasciæ tractus tenuis umbrosus: in secunda fascia umbram corporum respiciens limbus erat cæruleus, extimus ruber flavo colore medium tenente; idem ordo in tertia notabatur secundæ fere contigua. Ultra tres fascias, vel ut ait Newtonus, fimbrias, nunquam ei numerare licuit. Porro radium illum tenuem diametri $\frac{1}{42}$ unciæ per foramen in conclave immissum prismate subinde excepit, ut umbras ex certi generis radiis interceptis observaret. Notavit autem, tum fimbrias esse unius omnes tres coloris, hoc discrimine, quod longius ab umbris recederent, seu ampliores fierent, quæ oriebantur coloris rubri immisso radio, angustissimæ essent cærulæe; quæ essent medii coloris, medium quoque tenerent. Denique flexum fimbriarum, ut successive per ampliora intervalla acierum cultrorum lux transmittebatur, opposita charta situ parallelo ad cultrorum planas superficies, animadvertit ad hyperbolas quasdam accedere, quæ ab Apolloniana non multum discreparent. Verum concludit, se ab accuratiore harum rerum investigatione forte avocatum fuisse, & non potuisse deinceps in animum inducere, ut ad hæc studia intermissa iterum se referret.

65. Illud igitur certum hinc conficitur, corporum vires ad satis notabilem distantiam agere in lucem, eam inflectendo. Verum modus nondum satis liquet ex hisce experimentis. Enim vero videri
Fig. 29. Tab. III. potest, quod si C (fig. 29. Tab. III.) exhibeat sectionem v. g. capilli, aut styli tenuis umbram projicientis, ejus vires ita repellant radios *ab* ad distantiam C*b* transeuntes, ut fortius agant in rubros, quam in cæruleos, indeque oriatur fascia *bv*, cujus extremi radii sint rubri, intimi vero cærulei. Eodem modo repellant radios *hc* ad intervallum C*c* advenientes, qui efforment fasciam *cn* eodem colorum situ; atque ita etiam res se se habeat cum radiis *id* vicinissimis, in quos actio sit fortissima, ut ex iis fascia latissima *do*, introrsum cærulea, rubra extrorsum,

trorſum, efficiatur: idem quoque fiat ex altera parte radiis *he*, *lf*, *mg*, luce inter intervalla *Cd*, *Cc*, *Cb*; *Ce*, *Cf*, *Cg* irregulariter diſperſa, ut interjectæ faſciis umbræ oriantur. Verum non ſatis liquet etiam, an non potius (fig. 30. Tab. III.) radii *ab*, *hc*, *id* viribus attractivis inflectantur verſus corpus, ut in alteram partem detorti fiant ex illis fimbriæ *bp*, *cq*, *dr*, & ſimile eveniat radiis ex altera parte transeuntibus. Alterutrum ſi ſit, neceſſe eſt, ut hæ vires vel agant in radios rubros efficacius, eosque magis inflectant, quam cæruleos, vel vero (fig. 30) ut rubri in faſcia *bp* dicantur pertinere non ad radium *ab*, ſed ad viciniorem *hc*, vel *id*; ac eodem modo rubri in faſcia *cq* dicantur ſeparari ex radio albo viciniore, quam *hc* &c. Fieri enim poteſt, ut ex remotiore radio albo deflectentes cærulei conſtituant faſciam cum rubris detortis ex radio viciniore. Sed rurſus difficultas illa ſe ſe hic objicit, quod luce homogenea incidente fimbriæ rubræ ampliores ſint cæruleis: ut etiam dici poſſe videatur, ſingulas fimbrias ortum habere ex inflexione aliqua verſus corpus in appulſu ad ejus viciniam, quam excipiat reflexio, verum ita, ut denuo aliqua ſubſequatur inflexio verſus corpus, minus efficax præcedente repulſione. Id ſi fieret, radii rubri in ſingulis hiſce mutationibus manerent exteriores. Sed præſtat in re non ſatis explorata ſententiam ſuſpendere. Fig. 30. Tab. III.

CAPUT II.

Prima Principia Optices.

ARTICULUS I.

De conſtitutione Oculi, & Efformatione Imaginum Objectorum externorum generatim.

66. Optice proprie dicta de viſione directa agit, ſeu de illa, quæ nudo fit oculo, citra ſpeculi, vel vitri artificio optico elaborati ſubſidium. Et quamvis ratio conſtructionis oculi, qui viſionis eſt inſtrumentum, accurate intelligi nequeat ſine Dioptica, aliqua tamen ejus notitia hic loci nobis eſt neceſſaria. Clauditur nempe oculus (fig. 31. Tab. III.) diverſis tunicis: *nn* eſt *adnata*, *albuginea*, *conjungens*, pellicula illa alba in anteriore parte conſpicua, ac bulbum cum palpebris nectens. ADEC *ſclerotica*, *dura*, productio involucri exterioris nervi optici. Ejus anterior pars ABC minoris ſphæræ ſegmentum Fig. 31. Tab. III.

tum *cornea* ex pelluciditate dicitur. Tum inde a cornea oculi cavitas veſtitur *choroidea*, nerveis fibrillis implexa, quæ eſt productio interioris involucri nervi optici. Huic tandem ſuperſternitur *amphibleſtroides*, *retina*. Choroides apud homines nigri eſt coloris, ſed pars ejus anterior *Ar*, *Cr* *uvea* vocatur, cujus apertura circularis *pupillam* efficit, & coloratus circulus *iridem*, quæ in majore luce magis contrahitur, dilatatur notabiliter in minore. Triplex in oculo eſt *humor*: in cavo anteriore ACB intra corneam & humorem cryſtallinum eſt *aqueus*, cui uvea innatare videtur: tum ſequitur *cryſtallinus cacp* lenticulari forma, niſi quod pars anterior *cac* ſit minus convexa poſteriore *cpc*, reliquis humoribus magis conſiſtens; proceſſibus ciliaribus uveæ nectitur, & tunica arachnoidea humori tertio *vitreo* V, qui majus, ac poſterius oculi cavum implet. Poſticæ denique cavitati oculi nervus opticus aliquantum e latere DFE inſeritur.

67. Dimenſiones partium oculi humani apud varios variæ proſtant. *D. Petit* ſequentes annotavit.

Radius curvaturæ corneæ $3\frac{3}{4}$ lin.
Diſtantia corneæ ab humore cryſtallino $1\frac{1}{4}$ lin.
Radius curvaturæ ânterioris humoris cryſtallin 4 lin.
Axis humoris cryſtallini 2 lin.
Radius cavitatis fundi poſtici oculi $4\frac{2}{6}\frac{5}{4}$ lin.
Radius curvaturæ poſterioris humoris cryſtallini $2\frac{1}{2}$ lin.
Axis totus oculi $9\frac{2}{5}$ lin. juxta *Jurinum*; ſubtracta craſſitudine corneæ uſque ad retinam 9,15.

Quotquot igitur radii ex puncto lucido emiſſi per corneam & pupillam ingrediuntur, ob ſphæricam humoris aquei figuram, & majorem denſitatem, quam aeris (aſſumitur vero plerumque in humore aqueo eadem ratio ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, quæ in aqua obtinet, hoc eſt, dum lux ex aqua in aerem egreditur, 1: 1,3358 pro radiis flavi coloris), colligi jam in ipſo ingreſſu incipiunt: tum per humorem cryſtallinum tantiſper ita augetur refractio, ut in conum radioſum efformentur, cujus apex pertingat ad fundum oculi. Sed quoniam perexigua eſt mutatio refractionis in humore cryſtallino (ſinu incidentiæ ex humore aqueo ſe ſe habente ad ſinum refractionis in humore cryſtallino fere ut 13 ad 12; & ex oppoſito ſinu incidentiæ e cryſtallino in vitreum ad ſinum refractionis in vitreo, ut 12 ad 13) ita conſiderari poteſt tota refractio, quaſi unum continuum conum conſtitueret, cujus baſis eſt pupilla, & vertex terminatus in fundo oculi, axis vero in directum jacet cum radio per centrum pupillæ transeunte. Dixi, ita conum conſiderari poſſe, ſcilicet citra notabilem mutationem magnitudinis, qua objectum apparet. Quid enim diſcriminis intercedere poſſit, quando objectum eſt extra axem opticum, ſive oculi, collocatum (pro quo objecto hoc loco non plus ſumimus, quam punctum obliquod phyſicum, utpote cum ſingula puncta ejusmodi co-

nos

nos radiosos suppeditent), videbimus in Dioptrica. Et quoniam quod de uno puncto lucido dictum est, de omnibus objecti punctis (physice nempe acceptis) intelligendum, apparet, per radios e singulis punctis divergentes efformari duplicem conum, alterum extra oculum, cujus vertex sit punctum radians, basis pupilla; alterum, qui basin communem habeat eandem pupillam, verticem punctum quodpiam in fundo oculi, axibus utriusque proxime in directum jacentibus. Jam vero radiis ab eodem objecti puncto emissis, atque refractione rursus in punctum fundi oculi collectis effici debet impressio, quæ in cerebrum usque propagata sensationem illius puncti efficiat.

68. Scholium. Dimensiones superiore numero allatæ non nisi in oculis e cadaveribus exsectis accipi potuerunt, in quibus proinde minime credibile est, mansisse easdem omnino tum corneæ, tum humoris crystallini curvaturas, utpote humoribus jam stagnantibus, musculis emortuis &c. Hinc si servatis hisce dimensionibus, & rationibus sinuum incidentiæ, & refractionis, calculetur distantia imaginis puncti radiantis, & in axe oculi ad intervallum 8 digitorum, sive 96 linearum positi, invenitur punctum convergentiæ ex refractione in humore aqueo post corneam in distantia 16,881 lin. proxime; a qua si subtrahatur intervallum inter corneam, & anteriorem partem humoris crystallini, fiet distantia illa 15,631. Ex hac, & ratione sinus incidentiæ & refractionis 13: 12 reperitur distantia ex secunda refractione ab anteriore parte humoris crystallini 12,772 lin., & a parte postica ejusdem 10,772 fere. Denique distantia ultimi foci a superficie postica humoris crystallini non minor prodit, quam 7,468 lin. cum tamen ea superficies a fundo oculi non nisi 5,9 lin. distet. Differentia 1,568 lin. tam exigua est, qua focus inventus, seu apex coni radiorum refractorum differt, ut facile credi possit, in oculo vivo radios curvaturæ esse paullo minores, humoribus magis turgentibus, aut rationem sinus incidentiæ ad sinum refractionis paullo aliam. *Jurinus* etiam in humore aqueo rationem sinus incidentiæ ad sinum refractionis sumit 1,35: 1.

69. Si postica pars scleroticæ & choroidis oculi v. g. bovini ita recidatur, ut non nisi pars aliqua retinæ illæsis humoribus remaneat conspicua, atque ante pupillam objectum fortiter illuminatum constituatur, ejus imago in retina suis coloribus depicta videbitur. Quare & nos deinceps ea ratione, quam de unico puncto radiante exposuimus, refractos radios efformare imaginem objecti in oculo dicemus: tot enim erunt conorum vertices eodem ordine in fundo oculi dispositi, quot sunt puncta in objecto aspectabilia, hoc tantummodo discrimine, quod vertices inferiores respondeant punctis objecti superioribus, dexteriores punctis sinisterioribus, & vicissim, ut adeo imago in oculo situm inversum habeat, si cum objecto comparetur. Sed enim anima objectum illuc semper refert, unde impressio facta est: quare cum impressio puncti A (fig. 32. Tab. III.) fiat per rectam ADa (axes conorum Fig. 32. Tab. III.

AD,

AD, aD, qui & paralleli sunt, & proxime eandem lineam constituunt), & impressio puncti B directione BDb, denique impressio puncti C directione CDc, anima refert punctum A supra, B infra C, & C ad medium. Verum deinceps *angulum visorium* tantummodo considerabimus ab axibus extremorum conorum comprehensum aDb = ADB, cum reliqui radii impressionis vim quidem augeant, atque ad id requirantur, quod sensus per unicum, aut nimis paucos, excitari haud possit, magnitudinem vero apparentem nil mutent.

70. In Dioptrica videbimus, imagines objectorum per vitra unum, plurave depictas habere majorem distantiam a vitro postremo, dum objecta viciniora sunt, quam si ad majorem sint distantiam collocata. Quoniam igitur humores oculi idem munus obeunt, quod vitra convexa, etiam hæ imagines, quæ in oculo depinguntur, vel exigunt, ut humor crystallinus aliquantum antrorsum versus corneam removeatur, vel ut cornea, aut etiam ipse humor crystallinus ope musculorum reddatur magis convexus, vel denique ut hæc tria simul fiant, quando objecta viciniora distincte cernere volumus. Præterea advertimus, pupillam longe ampliorem fieri circa vesperum, aut in loco minus luci exposito, quam circa meridiem, aut dum objecta admodum illuminata consideramus. Contractione pupillæ distinctioni visionis consulitur, dilatatione vero plus lucis in oculum admittitur, ut imago nitidior depingatur.

71. Scholium. Quæ hoc scholio subjicimus, me non invito tirones Dioptrices principiis nondum imbuti prætermittere interea possunt, quanquam ea tantummodo ex hac parte mihi sumam, quæ experientia confirmat, & quæ vel ii, qui usitatos tubos opticos sæpius tractarunt, ignorare non possunt. Cel. *d'Alembert* (Opusc. Mathem. Tom I. Memoir. 9) varia dubia obmovet, quæ diversa capita Optices concernunt. In præsens primum, quod adfert, tantisper discutiamus. §. 1. ait: *omnes Optici adhuc axiomatis instar sumpserunt, objectum quodvis, aut potius punctum quodlibet visibile, percipi in directione radii, qui inde ab illo puncto ad oculum venit. Atque hæc assertio haud equidem videtur difficultati obnoxia, si agatur de puncto in axe optico sito, . . . at non idem dicendum, si radii oblique ex objecti cujuspiam latere venientes oculum subeant.*

Argumentum, quo hanc apud Opticos receptam sententiam evertere conatur, huc fere redit. Si (fig. 33. Tab. III) dimidia objecti extensio sit AL, QRS cornea, radius ad eam perpendiculariter incidens LSu veniet citra refractionem ad anteriorem superficiem humoris crystallini PuV; sed in hoc duplicem refractionem in u & V passus deflectet a via Lu, & veniet ad fundi oculi punctum X. Jam quærit d'Alembertus, cum sensus puncti L excitetur in X, in qua directione anima percipiat punctum L? non directione u L, utpote cum ea pars radii non afficiat præcipuum visus organum, nempe retinam; non directione XV: nam imprimis, ait, cum hæc directio sit obliqua ad fun-

Fig. 33. Tab. III.

dum

dum oculi, anima ita percipere debet impressionem, quasi fieret directione ad fundum perpendiculari XKY, quæ per centrum K fundi oculi transit. Dein si referret anima punctum L ad directionem XV, angulus visorius, seu opticus X *i* Z magnitudinis apparentis AL foret major angulo vero, sub quo objectum apparet, ABL (est B centrum cavitatis corneæ), id, quod dein calculo ostendit.

Quoniam oculus, instrumentum visionis, humoribus simillimis conditionibus præditis constat, quas habent instrumenta optica, per quæ imaginem objectorum in pariete, vel charta opposita efformari videmus, sane recte concludemus, eodem modo efformari imagines in oculo, quo ope unius, pluriumve vitrorum in aliis machinis depinguntur. Jam vero constat nobis I°, si sit vitrum utrinque convexum PM*p* (fig. 34. Tab. III.), & radius *a*MSZ per axem illius irrefractus transeat, reliquos omnes ex eodem puncto physico venientes A*m*, A*m*, &c ita refringi, ut proxime colligantur in puncto aliquo axis Z. Item si ex alio objecti puncto *l* veniat radius *lr* (qui ab Opticis *principalis* dici consuevit), qui ita refringatur ex *r* in *s*, ut inde egressus fiat X*s* parallelus cum *lr* (quod continget, si puncta *r*, *s* utriusque superficiei habeant tangentes parallelas, ut in vulgus notum est), reliqui radii L*m*, L*m* &c ex eodem puncto *l* digressi, ita refringuntur, ut colligantur rursus in aliquo puncto X radii principalis *s*X, saltem proxime, ita, ut sit *s*X fere æqualis cum NZ. Hæc in vitris ita contingere nemo profecto negabit, qui unquam ejusmodi imaginem in *camera obscura* conspexit. II°. Eadem certitudine nobis constat, quod si pars vitri notabilis, velut *m*M*rp* obtegatur charta crassiore, & relinquatur vel segmentum tantummodo *mm*, aut spatium lunulæ formam referens, apertum, omnia objecti puncta eodem modo, & in iisdem punctis Z, X, habeant suas imagines, ac prius, tota lente aperta; hoc uno discrimine, quod tanto obscurior sit imago tota, quanto major lentis pars obtegitur. Quod de lente vitrea dicitur, intelligendum quoque est de sphæra aliqua seu vitrea, seu aquea. Igitur ex hoc phænomeno constat *primo*, radios A*m*, A*m* &c adhuc colligi in axe lentis *a*Z, & radios L*m*, L*m* &c in radio principali *l*X, etsi obtecta, ut diximus, lente nec per MN ullus radius transeat, neque ullus habeatur radius principalis. *Secundo* merito ab Opticis angulum, quem facit radius principalis cum axe, censeri æqualem angulo A*m*L. Nam producta X*s* in *i* reapse facit angulum X*i*Z = A*m*L; & cum X*si* producta maneat parallela cum *lr*, sitque harum linearum distantia inter se se tam exigua, non immerito etiam ab Opticis radius principalis ita consideratur, tanquam qui nullam refractionem patiatur. III° constat nobis, si instrumentum opticum sit compositum imprimis e vitro P*p* (fig. 35. Tab. III), & ex duobus punctis *l*, A veniant radii ita, ut imago puncti *l* efformetur concursu radiorum L*m*, L*m* &c in radii principalis *l* X puncto X (de puncti A imagine aliunde res extra dubium est), &

Fig. 34. Tab. III

Fig. 35. Tab. III.

& dein interponatur vitrum novum *Oo*, ita, ut habeat axem AZ communem, distantiam foci *s*X contrahi, & puncti *l* imaginem depingi in aliquo puncto *x*, quod sit in radio quodam principali λT*nx*, ita, ut sint partes λT, *nx* parallelæ ad *l*X, etsi talis radius fortassis nullus sit, sed tantum habeatur fictitius. Nam si quis calculare velit seu amplitudinem, seu distantiam imaginis *zx* per duo vitra efformatæ, is considerare debet radios *g*Z, *g*X velut e puncto *g* divergentes, quorum prior irrefractus transit, alter cum radio principali λT*nx* (quem etiam velut irrefractum per lentem *Oo* spectare licet), refractionem in ingressu ad *a* & egressu per *e* passus, uti videbimus in Dioptrica, in puncto *x*, ubi novus focus efformatur, concurrit.

Ex his autem liquet, si *xn* producatur versus *l*, fore omnino angulum, quem facit cum axe AZ, æqualem angulo *lg*A. Applicemus hæc oculo spectato instar machinæ cujusdam opticæ, & nil interea statuamus de perceptione, sed tantummodo videamus, qua ratione imago in ejus fundo efformetur. Imprimis usus quotidianus oculorum nos docet, nos videre satis distincte objecta etiam ita extensa, ut angulus ABL (fig. 33. Tab. III.) nequeat tam parvus censeri, quemadmodum existimat d'Alembertus, ut radius LS*u* necessario debeat perpendicularis esse ad corneam, & simul per pupillam transire sine refractione. Id sane nec ullus unquam, nec ipse requirit in lentibus, ut in primam scilicet superficiem incidant radii perpendiculariter, & in secunda tantummodo incipiant refringi. Dantur objecta, quæ certe adhuc distinctione sufficiente videntur (talem enim in punctis lateralibus non haberi, qualem experimur in puncto medio in axe sito, ultra damus, attamen tam magnam, ac poscat rectus oculorum usus), ex quibus nullus radius lateralis ad illam corneæ partem perpendiculariter venire potest, cui substernitur pupilla, sed omnes incidant oblique. Sit (fig. 36. Tab. III) cornea R*s*D, apertura pupillæ P*p*; veniant radii e medio objecti puncto A, qui jam in ipso ingressu per corneam incipient refringi, consequenter jam convergentes pertingent ad superficiem humoris crystallini QM*q*, in quo bis refracti colligentur in puncto axis F proxime. Incidant e latere alii magis obliqui in eandem corneam, & per humorem aqueum in *r*, *s* refracti incipient efformare conum. Ex his concipiatur unus aliquis HBO transiens per centrum B superficiei humoris aquei, quamvis hic radius, velut axis sphæræ, reapse fortassis non habeatur, sed fictitius sit; attamen ex iis, quæ superius N. II° de lente ex parte obtecta diximus, satis liquet, imaginem puncti lateralis efformatum iri in aliquo puncto O hujus axis, ideoque omnes radii *r*PO, *sp*O in O colligerentur, siquidem foret humor aqueus tantum. Neque putandum est, si angulus ABH sit major, fore, ut radius oblique incidens per pupillam non incurrat in humorem crystallinum. Hujus enim diameter Q*q* sat magna est, & facili calculo, si allatæ dimensiones assumantur, reperitur, dummodo

Fig. 33. Tab III.

Fig. 36. Tab. III.

do Qq ſit vere chorda communis arcuum QMq, QNq, & horum pars aliqua non intercipiatur ligamento ciliari (*). Erit jam aliquis radius ex innumeris prope (ſi non verus, fictitius ſaltem, quamquam rariſſimus erit is caſus, ut non habeatur verus), v. g. *pg*, qui ita in humore cryſtallino refringatur ad *g*, & *l*, ut pars *lo* ſit cum *pg* parallela, ideoque habeatur radius principalis. Ad hujus ergo punctum *o* omnes reliqui *rm* &c in *m* & *n* refringentur, ibique imago puncti lateralis *h* vel H objecti depingetur. Jam vero eſt *lo* ad HO parallela, quemadmodum diximus de *nx* reſpectu *lX* fig. 35, quando de refractione duarum lentium loquebamur; unde ſi *ol* producatur, cum axe ANF angulum = OBF efficiet; & ſi quidem anima referat punctum viſum ad directionem *ol*, ſub vero angulo videt objectum. Verum hoc ipſum modo ut oſtendamus, nobis incumbit.

Certum eſt, ſi conſideretur objectum in diſtantia mediocri 9 vel 8 digitorum, quod ponatur in ipſo axe optico ſitum, radios ex eo divergentes, conſtituere conum, cujus baſis ſit pupilla; & refractione tum in humore aqueo, tum in cryſtallino, eoſdem deinceps in oculo in alterius coni verticem coire, qui vertex ſit in fundo oculi. Jam ſi quilibet radius referat imaginem objecti, e quo venit, & anima in directione cujuslibet ſitum eſſe objectum judicet, neceſſe erit, ut appareat punctum illud phyſicum, quod in medio ſitum eſt, tantæ amplitudinis, quanta foret baſis coni, qui oriretur, ſi radii latera coni refractione efformati conſtituentes producerentur uſque ad locum objecti, quæ

(*) Calculus hunc in modum inſtitui poteſt. Sit C centrum ſuperficiei humoris cryſtallini QNq, E centrum alterius QMq, dicatur $CM = a$, $NE = b$, $CN = r$, $EM = R$, $ML = x$, $LM = y$, $MN = c$, $LQ = v$; erit $NL : LQ = LQ : LM + MC + CN$, id eſt, $y : v = v : x + a + r$, & $v^2 = xy + ay + ry$. Item $ML : LQ = LQ : LN + NE + ME$, ſive $x : v = v : y + b + R$; hinc $v^2 = xy + bx + Rx$; quare etiam $xy + ay + ry = xy + bx + Rx$, & $(a + r)\, y = (b + R)\, x$. Eſt autem $x = c - y$, unde fiet $(a + r)\, y = (b + R)\, c - (b + R)\, y$ vel $(a + b + r + R)\, y = (b + R)\, c$, ac denique $\frac{(b + R)c}{a + b + r + R} = y$. Si accipiantur valores ſuperius a *Petito* determinati, eſt $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 2$, $r = 2\frac{1}{2}$, $R = 4$, conſequenter $y = \frac{(2 + 4)2}{\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Unde cum $x + y = c = 2$, erit $ML = x = \frac{2}{3}$, & $v^2 = \frac{2 \times 4}{9} + 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{2}{3} = \frac{44}{9}$, $v = \frac{6,633}{3} = 2,211$, $Qq = 4,422$. Juxta *Petitum* eſt Qq, tantummodo 3,7321 lin. medio quodam e plurium oculorum dimenſionibus actualibus accepto. Verum hæc latitudo abunde præſtat, ut vix unquam radius per pupillam ingreſſus humorem cryſtallinum prætervehi poſſit, cum admodum parva ſit ejus ab eadem pupilla diſtantia, & radii magis oblique incidentes etiam majorem refractionem in humore aqueo patiantur, qua verſus humorem cryſtallinum detorquentur.

quæ basis in distantia 8 digitorum, si pupillæ tribuatur diameter 1 lineæ, facile tanta evadit, ut diametrum 10 fere linearum requirat, ideoque tantum videri deberet objecti punctum medium, cujus imago in ipso axe optico depingitur. Quæ res cum sit contra omnem experientiam, extra dubium est, non in directione cujuslibet radii, qui ad efformandam imaginem objecti concurrit, objectum videri. Porro unicus axis coni radiosi, cujus apex efformat imaginem objecti, est, in quo reapse situm est objectum: & quoniam in casu allato & veram objecti magnitudinem, & distantiam saltem proxime nos videre experimur, extra dubium est, objectum a nobis referri ad directionem axis coni, cujus vertex est imago objecti. Quod si hoc fiat in cono referente punctum objecti in axe optico situm, quid pronius, quam ut arbitremur idem fieri in aliis obliquis, quorum vertices sint imagines punctorum lateralium, & axes radii principales, etsi fortassis casu quopiam talis radius principalis intercipiatur, quemadmodum idem faceremus in cono exprimente punctum medium objecti, si quovis vel oculi vitio, vel extraneo impedimento reapse per centrum pupillæ nullus radius transire posset, sed tantummodo per reliquum spatium annulare.

Verum ut ad directionem axis coni radiosi referamus objectum, debeturne id ipsi impressioni, an potius propterea id facimus, quia hunc situm objecti verum esse experientia nos docet? Existimo, paucissima, aut potius nullum, esse apud nos judicia, nisi vaga quædam, & non satis determinata, quæ ab ipsa impressione in sensus facta sint immediate, & unice deducta, ut sæpius id monendi in decursu se se dabit occasio. Certe id pertinere etiam ad sensum visus, luculenter ostendunt, quæ *Smithius* ex *Chesseldeno* refert de puero, cujus oculi cataracta liberati sunt, & quæ notiora putamus, quam ut hic referri debeant. Ostendunt, inquam, ea egregie, quam incerta nostra forent de rebus visu perceptis judicia, nisi usu, & experientia aliqua juvarentur.

Quod attinet ad alterum dubii d'Alembertiani fundamentum, Fig. 33. Tab. III. scilicet quod deberemus (fig. 33. Tab. III.) objectum referre ex legibus mechanicis juxta directionem XY ad fundum oculi perpendicularem, prorsus nil movet, si quidem ad obvia attendere velimus phænomena, & naturam retinæ, in quam impressio communiter fieri censetur, ut sensatio in cerebro terminanda excitetur, paullisper consideremus. Exhibeat EF (fig. 37. Tab. III.) partem epidermidis v. g. manus cum latentibus sub ea papillis nerveis, in quas impressio fit, ut sensus tactus in nobis excitetur. Quilibet experiri potest, ut in me, & non paucis amicorum expertus sum, si stylo AB ad epidermidem fere perpendiculari pars B leviuscule tangatur, & dein idem fiat directione satis obliqua a B, haud discerni posse, qua directione ea punctura fiat, siquidem stylus non videatur. At si idem stylus CD fortius non nihil adiga-

adigatur, quin tamen in cutem penetret, sed fossulam tantum aliquam efformet, tum vero facile advertes ipsam directionem seu perpendicularem, seu obliquam. In primo casu non nisi ad paucissimas fibrillas motus impressus pertinet; at in secundo ad multo plures, velut *eee*, quæ non modo aliquam profunditatem habent, sed etiam situ obliquo, vel recto, sibi altera alteri substernuntur, ut proinde e situ harum fibrillarum, ad quas impressio pertingit, non obscure de situ styli admoneamur. Quod si dein retinam consideremus, ea est fere semiopaca, satis magnæ profunditatis, ut radii non in prima ejus superficie sistantur, sed usque ad choroidem penetrent, in qua demum absorbeantur. An enim alias recisa e postica parte sclerotica & choroide imaginem objecti ante oculum bovinum constituti tam distincte cernere possemus, nisi plurimi radii per totam retinam penetrarent, indeque ad intuentium oculos pervenirent? Quare sicut, ut sensus excitetur, non satis est radius unicus in unicum punctum incidens, ita simul aliqua profunditas requiritur, ut fibrillæ aliæ infra alias positæ moveantur, e quarum situ directio impressionis advertitur.

Atque hæc si considerem, haud video, qua confidentia *d'Alembertus* dicere possit (pag. 274 loc. cit.); *igitur generatim nihil æque incertum est, atque illud vulgatum Optices principium, objecta videri in directione radii, quem ad oculum transmittunt.* Sed de hoc satis.

ARTICULUS II.

De Magnitudine, Distantia, Loco, & Motu apparente Objectorum, nec non de visione per duos oculos.

72. Judicia nostra de magnitudine objectorum visorum præcipue a duobus principiis dependent, imprimis quod *objecta majora sub majore angulo videantur, quam minora, quando habent eandem ab oculo distantiam.* Dein *quod objecta æqualia videantur sub majore angulo, dum viciniora sunt, quam remotiora*, ut adeo magnitudo quam objectis tribuimus, pendeat non minus a magnitudine anguli visorii, quam ab existimata distantia. Hinc fit, ut si duo objecta AB, *ab* (fig. 38. Tab. III.) apparent oculo O sub eodem angulo AOB = *aOb*, & de distantia nullum judicium ferre possimus, arbitremur illa æqualia. At si aliunde nobis constet, *ab* esse remotuis, quam AB, illico dicimus, esse *ab* majus, quam AB, & siquidem anguli sint exigui, ut a chordis AB, *ab* arcu radiis OA, O*a*, descripti sensibiliter non differant, judicamus, fore *ab* ad AB, ut distantia primi ad distantiam secundi est ab oculo.

Fig. 38. Tab. III.

Ceterum ſunt plerumque mediocres quædam diſtantiæ, intra quas de magnitudine objectorum ex uſu potius, & quadam experientia multo accuratius judicare ſolemus, quam ex angulo, ſub quo nobis apparent. Sic judicium de magnitudine hominis non mutatur, ſi in diſtantia aliquot paſſuum quempiam videamus, etſi dein eundem ad dimidium intervallum conſideremus, ubi angulus viſorius fit fere duplo major. Pariter intereſt, utrum objectum ejusmodi habeat ſitum reſpectu oculi, quem plerumque habent illa, de quorum magnitudine recte judicare conſuevimus, an vero alium nobis non ita uſitatum. Si quem in edito quopiam ædificio ad ejus pedem poſitus ſpectes, multo tibi apparebit minor, quam ſi eundem in ejusdem longitudinis diſtantia horizontali videres, atque id non tantum, quod in priore caſu objectum magis oblique exponatur oculo, quam in altero; verum etiam quia minus aſſuevimus de objectis judicare, ad quæ videnda oculos ita attollere oportet, quam quæ fere in linea libellæ oculi ſunt poſita.

73. Si objectorum magnitudo uſque ad certum limitem (qui tamen pro diverſis oculis diverſus eſt) decreſcat, niſi ſint corpora lucentia, uti ſtellæ fixæ, videri deſinunt. Immo ipſæ ſtellæ fixæ ex diſperſione lucis efformant aliquem exiguum circellum in oculo, cujus diameter judicio *Jurini* angulum fere 4′ ſubtendit. Verum conſideranda eſt triplex conformatio oculi, connaturalis, dum nulla vis oculo infertur; dein ea, quæ inducitur oculo pro objectis admodum vicinis; ac tandem alia, quando ſpectamus objecta remotiſſima. Experimur fere, quod homo adultus, nullo vitio oculorum laborans commode adhuc legat librum typo minore excuſum ad diſtantiam 13, 14, 15 aut 16 digitorum, in quo typo in literis *n* & *m* intervallum linearum, quibus efformantur fere $\frac{2}{100}$ digiti æquat. Jam vero ſi fiat 16. dig. (ſeu $\frac{1600}{100}$) ad $\frac{2}{100}$ = 206264″,8: x, reperitur angulus viſorius 257″,8 fere, ſeu 4′ 8″ proxime, conſequenter ſub hoc angulo adhuc ſatis diſtincte videmus, alias enim evanaſcente intervallo albo inter lineas dictarum literarum oriri deberet confuſio. Pariter in diſtantia 5, 6, vel 7 digitorum commode diſcernimus ſubtiliſſimas lineas, v. g. in ſcala aliqua geometrica, fila texti araneorum &c. Unde conficitur, in hac oculi conformatione nos poſſe adhuc diſcernere in diſtantia 7 digitorum objecta, quæ apparent ſub angulo 59″ vel 1′; ſi enim tribuamus diametro talis fili $\frac{1}{500}$ digiti (poterat certe adhuc minor aſſumi, angulus 58″,9 proxime obtinetur e ſuperiore proportione. Denique intervallum duarum ſtellarum fixarum, quod 5 vel ſex minuta non excedat, adhuc ſatis diſtinguitur.

74. Quæri etiam hoc loco poteſt, quis maximus ſit angulus, ſub quo objectum aliquod videri poteſt? *Wolfius* ſtatuit rectum; verum ſi tantus ſit, extima latera admodum confuſe apparent, nec ſatis

diſcerni

diſcerni poſſunt. In *Perſpectiva* plerumque præſcribitur, ut radius principalis non ſit minor dimidia diagonali tabulæ, nec major tota. Si is radius (qui nil aliud eſt, quam diſtantia oculi a tabula) æquet dimidiam diagonalem, evidens eſt, angulum, ſub quo tota diagonalis videtur, fore rectum; & ſi æquet totam, idem angulus aliquot minutis excedit 53°. Quare ſi ex his ſumatur medium, habebimus $71^{\circ}\frac{1}{2}$. Arbitror tamen ſufficere angulum 60°, ut objecta intra eum poſita ſatis diſcerni poſſint. Sequitur hinc, ſi ad objecta magna propius accedamus, eo ſemper minus ex iis videri poſſe.

75. Verum ex quibus principiis judicamus de ipſa objectorum diſtantia ab oculo? Quemadmodum judicium de magnitudine non in uno angulo viſorio, ſed ſimul in diſtantia exiſtimata objecti fundatur, ita etiam judicium de diſtantia ſæpe ab opinione, quam de magnitudine habemus, dirigitur. Interim ſunt nonnulla ſubſidia, ope quorum ſaltem generatim, an magna, an mediocris ſit diſtantia, utcunque dignoſcere poſſumus; *primo* quidem ſi partes, quas in objecto minores eſſe ſcimus, adhuc diſcernere poſſumus, v. g. feneſtras, caminos, angulos &c ædificorum, tum vero ea haud admodum remota ex uſu quodam, & experientia arbitramur. Quod ſi enim admodum diſſita ſint objecta, partes minores diſparent, turres quadrangulares rotundæ, ſphæræ inſtar diſci plani, polygona velut circuli videntur &c. *Secundo* ſi objecta videantur clare, bene terminata, non velut nebula quadam circumfuſa, ea haud procul ſita exiſtimamus; quippe uſus docuit nos, per magna aeris interjecti intervalla multum lucis intercipi, atque vaporibus ſuperficiei telluris propinquis objecta reddi obſcura. Hinc mirum non eſt, obſcuritatem conjungi cum idea ingentis diſtantiæ. Montes admodum diſſiti plerumque ſubcærulei ex interjectis vaporibus conſpiciuntur; ædificia locis editis impoſita ob aerem puriorem diſtinctius videntur. *Tertio* habemus objecta pro admodum diſſitis, ſi videamus inter ea, & nos magnum corporum aliorum numerum interpoſitum, aut ſaltem interponi poſſe arbitremur. In magna planitie conſtituti non ita advertimus ad magnitudinem intervalli loci alicujus, ad quem contendimus; at ſi ex edito poſſimus ipſam planitiem ſub majore angulo ſpectare, ut diſcernamus magnum numerum agrorum pratorum &c in ea ſitorum, tum vero judicamus, nos procul ab itineris termino abeſſe. Quodſi diſtantiæ admodum magnæ evadant, ut limites illos prorſus excedant, intra quos objecta alias conſpicere conſuevimus, etſi ingentes ſint earum differentiæ, haud tamen inter eas diſcernimus, & quoniam ſublato diſcrimine æquales judicamus, planitiem ingentem utcunque anguloſam velut circulum ſpectamus, ſilvæ inſtar amphitheatri curvari nobis videntur, planetas, ſtellas fixas, cometas fere ad ſuperficiem alicujus ſphæræ, in cujus centro poſiti ſimus, referimus &c. Hinc etiam vulgus ad diſcrimen diſtantiarum ſtellarum fixarum, Lunæ, ſolis non attendens, cum de horum corporum magnitudine judicat, ad-

unum fere angulum viſorium reſpicit, atque ſolem, lunamque immane quantum fixis majorem arbitratur, ipſi ſolari diſco haud multas hexapedas tribuit. Atque ex hiſce fontibus innumera alia judicia erronea ex male præconcepta opinione vel de diſtantia, vel de magnitudine enaſcuntur.

76. Sed illud meretur, ut paullo diligentius expendatur, cur luna, aut ſol oriens, vel occidens notabiliter nobis major appareat, quam dum jam notabilem ſupra horizontem habet altitudinem. Sit (fig. 39. Tab. IV.) arcus CBD, quem luna ſupra horizontem deſcribere videtur. Quoniam quæ clarius videmus, nobis propiora exiſtimamus, & immenſa vaporum copia prope horizontem ſidera nobis longe obſcuriora reddit, quam ſi altiora fuerint, etiam ipſam cœli ſuperficiem clariorem prope zenith B multo magis depreſſam arbitramur, quam quæ horizonti ad L vicina eſt, ut non hemiſphærium, ſed cavum aliud inſtar fornicis C*ab*D referre videatur. Confirmat hoc noſtrum judicium, quod ſi jubeamur citra accuratiorem reflexionem medium inter horizontem, & zenith punctum E deſignare, plerumque illud deſignemus, ad *e* quod non niſi 24 vel 25 gradibus ab horizonte diſtat. Atqui ſi vere hemiſphærii ideam haberemus, procul dubio aliquod ab E haud multo remotum indigitaremus. Quare fornicem potius arbitramur cœli aſpectabilis ſuperficiem, cujus ſuprema pars multo nobis ſit propior. Unde lunæ diametrum in L, qui locus ab *l* haud multum diſtat, exiſtimamus majorem quam ſi fuerit in A, ubi eam ad *a* referimus, utpote cum *a* nobis ſit multo vicinius, & objecta ſub æquali angulo apparentia illa minora putemus, quæ viciniora arbitramur. Fortaſſis etiam illud ad hoc judicium confert, quod lunæ diſcum ad L facile comparemus cum objectis terreſtribus, quæ ſimul tum in oculum incurrunt; & quoniam videmus intra eum poſſe contineri montium in extremo horizonte poſitorum vertices, arbores, ſylvarum tractus, de quibus ingentis magnitudinis ideam habemus, facile perſuaſio maximæ extenſionis in nobis oritur; at ſi jam longe ſupra horizontem evaſerit, eo comparationis ſubſidio deſtituimur, & fere ex uno angulo dimidium gradum haud multum excedente judicium ferimus.

Fig. 39. Tab. IV.

77. Ex dictis plurima deduci poſſunt corollaria variis phænomenis explicandis commoda. Pauca in præſens indicabimus.

I°. Objecta oblique conſpecta, etſi majora ſint, poſſunt minora apparere, quam quæ reapſe minora ſunt, ſed directe oculis expoſita. Hunc in modum (fig. 38. Tab. III.) $\alpha\beta$ videtur ſub minore angulo $\alpha O\beta$, quam *ab*, & ſi non advertas ad obliquitatem ſitus, judicabis eſſe $\alpha\beta < ab$.

Fig. 38. Tab. III.

II°. Ex eadem obliquitate ſitus contingit, ut objectorum veram figuram non percipiamus. Ita ſi planum circulare objiciatur oculo oblique, axes conorum radiantium ex perimetro novum conum obliquum conſtituunt, & hinc imago depingitur elliptica, utpote cum diverſæ diame-

diametri ſub diverſis angulis appareant, ut facile intelligitur ex iis, quæ Part. III. Geom. de ſectionibus conorum, & conoidum diximus. At ſi planum tenue circulare in majore aliquantum diſtantia ita exponatur viſui, ut tranſeat per axem opticum, nil niſi linea recta apparebit &c.

III°. Si oculus conſtituatur intra lineas, vel plana parallela, uti intra aliquod ambulacrum longius, intra duas ſeries arborum &c; partes remotiores convergere videntur, in ambulacris pavimentum aſſurgere, tabulatum vero deprimi &c; ſi prope altum ædificium conſtitutus oculos attollas, parietes verſus te propendere arbitraberis &c. Conſuevimus enim objecta horizontalia ad lineam libellæ, ſeu horizontalem illam, quæ per oculum tranſit, referre, atque de diſtantiis objectorum a ſe ſe invicem dependenter a diſtantiis, quas ab hac linea habere videntur, judicare. Eodem modo referimus objecta verticalia ad lineam verticalem, quæ per zenith oculi tranſit. Sit (fig. 40. Tab. IV.) O locus oculi, AE, BF repræſentent parietes parallelos ambulacri, OI ſit libella oculi: apparebunt diſtantiæ æquales AB, CD, EF &c ſemper ſub minoribus angulis AOB, COD, EOF; hinc AE æque, ac BF ſemper magis ad OI accedere videbitur. Idem eſt, ſi AE referat tabulatum, BF pavimentum; & ſiquidem fuerit ſufficiens longitudo, ut angulus EOF fiat perexiguus, omnia videbuntur in E concurrere. Pari ratione ſi (fig. 41. Tab. IV.) ſit AD turris, vel murus præaltus, oculo in O conſtituto diſtantiæ æquales BC, ED a verticali oculi ſemper ſub minoribus angulis apparent, ideoque ipſum ædificium verſus OE inclinari putabitur.

Fig. 40. Tab. IV.

Fig. 41. Tab. IV.

IV° Objecta minutiſſima per microſcopia ſimplicia conſpecta ingentia nobis apparent. Cum enim ea in tanta vicinia alias diſtincte videre nequeamus, referimus eadem ad diſtantiam, in qua uſu, & conſuetudine oculo libro diſtincte videre ſolemus; & quoniam non niſi magna objecta in ea diſtantia ſub tam magnis angulis videntur, judicamus objecta ejusmodi minuta reapſe ingentia eſſe.

V°. Si ſit (fig. 42. Tab. IV.) MN charta craſſa exiguo foramello ad AB pertuſa, atque feneſtræ conclavis obverſa, ut lux per AB in oculum incidat; ſi præterea inter oculum & foramen chartæ teneatur acicula CD, ſed oculo admodum vicina, apparet extra foramen ad $\varkappa\delta$ imago quædam obſcura, neque ſatis terminata ejusdem aciculæ, ſed multo major, & ſitu inverſo. Hujus phænomeni cauſa procul dubio eſt, quod per pupillam *op* projiciatur in fundum oculi umbra aciculæ, & quidem, uti oportet, ſitu erecto, ut ſcilicet umbra capitis cadat in *c*, partis ſtyli vero in *d*. Cum circa hanc umbram fundus oculi illuminetur, habemus eam pro aciculæ imagine, & hinc, ut alias conſuevimus, referimus *c* ad $\varkappa$, &*d* ad δ, talem nempe diſtantiam, ad quam objecta minuta videre ſolemus. Unde fiet, ut cum ea diſtantia major ſit, quam intervallum inter aciculam, & oculum, non modo major,

Fig. 42. Tab. IV.

ſed etiam ſitu inverſo appareat. Ipſam quippe aciculam ob nimis parvam diſtantiam videre omnino non poſſumus. Idem phænomenon refert *D. de la Caille* in *Lect. Elem. Opt.* inter *Quæſtiones Opticas* N. III, ſed male explicat.

VI°. Quando vel reipſa oculum immotum tenemus, vel immotum tenere nos putamus, & objecti imago in aliis, aliisque ſucceſſive partibus fundi depingitur, dicimus objectum moveri. Cum enim lux recta linea propagetur, nequit locus imaginis in oculo immoto mutari, niſi etiam locus objecti mutetur, hoc eſt, niſi objectum moveatur. Prout igitur ea mutatio imaginis, celerior, tardiorve eſt, ita celerius, tardiusve objectum videtur moveri; quod ſi tamen celeritas admodum magna ſit, tempore deſtituimur, ut oculum ad diſtinctam viſionem conformemus; ſi objectum motu celeri rotationis agatur inſtar turbinis, neque colores diverſos, neque maculas, & angulos diſcernimus. Et quia impreſſiones in oculum factæ aliquamdiu perſeverant, contingit etiam, ut carbo ardens celeriter in gyrum actus integrum circulum ignitum nobis exhibeat. Ex oppoſito ſi motus objectorum ſit admodum lentus, ut intra 1″ non niſi ſpatium, quod angulum paucorum ſecundorum ſubtendat, conficiant, ea moveri haud advertimus ex viſu, niſi reflexione quadam utamur. Sic cum ſtellæ fixæ, quæ in æquatore ſunt, intra 1″ non niſi 15″ circuli maximi ſphæræ percurrant, eæ intuentibus ſtare videntur, nec motas eas eſſe advertimus, niſi poſt tempus longius diverſa loca, in quibus nobis apparuerunt, conferamus, aut niſi nobis a corporibus opacis repente ocultentur. Eodem modo indices horarii horologiorum haud videntur intra pauca ſecunda moveri. Sed de phænomenis motus apparentis, quod ſatis eſt, Part. I. Mech. diximus. In præſens unum, alterumve Problema ſolvamus.

78. Problema I. Datis partibus tribus ejusdem rectæ AB, BC,
Fig. 43. Tab. IV. CD (fig 43. Tab. IV.) utcunque inæqualibus, invenire punctum O, ex quo ſingulæ apparent ſub eodem angulo.

Reſolutio. Sit I° $AB > BC$, & $CD > BC$. Radio $\frac{AB \times BC}{AB - BC}$ deſcribatur ſuper AD verſus K producta circulus BOF, qui tranſeat per B. Dein radio $= \frac{DC \times BC}{DC - BC}$ fiat alter circulus ſuper eadem recta verſus A producta, tranſiens per C; puncta O & *o*, ubi ſe ſe interſecant hi circuli, erunt loca bina, quæ ſatisfaciunt problemati. Nam (118 Part. IV. Geom.) eſt $AB : BC = AO : CO$, ideoque BO ſecat angulum AOC biſariam (233 Part. I. Geom.). Ex eadem ratione eſt $DC : CB = DO : BO$, conſequenter DOB biſecatur per CO, & hinc $DOC = COB = BOA$.

Sit II° $AB > BC$, & $BC = CD$ (idem foret, ſi poneretur $CD > BC$, & $BC = BA$); evidens eſt, in hoc caſu circulum COE fieri infini-

infinitum, seu abire in rectam (119 Part. IV. Geom.), quæ utrinque in hac hypothesi occurret circulo BOF, velut in G, atque duo rursus habebuntur loca quæsita.

Si III° foret $AB = BC = CD$, uterque circulus abiret in rectam, & hinc haberentur duæ rectæ parallelæ per B & C transeuntes, quæ non nisi in distantia infinita utrinque concurrere concipi possunt, proinde casus fit impossibilis, nisi admittatur in solutione angulus visorius evanescens.

IV°. Ponatur $AB < BC$, & $CD < BC$; habebit circulus BOF, centrum ex parte A, & COE ex parte D (119 Part. IV. Geom.) & nulla intersectio est possibilis, consequenter problema in hac hypothesi solvi nequit.

V°. Denique sit $AB > BC$, & $BC > CD$. In hac hypothesi triplex casus est distinguendus. Nam centrum utriusque circuli BOF, COE (fig. 44. Tab. IV.) cadit versus D. Hinc si fuerit $CE > CF$, duplex datur intersectio O, una supra, altera infra BE, & problema est possibile. Est autem EC in hac hypothesi $= \frac{2DC \times BC}{BC - DC}$, & CF $= \frac{2AB \times BC}{AB - BC} - BC = \frac{AB \times BC + BC^2}{AB - BC}$; igitur si fuerit $\frac{2DC \times BC}{BC - DC} > \frac{AB \times BC + BC^2}{AB - BC}$, problema duplicem habet solutionem. At vero si sit $CE = CF$, seu $\frac{AB \times BC + BC^2}{AB - BC} = \frac{2DC \times BC}{BC - DC}$, circuli se se interne tangunt in E vel F, quæ puncta congruunt, toto circulo COE cadente intra BOF, & tum angulus visorius evanescit, cum pariter lineæ AO, BO, CO, DO congruant cum AE. Denique si fuerit $\frac{AB \times BC + BC^2}{AB - BC} > \frac{2DC \times BC}{BC - DC}$, circulus COE cadit intra BOF citra contactum, ideoque nulla habetur intersectio, & problema fit impossibile. Ex hoc intelligitur, quid fiat, si fuerit $CD > BC$, & $BC > AB$, nam nullum tunc aliud est discrimen, nisi quod centra circulorum sint ex parte opposita versus A. Fig. 44. Tab. IV.

79. Coroll. Si (fig. 43. Tab. IV.) dentur tantummodo duæ partes AB, BC, problema erit indeterminatum, nisi alia præterea adjiciatur conditio Nam si partes datæ sint inæquales, alterutrius circuli BOF, vel alterius per B transeuntis, & habentis centrum versus A, dum $AB > BC$, singula peripheriæ puncta satisfaciunt; aut si fuerit $AB = BC$, circulo abeunte in rectam, omnia ejus rectæ puncta pertinebunt ad solutionem. Conditiones, quæ determinent problema, esse possunt v. g. ut oculus habeat datam ab AC distantiam, uti CG, quæ proin- Fig. 43. Tab. IV.

proinde major esse nequit radio $\frac{AB \times BC}{AB - BC}$; item ut pars utraque videatur sub angulo dato. Accipiatur enim in circulo BOF arcus BI, qui metiatur angulum duplum dati; agatur ex I per C recta ICO, definietur punctum O, cum sit BOC = AOB = $\frac{1}{2}$ BKI.

80. Problema II. Dantur duæ partes ejusdem rectæ AB, BC utcunque æquales, vel inæquales; petitur punctum O, e quo videantur singulæ sub datis angulis. (Fig. 45. Tab. IV.)

Fig. 45. Tab. IV.

Resolutio. Excitetur in B perpendiculum EB ad ABC, & fiant centro B anguli dati quovis radio, nempe EBD æqualis illi, sub quo videri debet AB; & EBF æqualis alteri, sub quo apparere debet BC. Ex A & C agantur ad BE parallelæ Aa, Cc occurrentes in a & c radiis BD, BF, etiam productis, si opus sit. Per a & c ducatur acR occurrens ABC productæ in R, & secans BE in e. Transferatur CA ex c in c G, & fiat GH ad cB parallela, occurrens Ba in H; tum rursus agatur HKI ad ac parallela, quæ proinde erit = c G = AC. Tandem centro A radio BH fiat arcus MN, & radio BI centro C alter arcus PQ priorem secans in quæsito puncto O.

Demonstratio. Ob parallelas Aa, Cc, BE est AB: BC = ae: ec, & quia HI ad ac itidem parallela, habetur ae: ec = HK: KI, proinde etiam AB: BC = HK: KI, & AB + BC (= AC): BC = HK + KI (= HI = AC): KI, consequenter est KI = BC, & HK = BA. Denique ex constructione est triangulum AOC æquale, & simile triangulo HBI, ideoque etiam ob HK = AB, & KI = BC, æqualia sunt, & similia triangula HBK, AOB; KBI, BOC, & anguli cognomines æquales, consequenter factum est, quod petebatur.

Fig. 46. Tab. IV.

81. Problema III. Sit (fig. 46 Tab. IV.) oculus in O constitutus, EFGH planum verticale, in cujus punctum P cadat perpendiculum ex oculo O ductum; dentur in hoc plano rectæ se ad angulos rectos in P secantes APD verticalis, & BPC horizontalis: petitur linea EAMF, cujus omnia puncta M æquali angulo AOP a BC distare videntur; uti etiam HDG angulo POD; idem est de lineis FCG, EBH, quarum singula puncta ab APD distent angulo POC, POB.

Resolutio. Sit OP = a, PA = b, Pq = y, qM = x, debebit angulus MOq æquari angulo AOP. Si sumatur OP pro sinu toto, erit PA tangens anguli AOP; uti etiam sumpto radio Oq, est Mq tangens anguli æqualis, proinde ratio Oq: qM constans, & eadem cum OP: PA; unde ob Oq = $\sqrt{OP^2 + Pq^2}$ = $\sqrt{a^2 + y^2}$ est semper $a : b$ = $\sqrt{a^2 + y^2} : x$, vel $a^2 : b^2 = a^2 + y^2 : x^2$, & $a^2 x^2 = a^2 b^2 + b^2 y^2$, seu $\frac{a^2}{b^2}(x^2 - b^2) = y^2$, quæ est æquatio ad hyperbolam, cujus semiaxis transversus est PA, conjungatus OP, centrum in P. Eodem modo erit

erit hyperbola HDG, cujus ſit idem ſemiaxis conjugatus O P, & transverſus PD; & hinc ſi fuerit PA $=$ DP, hyperbolæ EAF, HDG æquales ſunt. Sit deinde PB $= c$, P$p = z$, $pm = v$, cum debeat eſſe BOP $= m$Op, erit OP: PB $=$ Op: pm, ſeu $a : c = \sqrt{a^2 + z^2} : v$, vel $a^2 : c^2 = a^2 + z^2 : v^2$, & $\frac{a^2}{c^2}(v^2 - c^2) = z^2$, ideoque etiam EBH, FCG ſunt binæ hyperbolæ habentes eundem ſemiaxem conjugatum OP, & transverſos PB, PC. Q. E. J.

82. Si firmetur filum in O, & tendatur, ut habeat ſitum OAα, dein extremum alterum α ita moveatur, ut ſemper tangat hyperbolam AMF, pars fili percurret ſuperficiem coni hyperbolici A$\alpha\mu\varphi$FM (idem intellige fieri in reliquis hyperbolarum quatuor ramis), cujus puncta quælibet α, μ ſub eodem angulo AOP a plano horizontali OCκ πPO remota videntur. Concipiatur enim ſectio $\alpha\varphi\gamma\delta$ ad AFGD parallela; erit OP: PA $=$ Oπ: $\pi\alpha$, & Oq: qM $=$ Ov: $v\mu$; ſed cum ſit OP : PA $=$ Oq, qM, erit etiam Oπ: $\pi\alpha =$ Ov: $v\mu$.

83. Problema IV. Corpus lucidum L, v. g. candela ardens, tantummodo in linea ad AB perpendiculari attolli, vel deprimi poteſt: quæritur altitudo ejusdem ſupra AB, ſive quæritur AL, ut corpus in B poſitum maxime illuminetur. Fig. 47. Tab. IV.

Reſolutio. Sit AB $= a$, AL $= x$. Ducatur Lb ad LB infinite propinqua, & deſcribatur radio Lb arcus bc. Evidens eſt, ob angulum bLB evaneſcentem, fore triangula Bbc, LBA ſimilia, & bB: $bc =$ LB: AL; eſt autem bB ad bc ut ſpatium excipiens radios oblique, ad ſpatium, quod exciperet eosdem perpendiculariter, & illuminatio eſt reciproce ut ſpatia, quæ idem lumen excipiunt; igitur eſt illuminatio obliqua ad perpendicularem, ut LB: AL, & ſi illuminatio perpendicularis ponatur $= 1$, erit obliqua $= \frac{\text{AL}}{\text{LB}}$. Præterea ob radiorum divergentiam eſt illuminatio in ratione reciproca diſtantiæ duplicata a puncto lucido, hoc eſt ut $\frac{1}{\text{LB}^2}$; quare ſpectato utroque erit illuminatio in B ut $\frac{\text{AL}}{\text{LB}^3} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$; quæ ſi fuerit *maximum*, evaneſcet differentia $dx\,(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2\,dx\,(a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$, & habebitur $\frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ vel $a^2 = 2x^2$, aut denique $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Unde ſi fiat ADB triangulum rectangulum ad D iſoſceles, erit AD $= \frac{a}{\sqrt{2}} = x$.

Obtineri reapse hic *maximum*, patet ex differentiali secundo $-\frac{9x^2dx^2}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15x^3dx^2}{(a^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{-9a^2xdx^2 + 6x^2dx^2}{(a^2+x^2)^{\frac{7}{2}}}$, quod fit negativum substituto $\frac{a}{\sqrt{2}}$ pro x. Intelligitur id etiam, si posito $a = 1$, substituatur in $\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ quilibet alter valor pro x; v. g. si sumatur $x = 1$, fit $\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}$, seu $\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$. Idem est, sumpto x v. g. $= \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Fig. 48. Tab. IV. 84. Problema V. Sint duo corpora lucida, v. g. duo cerei æquales in L, l (fig. 48. Tab. IV.) in datis altitudinibus AL, Bl supra planum AB, ac data etiam distantia AB. Quæritur locus C in eodem plano, in quo corpus æqualiter illuminetur ab utroque lucido.

Resolutio. Sit locus quæsitus C, AC $= x$, AL $= a$, AB $= c$, CB $= c - x$, Bl $= b$; erit per Problema præcedens vis illuminandi lucidi L respectu C ut $\frac{a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, & vis illuminandi lucidi l respectu ejusdem C, ut $\frac{b}{(b^2+(c-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque ex hypothesi debebit esse $\frac{a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b}{(b^2+(c-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$, vel $\sqrt[3]{a}\sqrt{b^2+(c-x)^2} = \sqrt[3]{b}\sqrt{a^2+x^2}$. Hinc $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt{a^2+x^2} : \sqrt{b^2+(c-x)^2}$. Quærantur inter a & b duæ mediæ continue proportionales (153 Part. IV. Geom.), quarum prima sit $= f$, erit $a : f = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$. Producatur LA in E, ut sit AE $= f$, agatur item per C recta LCD. Evidens est, si fuerit CD $=$ Cl, fore C punctum quæsitum. Nam est AL : AE $=$ LC : CD $=$ LC : Cl, sive $a : f = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt{a^2+x^2} : \sqrt{b^2+(c-x)^2}$. Igitur $\frac{f\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \sqrt{b^2+(c-x)^2}$, ex qua æquatione secundi gradus eruitur $x = \frac{a^2c \pm a\sqrt{(a^2-f^2)(f^2-b^2)+c^2f^2}}{a^2-f^2}$, in quo valore sumendum est signum $-$.

Cor. I. Si fuerit $a = b$, fit etiam $f = a$, & hinc æquatio redigitur

digitur ad $x = \frac{a^2 c \pm a^2 c}{0}$, vel $x = \frac{0}{0}$, vel $x = \infty$. Verum valor fractionis $\frac{0}{0}$, facile determinatur ex prima æquatione, quæ abit in $\frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(a^2 + (c-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$, ex qua illico habetur $a^2 + x^2 = a^2 + (c-x)^2$, five $x = c - x$, aut $x = \frac{1}{2} c$. Fig. 49. Tab. IV.

Cor. II. Si fuerit (fig. 49. Tab. IV). AL, Bl ad idem planum perpendicularis, & distet a recta DE in eodem plano data quantitate DA, EB, quæraturque in DE punctum C æqualis illuminationis, eadem manet resolutio, nisi quod loco a & b sumendum sit $\sqrt{AL^2 + AD^2}$, & $\sqrt{Bl^2 + BE^2}$, quæ itidem datæ sunt. Fig. 48. Tab. IV.

Cor III. Si (fig. 48. Tab. IV.) fuerit AL $= o$, & B$l = o$, facile intelligitur, fieri $x = \frac{1}{2} c$. At si non fuerit eadem vis illuminandi utriusque lucidi, posita harum virium ratione $m : n$, ponetur $\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(c-x)^2}$, & $(c-x)\sqrt{m} = x\sqrt{n}$, sive $\sqrt{m} : \sqrt{n} = x : c - x$, & $\sqrt{m} + \sqrt{n} : \sqrt{m} = c : x = \frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$. Eodem modo si vires illuminandi sint in ratione $m : n$, devenitur ad analogiam $\sqrt[3]{am} : \sqrt[3]{nb} = \sqrt{a^2 + x^2} : \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Unde pro constructione, cum ratio $\sqrt[3]{am} : \sqrt[3]{bn}$ sit composita ex rationibus $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ & $\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$, quærendæ sunt inter a & b, uti & inter m & n duæ continuæ proportionales; prima inter illas sit f, inter has vero p, fiet $\sqrt[3]{am} : \sqrt[3]{bn} = am : fp$; unde etiam acceptis inter a & m media proportionali l, & inter f & p media proportionali k, si fiat $l : k = k : q$, erit $l : q = l^2 : k^2 = am : fp = \sqrt{a^2 + x^2} : \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$, ex quo facilis erit æquatio ad valorem x, uti in Problemate.

85. Quæ adhuc diximus, potissimum ad visionem pertinent, quæ fit uno oculo: nunc pauca nobis supersunt de ea, quæ utroque oculo peragitur. Atque imprimis experimur, quod si rem quampiam accurate videre velimus, id uno obtutu (quando objectum alicujus extensionis majusculæ est) assequi haud possimus, sed necesse sit partes alias post alias inspicere. Unde ad idem objecti punctum dirigimus utrumque oculum, ut axes utriusque oculi in eodem concurrant, atque id unum præ ceteris clare, & distincte percipimus. Sit tale objecti punctum A (fig. 50. Tab. IV), axes oculorum SA, DA; AI sit ad SD perpendicularis, & GH transeat per A parallele ad SD; dicetur nobis GH *horopter*, qui, si agatur de superficie, erit planum ad AI normale, ad quod objectum A referimus. Distantiæ AI æstimationem Fig. 50. Tab. IV.

 uni

uni usui, experientiæ, & assuetudini cernendi objecta utroque oculo, debemus, modo ea sit intra limites, quibus spatium continetur, ad quod plerumque objecta, quorum nobis usus frequentior, spectare solemus, secus enim, multum in æstimatione distantiæ decipiemur. Patet autem, cum ad idem horopteris punctum referatur per utrumque oculum objectum, id non posse haberi a nobis pro duobus, sed pro unico, licet duplex ejus in oculo utroque efformetur imago, quippe qui sciamus, res, etsi simillimas, duas distinctas haud posse in eodem loco existere.

86. Objecta reapse a nobis referri ad planum horopteris, inde facile quisque intelliget, quod si obtutus figatur in aliquo puncto A plani GH, & constituatur objectum quodpiam in B, id appareat duplex, nempe in F oculo dextero, & in E sinistro. Eodem modo si collocetur objectum cis horopterem in C, apparebit sinistro oculo in F, dextero in E; nam clauso oculo dextero disparet objectum sinistrum, & clauso sinistro oculo, dexterum disparet. Non possum hoc loco præterire, quæ *cel. d' Alembertus* inter sua dubia, quæ adversus principia in Optica recepta movit (Opusc. Mathem. Mem. 9. p. 273 & 274) de loco objecti utroque oculo visi, & quod in utriusque axe situm sit, adfert:

„ Ostendimus (inquit) adhuc, locum, ad quem objectum extra „ axem opticum situm referimus, admodum incertum, & indefinitum „ esse, manereque dubium, utrum is locus sit in radio visuali, qui ex ob- „ jecto ad oculum venit. Verum dico præterea, nequidem objecta in „ axe optico posita semper in eo axe videri. Nam ponamus utrius- „ que oculi axes (fig. 51. Tab. IV.) AE, BE dirigi versus stellam quam- „ piam E. Certum est, stellam nobis apparere multo propiorem, ac „ reapse sit. Illud equidem libens do, æstimationem ejus distantiæ „ fieri admodum imperfectam, & vagam; interim tamen fatendum „ omnino est, distantiam visu perceptam, aut apparentem, aut etiam „ existimatam, esse multum infra veram, & realem. Igitur si stella „ videretur in utroque axe optico AE, BE, appareret in utriusque „ axeos punctis *e*, *e*, quæ sine comparatione ab A & B minus distant, „ quam E. Itaque duæ viderentur stellæ in *e* & *e*, inter quas appa- „ rens intervallum est proxime idem cum AB. Interim experientia „ constat, stellam apparere unicam, quæ adeo videri debet prope me- „ dium punctum *ε* inter *e* & *e* juxta directionem linearum A*ε*, B*ε*, quæ „ diversæ sunt ab axibus opticis; & licet eæ a dictis axibus parum „ admodum aberrent, in se se tamen diversæ sunt. Atque hoc phæ- „ nomenon satis est, ut evincatur, objecta ab oculo admodum dissita „ non videri exacte in axe optico etiam tum, cum directe ea aspici- „ cimus. „ Ita quidem d'Alembertus.

Fig. 51. Tab. IV.

Verum objecti locum referimus ad *horopterem*, ad planum in quo axes optici se se intersecant, qui horopter proinde non est *ee*, sed unice per E transit, & ideo non duas, sed unam videmus stellam, utpote cum punctum concursus axium sit unicum. At distantia, quam

stellæ

ſtellæ tribuimus, multo minor eſt, quam vera? Igitur cum de ingentibus diſtantiis (præcipue dum aliorum corporum aſpectabilium nihil interponi videmus) tam incerta habeamus judicia, & quæ clare & diſtincte videntur, ea haud ita a nobis remota arbitremur, exiſtimamus, axes non in E, ſed in ε concurrere, hoc eſt, horopterem non tranſire per E, ſed per ε, & hoc unice ex phænomeno allato legitime deducitur. Hinc fit, ut pro diſtantia DE ſubſtituamus diſtantiam Dε, quippe rati, horopterem tranſire non per E, ſed per ε. Jam vero ex hoc qui ſequatur, ſtellam debere apparere in *e* & *e*, minime omnium video, cum ſemper verum ſit, nos videre ſtellam in E, in concurſu axium, & *putare* erronee, punctum E eſſe vicinius, quam ſit. Ex his denuo apparet, nihil admodum metuendum eſſe principiis Optices a dubiis, quæ d'Alembertus opponit.

87. Si ad objectum in diſtantia, ad quam clare, & diſtincte videre ſolemus, axem utriuſque oculi figamus, dein alterutrum oculum claudamus, aut manu interpoſita aſpectum objecti alterutri oculo obtegamus, hoc neque locum, neque magnitudinem mutare videbitur, idque unum erit diſcriminis, quod duobus oculis tantillo clarius videatur, quam uno. Accidit tamen iſthic res obſervatu non indigna. Si (fig. 52. Tab. IV.) teneatur ad intervallum mediocre, puta 15 vel 16 digitorum annulus FE diametri, quæ etiam 6 vel plures lineas æquet, & ſpectetur utrovis oculo S, D, quisque facile altera manu ſtylum BA per eum trajiciet. At ſi dein eundem annulum ſpectet uno oculo ex O (debet autem ſemper oculis objici annuli acies) etiam in eadem diſtantia, haud ita facile ſtylum per eum transmittet, primo ſaltem tentamine; nam ſi ſæpius id coneris, ex primo errore facillime advertes, an paullo ſtylum removere, an admovere verſus te debeas. Mihi quidem fere ſemper accidit, ut ſtylum cis annulum, velut *ba*, trajiciam, attamen alios vidi etiam ultra annulum id feciſſe. Advertendum tamen, ſtylum debere non nimis lente moveri, ut ne ſcilicet tempus ſit, cum apex ſtyli A jamjam prope annulum videtur, ex comparatione utriuſque objecti certius de diſtantia judicandi. Interim hoc experimentum evidenter docet, cum plerumque objecta utroque oculo ſpectemus, ex uſu nos facilius de diſtantia judicare, quam ſi conſideremus rem quempiam unico oculo, quæ nempe viſio nobis minus uſitata eſt. Fig. 52. Tab. IV.

88. Diximus, objecta oculis ambobus viſa apparere non nihil clariora. *Jurinus* apud *Smithium*, cum libri partem, quam uno oculo videbat, duplice candela, viciniore altera, altera remotiore illuminaret, alteram vero partem, quam utroque oculo intuebatur, candela unica, ita, ut poſterior $\frac{1}{13}$ parte minus, quam prior illuſtraretur, partem uno oculo viſam ſibi æque claram apparuiſſe ait, ac illam duobus oculis ſpectatam. Ex quo ſequi videtur, claritatem utroque oculo adhibito non niſi $\frac{1}{13}$ circiter parte creſcere, & nequaquam eſſe duplam

ejus, qua videmus uno oculo; quemadmodum videri cuipiam posset.

Ceterum quæ de utroque oculo, & axibus opticis attulimus, intelligi volumus, si ponatur uterque oculus æque bonus, neque vitio quopiam laboret. Qui sive in infantia, educatorum negligentia, sive quovis demum naturæ vitio lusci effecti sunt, haud equidem, dum distincte cernere volunt, axes oculorum ad objectum dirigunt. Verum assuetudo, & usus apud hos per aliam lineam idem præstat, quod in sano oculo natura per axem. Adeo verum est, plurima de rebus sensibus externis perceptis judicia non ex immediata impressione, sed ex habitu quodam assuetudine contracto dependere.

ARTICULUS III.

De nonnullis phænomenis, quæ ex rectilinea propagatione Lucis, & diuturnione aspectu corporum coloratorum oriuntur.

89. Si corpus lucidum exiguæ extensionis, ut instar puncti physici spectari possit, radiet per foramen cujuscunque figuræ in tabula quapiam excisum, & in quavis distantia a tabula excipiatur lux superficie quavis alterius corporis opaci, neque aliunde fortiore lumine collustrata, in hac superficie si fuerit foramini parallela, apparebit figura foramini similis, cujus centrum cum centro foraminis, & puncto lucido sint apparenter in eadem recta. Sequitur hoc ex rectilinea luminis propagatione. Cum enim punctum lucidum versus omnem partem emittat radios, etiam per foramen tot transibunt, quot in ejus plano puncta physica concipi possunt, qui adeo constituent pyramidem habentem basin superficiem illuminatam: & quoniam ponitur ea foramini parallela, ipsum planum foraminis erit sectio pyramidis basi parallela, ideoque eidem similis. At vero si foraminis planum non sit superficiei lucem excipienti parallelum, fieri potest, ut figura lucida sit similis foramini, si basis sit sectio alterna cum sectione foraminis in pyramide regulari, in aliis casibus semper erit dissimilis. Intelligitur etiam, figuram lucidam fore semper ad magnitudinem foraminis, dum foramen est parallelum superficiei lumen excipienti, in ratione distantiæ puncti lucidi a superficie illustrata ad distantiam ejusdem a foramine; si ea similitudo non habeatur, generatim verum erit, quod manente superficie sibi ipsi parallela spatium illuminatum tanto futurum sit majus, quanto majore intervallo a foramine remotum fuerit.

90. At si sol per exiguum foramen in conclave obscurum radios immittat, hi prope foramen excepti in tabula parallela spatium quidem depingent lucidum foramini simile; quando vero longius interval-

tervallum inter tabulam, & foramen eſt, quæcunque ſit figura foraminis, ſpatium illuminatum in tabula induet formam fere circularem. Si jam advertamus, e quovis puncto in omnem partem emitti radios, colligemus facile, radios intra foramen admiſſos conſtituere pyramidem luminoſam, quæ ſecetur plano foraminis, & tabulæ ad foramen parallelæ; unde ſectiones eæ ſimiles eſſe debent. Sed quia ſolis pene immenſa eſt diſtantia, coni radioſi e ſingulis diſci ſolaris punctis venientes, ita ſunt exigui, ut anguli ad verticem penitus evaneſcant, fiantque radii a ſingulis punctis dimanantes inter ſe ſe paralleli. Verum ſi ſpectemus radios, qui e punctis in extremis diametri ſolis ſitis veniunt, velut A, B (fig. 53. Tab. V.), alios habebimus conos ACB, ADB, quorum baſis AB ſub angulo fere 32′ apparet, eruntque tot, quot puncta phyſica in foramine CD. Porro hi coni producti ultra foramen alios ECF, GDH efformant, quorum ii, qui verticem in perimetro tabulæ habent, ſpatium in tabula illuminatum terminant. Unde ſi tabula propinqua ſit foramini, latera horum conorum non divergent ſenſibiliter ab axibus, utpote cum anguli ad verticem ſit tantummodo 32′, & ſpatium lucidum prope æquale, & ſimile erit foramini; verum tabula longius remota, baſes EF, GH ſe ſe perpetuo latius explicabunt, & interſectionibus ſuis unam continuam figuram circularem efformabunt, uti facile intelligitur, ſi vel pauci circuli (fig. 54. Tab. V.) centris A, B, C, D, E deſcripti ſint.

Fig. 53. Tab. V.

Fig. 54. Tab. V.

Quod ſi foramen ſit circulare, ſpatium EH (fig. 53. Tab. V.) ellipticum apparebit (niſi fuerit cum AB parallelum); & diameter figuræ ovalis minima excedet diametrum apparentem ſolis diametro ipſius foraminis CD. Cogitentur enim radi Acm, Bcn per ipſum centrum foraminis c tranſire; exhibet nm diametrum apparentem ſolis vero angulo viſam mcn = BcA; at quia, ut diximus, radii BE, BG nihil a parallelis differunt, evidens eſt, eſſe cC = nE; eodem modo eſt cD = mH; quare ut habeatur vera diameter apparens, utrinque auferenda eſt ſemidiameter foraminis circularis.

Fig. 53. Tab. V.

91. Quod ex propagatione lucis rectilinea conſequitur, alterum eſt umbra a corporibus opacis lumen intercipientibus projecta, ſeu ſpatium illud obſcurum, in quod radii incidere nequeunt. Unde figura umbræ definitur ab extremis radiis corporis limites quodammodo radentibus. Et intelligitur imprimis facile, umbram corporum creſcere, ſi corpus luminoſum ſit minus opaco, prout longius a corpore opaco diſceditur; decreſcere vero, ſi luminoſum ſit majus opaco. Dein longitudinem umbræ in plano horizontali eſſe infinitam, ſeu interminatam, quando punctum, vel ſaltem corpus exiguum lucidum non eſt altius opaco; at ſi hoc ſit magis depreſſum, quam lucidum, umbra terminatur, eſtque ejus longitudo ad altitudinem perpendicularem corporis opaci, ut eſt coſinus altitudinis lucidi ad ſinum ejuſdem altitudinis, ut vel fig. 55 intuenti (Tab. V.) manifeſtum eſt, in qua L eſt

Fig. 55. Tab. V.

eſt lucidum, AB corpus opacum, BD planum horizontale, ACB angulus metiens altitudinem lucidi, BC longitudo umbræ. Si planum, in quod cadit umbra, horizontale non ſit, uti B*d*, dato angulo DB*d*, datur etiam AB*d*; & quoniam notus ponitur altitudinis LCB angulus, habetur etiam ejus complementum BA *c*; hinc ob datam BA reperitur B*c* longitudo umbræ. Problemata, quæ de metiendis altitudinibus variorum corporum ope umbrarum proponi poſſunt, facile ſolvent Trigonometriæ non ignari. Attamen attendendum hoc loco, ſi quid accuratius de altitudine v. g. ingentium montium conſtituendum ſit, oportere habere rationem refractionis, quæ angulos altitudinis ſæpe notabiliter mutat. Eodem modo penumbræ (de qua mox agemus), ſi quæſtio ſit de umbris corporum a ſole colluſtratorum, attendendæ ſunt, quæ una cum luce illa, quæ ex cœli ſpatio, verſus quod umbræ projiciuntur, in ipſam umbram reflectitur, terminos reddunt admodum incertos, ut fere ſemper ejusmodi dimenſiones multum dubii relinquant.

92. Umbra eo apparet nigrior, quo vicinum ſpatium magis illuſtratur. Hinc fit, ut ſi idem corpus plurium lucidorum radios intercipiat, inter umbras diverſas facile diſcernamus, uti ſi (fig. 56. Tab. V.) fuerit corpus opacum AB, poſt quod conſtituantur fere in eadem recta ad diverſa intervalla cerei ardentes L, *l*, Λ, λ, apparebit ſpatium FD nigerrimum, ad quod ſcilicet nullius cerei lumen pertingere poteſt. Spatium utrinque D*d*, F*f* paullo videbitur dilutius, utpote cum ad illud perveniant radii ex λ tantum; pariter dilutius erit ſpatium *d*E, *f*G, quippe ad quod non ex λ tantum, verum etiam ex Λ lux propagatur ſine impedimento: tum rurſus dilutius apparebit ſpatium E*e*, G*g*, ad quod etiam præter λ & Λ lucidum *l* radios transmittit: verum quidquid ultra *e* & *g* fuerint ſpatii, id demum ab omnibus cereis colluſtratur, ideoque multo clarius, quam *Ee*, vel *Gg* videbitur. Ait *Bouguerus*, ſi in conclavi ſatis amplo plures adhibeantur cerei, poſſe hunc in modum 30, vel 40 gradus diverſarum umbrarum citra negotium diſcerni. *Umbra* proprie ſumpta foret, ſi in corporis ſuperficiem nihil omnino lucis incideret; quod cum rariſſime habeatur, vocamus etiam umbras illa ſpatia, quæ minore luce colluſtrantur, & fere judicium noſtrum de umbris mere comparativum eſt, dum ſcilicet ſuperficiem minore lumine illuſtratam conferimus cum altera, in quam plus lucis incidit. Conſtitue in conclavi obſcuro ſuper charta alba & nitida (fig. 57. Tab. V.) corpus quodvis A, cereum alterum non nihil majorem poſt corpus in *ml*, alterum vero ante corpus, aut e latere ML; advertes diſtinctiſſime umbram ex radiis cerei majoris *l* interceptis ortam ONRQP, & quidem ſatis nigram. Extingue tum cereum *ml*, diſparebit non modo omnis umbra OR, ſed ſpatium ipſum, in quod inciderat, multo apparebit candidius, ita, ut ſi quis dicat, umbram priorem OR fuiſſe ejusdem candoris, ac poſtea,

Fig. 56. Tab. V.

Fig. 57. Tab. V.

ea ſpatium, quod occupaverat, id minime videatur credibile. Nihilominus tamen id veriſſimum eſt, cum ardente utroque cereo in ſpatium umbroſum æque lux cerei ML inciderit, ac poſtea. Unde idea umbræ in nobis naſcitur ex comparatione ſuperficiei ONRQP, in quam lumen e cereo L tantum incidit, cum reliqua charta, quæ utriuſque lumine colluſtratur.

93. Non diſſimilia ſæpe ſunt noſtra judicia de coloribus. Noctu, ſi conclave candelis illuſtretur, nemo eſt, qui parietes, chartam, in qua interdiu ſcibere ſolet, & cetera hujusmodi corpora, quæ alba dicimus, non dicat itidem eſſe alba; interim tamen certum eſt, quod ea minime alba diceremus, ſi haberemus ante oculos aliud corpus, quod non modo lumen candelæ, ſed etiam diurnum exciperet. Circa veſperum conſtitue (fig. 58. Tab. V) corpus quodpiam opacum A ſuper charta alba, & pone cereum, aut lampadem ardentem LM, ita, ut corpus A fere ſit medium inter feneſtram F, per quam lux diurna incidit, & cereum. Projiciet corpus duplicem umbram, alteram OQP ex intercepta luce diurna, alteram RTS ex interceptis radiis cerei. Videbis poſteriorem coloris cærulei ſaturi, aut etiam vergentis in violaceum, ſiquidem dies jam jam in crepuſculum vergat; priorem vero OQP coloris citrini, aut flavi ſaturi, prout plus, minusve lucis diurnæ ſuperfuerit. Ex hoc evidens eſt, cum in ſpatium OQR cereus libere radiet, & ſola lux diurna excludatur, lumen cerei flaveſcere, & nequaquam candidum eſſe (quemadmodum id aliis multis experimentis confirmare liceret, ſi hic locus eſſet); eodem modo quia lux diurna excluſis radiis cerei in ſpatium RST incidit, ea cæruleis, aut violaceis radiis abundet, neceſſe eſt. Ceterum chartæ ſpatium album judicamus, utpote quod tam a cereo, quam luce diurna colluſtratur. Jam vero noctu retinet utique lumen cerei naturam ſuam, & nihilominus chartam flaveſcere haud judicamus, uti neque die ad veſperum vergente, dum ſola lux diurna incidit, nullo ſcilicet cereo accenſo, exiſtimamus eam cæruleſcere: unde neceſſe eſt, ut horum colorum ideæ tum demum in nobis oriantur, cum ſimul habemus alia corpora alba ante oculos, quæ magis ſint illuminata. Verum exequamur modo, quæ cæpimus. Fig. 58. Tab. V.

94. Si corpus lucidum ſit alicujus extenſionis, velut ſol ABS (fig. 59. Tab. V.), & ducantur radii ACE, BCG, erit ſpatium ED, ad quod nullus radius ſolis pertingit, adeoque oculo inter E & D conſtituto ſol videri nequit. Verum ſi oculus ponatur inter H & G, totus ei ſolaris diſcus erit aſpectabilis; ſi intra G & F collocetur, plus medietate videbit e diſco ſolis; in F accurate dimidum, inter F & E ſemper dimidio minus. Spatium hoc GE penumbra dicitur, quæ gradatim inde a G verſus E ſemper ſit nigrior, utpote cum ſemper a minore portione diſci ſolaris illuſtretur. Fig. 59. Tab. V.

Fig. 60. Tab. V. 95. Si ſphæra lucida major KMVm radiet in minorem opacam XPYp, velut ſol in Tellurem, e majoris parte minore, quam ſit hemiſphærium, radii ad minorem opacam veniunt, at hujus illuminatur pars major hemiſphærio. Res ex Geometriæ elementaris principiis clara eſt. Radius enim extremus, qui e ſphæra lucida venire poteſt, congruit cum tangente, & ſimul, tangit ſphæram opacam in poſtremo puncto, ad quod lux pertingere poteſt; igitur erit MP, mp tangens communis circulorum maximorum utriuſque ſphæræ, per quos tranſit recta ST centra conjungens, & radii ſphærarum SM, sm; TP, Tp erunt ad MP, mp perpendiculares, & paralleli bini binis; & quia in trapezio eſt SM $>$ TP, erit etiam angulus MST $=$ PTY recto minor. Idem eſt de angulis mST, pTY, conſequenter eſt pars illuminans MVm ſphæræ lucidæ, & pars non illuminata PYp minor ſemicirculo, proinde pars opacæ illuminata PXp ſemicirculo major; & quoniam id verum eſt de omnibus extremis punctis utriuſque ſphæræ, patet veritas aſſerti.

Contrarium accideret, ſi ſphæra lucida minor foret, quam opaca. Ut id clarum fiat, opus tantum eſt, ut ponatur ſphæra lucida eſſe PXp, opaca vero MVm.

Si dentur radii utriuſque ſphæræ cum diſtantia centrorum ST, facile definitur in lucida majore arcus, quo MVm a ſemicirculo deficit, vel quo PXp ſemicirculum excedit. Producantur enim tangentes MP, mp dum concurrant in E, & fiat RSr ad SE perpendicularis, erit angulus RSM $=$ angulo MES, & rSm $=$ SEm ob ſimilia triangula RSM, rSm cum MSE, mSE; jam vero arcus metiens angulos RSM, rSm addendus eſt ad MVm, ut habeatur ſemicirculus; qui arcus proinde æquatur angulo PEp, qui facile reperitur dato radio PT, & TE, quæ itidem, qua ratione determinetur, mox dicemus.

96. Si ſphæra lucida major ſit, quam opaca, hujus umbra figuram conicam habebit, eritque finita; at ſi lucida ſit minor, quam opaca, umbra erit interminata, & quo longius receditur ab opaca, eo magis dilatabitur. Si denique ſphæræ ſint æquales, umbra opacæ erit cylindrica interminata. In caſu enim primo ob angulos MST + PMS minores duobus rectis, debet tangens communis MP cum ST producta in diſtantia finita a T concurrere; uti ex eadem cauſa mp cum eadem ST, & quia præterea trapezia MSTP, mSTp ſimilia, & æqualia ſunt, concurrent tangentes in eodem puncto E cum STE. In caſu altero liquet, tangentes MH, mI ſemper magis divergere. Denique ſi ſit SM $=$ TP, erunt MP, ST parallelæ, conſequenter &c.

Ut inveniatur datis SM, TP, & ST punctum concurſus E, ſeu longitudo coni umbroſi, cogitetur Tp transferri ex S in O, & duci Op, quæ erit ad STE parallela, & triangula mOp, mSE erunt ſimilia, ac propterea mO (differentia radiorum ſphærarum) : Op ($=$ ST, ſeu diſtantiam centrorum) $=$ mS : SE, vel $=$ pT : TE.

In

In Caſu ſphærarum æqualium etiam illud facile intelligitur, hemiſphærium opacæ illuminari ab hemiſphærio lucidæ.

97. Ducantur aliæ duæ tangentes communes *nQ*, *Nq*. Si eæ producantur, & fuerit v. g. AF GB portio orbitæ lunæ L, erunt ſpatia AF, GB illa, in quibus luna eſt in penumbra. Eſt enim punctum A (in deſcenſu verſus F) ultimum, in quo totus diſcus ſolis videri poteſt, quæ ſemper verſus F fit obſcurior: ex C enim tantumodo portio, quæ eſt ſupra C*c*, videtur, & ex D portio ſupra D*d*: umbra porro ipſa incipit in F, & luna in acceſſu per ſpatium AF ſemper debet apparere pallidior; uti etiam poſt emerſionem ex G non niſi lente lumen recuperat, ac plene denique illuſtratur extra B. Hinc cum lux in acceſſu ad umbram verſus F tam debilis ſit, & ex exigua portione ſolis veniat, naſcitur difficultas obſervandi præciſum initium immerſionis in umbram, ut intra plura ſecunda etiam oculus exercitatus hæreat dubius.

98. Finieram; ſed occurrit phænomenon, quo ea, quæ a N. 85. de horoptere diximus, luculente mihi quidem confirmari videntur. Obſervaverat *D. Buffon* (Monum. Acad. Sc. Par. A. 1743), ſi corpora colorata albæ ſuperficiei, v. g. chartæ impoſita fixis, atque immotis oculis diutius aſpiciantur, manere eam impreſſionem ſat diu in oculo, ut ſi dein obtutum quis in ſuperficiem albam oculis pariter immotis defigat, appareat eadem corporis prius viſi figura, & quidem manente eadem oculi diſtantia, æqualis magnitudinis, ſed coloris prorſus diverſi (quem *accidentalem* vocat), uti ſi corpus fuerit rubrum, induat colorem viridem; ſi viride, rubrum; cæruleum, ſi flavum &c, quanquam in cæruleo hallucinatus ſit *Buffonius*, utpote cum dein figura non rubea, ſed flava vel aurantia depingatur. Dederam de hoc argumento jam An. 1761 Diſſertationem latino ſermone conſcriptam *de coloribus accidentalibus*, quam dein nonnullis novis obſervationibus auctam etiam germanice A. 1765 edidi. Conſtante experientia, & conſenſu omnium phænomenorum, qui in conſimili materia ſperari poteſt, didici, coloris cujusvis accidentalem (id eſt, eum, quo figura poſtea in ſuperficie alba apparet) eſſe illum, qui oritur ex commiſtione omnium ſeptem colorum principalium, illo uno dempto, qui eſt verus corporis color: v. g. corpus rubrum apparet dein figura viridi depictum, utpote cum viridis naſcatur, ſi aurantius, flavus, viridis, cæruleus, indicus, violaceus commiſceantur. Unde hoc oriri exiſtimem, in Diſſertatione indicata expoſui, *Buffonio* ultra nudam phænomenorum paucorum narrationem (eamque non ſatis accuratam) non progreſſo. Verum quæcunque rei cauſa ſit, id perquirere ad præſens noſtrum inſtitutum non pertinet. Id tamen omittere non debeo, colores omnes accidentales multo apparere vivaciores, ſi corpora colorata, v. g. quadratula, aut circelli e charta colorata, vel panno ſericeo exciſa, ſuperficiei nigræ imponantur.

Tab. V. Fig. 61. 99. Diviſeram folium chartæ albæ (fig. 61. Tab. V.) TL in digitos quatratos, & chartæ nigræ SR agglutinaveram circellum rubrum C, ad quem defixi aliquo tempore oculos, eorum axibus AC, BC in C concurrentibus; remota charta nigra SR defixi oculos ad punctum E in charta alba, & diligenter attendi, intra quas parallelas circulus (qui jam viridis apparebat) contineretur. Menſus dein ſum accurate diſtantias DC, DE, & ſemper deprehendi, eſſe diametrum circuli rubri ad diametrum apparentis viridis, quam proxime in ratione DC ad DE. Ut ne autem de diametro circuli viridis dubium oriretur, ſelegi diſtantias tales pro DC, DE, quæ ſemper eſſent in ratione aliqua diametri circuli rubri ad digitos integros, unum, duos, tres &c. Ex hoc autem manifeſtum eſt, diametros circulorum apparentium in ſuperficie alba creſcere ſemper in ratione diſtantiarum; id, quod fieri neceſſe eſt, ſi reapſe circulum viridem referamus ad TL: quare cum id etiam contingat, legitime inferimus, a nobis ad illud planum referri objectum, quod videmus, vel videre nos arbitramur, in quo concurrunt axes optici.

Fig. 62. Tab. V. Multo magis id evincitur e ſequente obſervatione. Ex virgæ PQ (fig. 62. Tab. V.) parieti albo TV infixæ extremo Q (erat autem PQ fere 15 digitorum) pendebat globus plumbeus R filo albo tenui ſuſpenſus. Spectabam immotis oculis ſat longo tempore eundem circellum rubrum, quo prius utebar; tum eo cum charta nigra ſubmoto, figebam obtitum ad punctum nigrum C in filo notatum; apparebat illico circulus viridis diametri LM, ipſa fili portione LM hujus coloris apparente; menſus ſum LM pone diductis eo uſque circini cruribus, donec eorum diſtantia cum LM congruere videretur. Poſt hæc ex eodem loco in eadem diſtantia ab oculo denuo aſpiciebam circulum rubrum, & eo remoto fixi oculos ad punctum O in pariete notatum; menſura diametri circuli viridis KG eodem modo capta, erat iterum quam proxime ad LM, ut DO ad DC. Itaque evidens eſt, mihi primum apparuiſſe phaſma circuli viridis in libero aere in plano verticali per filum QR tranſeunte; dein vero in plano TV; ſemper ſcilicet in plano ad DO perpendiculari, in quo axes optici concurrebant.

Si quis hunc in modum ſæpius intueatur circellum rubrum, & dein aut verſus ædificium multis orgyis diſſitum, aut etiam nubem aliquam convertat oculos, circulus ingens viridis apparebit, eoque putabitur major, quo major exiſtimabitur aut ædificii, aut nubis illius diſtantia. Quod ſi autem obtutum ſine certo termino quis in cælum conjiciat, prout axes optici in minore vel majore intervallo concurrent, ita etiam circulus viridis minor, majorve judicabitur.

100. Colorem porro, qui in ſuperficie alba apparere debet, poſtquam oculi ſat diu in circellum, vel quatratulum certi coloris defixi fuerunt, ſatis accurate determinari ex Propoſ. VI. Part. II. Lib. I. Opt. Newtoni in adducta Diſſertatione oſtendi, modo etiam colores affines

affines, ut monui, cum colore vero corporis in miſſione omittantur. Verum adverti poſtea, colorem accidentalem cujusvis dati longe accuratius inveniri, ſi circulus non dividatur in ea ratione, quam habent longitudines ſingulorum in ſpectro prismatico, ſed tribuatur in ſeptem partes æquales. Numeri vero illi, quos aſſignat Newtonus, nempe pro rubro $\frac{1}{9}$, pro aurantio, & indico $\frac{1}{16}$, pro flavo & cæruleo $\frac{1}{10}$, pro viridi & violaceo denuo $\frac{1}{9}$, per ſe ſe vitioſi ſunt, ut ſatis oſtendit *R. P. Benvenuti* in alias laudata Diſſertatione de lumine. Sed neque illi faciunt ſatis, quos Benvenutus Newtonianis ſubſtituit; hos enim ſi ſequamur, & in eadem ratione dividamus circulum in gradus, arcui repræſentanti colorem rubrum (fig. 63. Tab. V.) obtingent RA $= 45^{\smile}$, Fig. 63. Tab. V.
qui exhibet aurantium AF $= 27^{\smile}$; flavum FV $= 48^{\smile}$, viridem VC, & cæruleum CI $= 60^{\smile}$, indicum IV $= 40^{\smile}$, violaceum VR $= 80^{\smile}$. Jam vero tota Newtoni reſolutio in eo conſiſtit, quod ſpectet colores inſtar virium agentium, quæ in centro gravitatis cujusvis arcus ſint collectæ. Cum igitur arcui violacei coloris maximus graduum numerus tribuatur, ejus centrum gravitatis viciniſſimum eſt centro communi omnium O; & cum reliqui arcus fere omnes inter ſe etiam inæquales ſint, vires colorum neceſſario inæquales ſumuntur. Ergo neceſſario aliqui colores prædominantur; & haud video, qua ratione ex talibus, inter quas alii aliis ſint fortiores, imprimis oriri poſſit color albus (qui requirit ſummam virium æqualitatem, ut nullus color vincat alterum), dein qua ratione non fortius agant colores, quarum refrangibilitas major eſt, ut patet in violaceis, & rubris, cum tamen magis refrangibiles ſint ceteris debiliores, & minorum virium ad faciendam impreſſionem in oculum. In Diviſione Newtoniana hac arcus ſequuntur rationem refrangibilitatis; atqui virium ratio contraria eſt, & ſiquidem velis ex omnibus miſtis oriri colorem accurate album, vires, non refrangibilitas, in omnibus radiis eædem eſſe debent. Quod ſi ſit, evidens eſt, requiri arcus RA, AF &c (fig. 64. Tab. V.) pro ſingulis æquales, quorum centra gravitatis æqualiter diſtent a centro communi O. Fig. 64. Tab. V.

Interim tamen habebit etiam diviſio circuli in fig. 63 ſuum uſum, dum nempe miſcendi ſunt diverſi generis radii lucis. Nam ſi v. g. ſumas ex rubris radios, qui in ſpectro prismatico occupent ſpatium circulare, cujus diameter ſit 2 linearum, & æquam portionem ex cæruleis velis admiſcere, in ſpatio cæruleo ſumendus erit pariter circulus, cujus diameter ſit ad 2 lineas, ut $\sqrt{60}$ ad $\sqrt{45}$, ſeu ut $\sqrt{8}$ ad $\sqrt{6}$ & ſic de aliis. At ſi dein quæras, quis color mixtus prodeat, ſumendi ſunt arcus, colores miſcendos exhibituri, æquales, ut fig. 64.

FINIS PARTIS I.

INDEX CAPITUM
ET
ARTICULORUM.

Pag.

CAPUT I. De præcipuis affectionibus Luminis.

ARTICULUS I. De Corporibus lucentibus, natura Luminis, & ejusdem propagatione 7

ARTICULUS II. De ſucceſſiva luminis propagatione, & aberratione ſiderum 18

ARTICULUS III. De Heterogeneitate Luminis, & refractione 23

AVTICULUS IV. De vicibus alternis facilioris reflexionis, & tranſmiſſus 32

ARTICULUS V. De reflexione Luminis, & corporibus ſpecularibus. 39

ARTICULUS VI. De corporibus Opacis, Semiopacis, nonnullis Phosphoris, & diffractione Luminis 44

CAPUT II. Prima principia Optices 49

ARTICULUS I. De conſtitutione oculi, & efformatione imaginum objectorum externorum generatim 49

ARTICULUS II. De Magnitudine, diſtantia, loco, & motu apparente objectorum, nec non de viſione per duos oculos 57

ARTICULUS III. De nonnullis phænomenis, quæ ex rectilinea propagatione lucis, & diuturniore aſpectu corporum coloratorum oriuntur 70

Errata

Errata.

Pag.	Lin.		*Corrige*
11	27 & 28	lucida	lucido
13	18	efluviorum	effluviorum
35	21	Vien	Vien.
36	11	craffituto	craffitudo
—	21	cum	cur
37	25	quod	quot
48	26	cærulæe	cæruleæ
53	13	*a*MSZ	*a*MNZ
57	penult.	arcu	arcus
58	36	affumi,	affumi)
60	17	, ad *e*	ad *e*,
66	22	$\sqrt{b^2 + (c - x^2}$	$\sqrt{b^2 + (c - x)^2}$

INSTITUTIONUM OPTICARUM

PARS SECUNDA,

SIVE

DIOPTRICA

DE

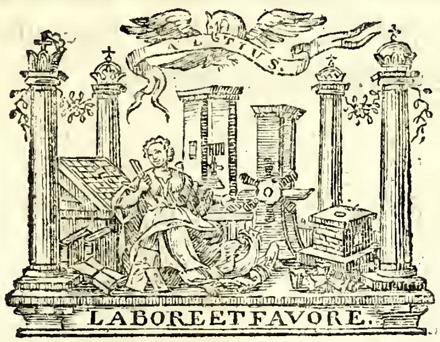
VISIONE PER RADIOS REFRACTOS.

CONSCRIPTA IN USUM TIRONUM

A

CAROLO SCHERFFER

PRESBYTERO, PHILOS. DOCT. ET MATHES. SUBLIM. PROF. CÆS. REG.



VINDOBONÆ,

TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

MDCCLXXV.

Nomine *Dioptrices* ea potiſſimum complectimur, quæ pertinent ad viſionem per vitra ſuperficiei ſphæricæ, in quibus radii lucis refringuntur, ſeu dein ſimplicia adhibeantur, ſeu pluribus inter ſeſe certo modo conjunctis conſtruantur tubi optici, aut microſcopia, uti hæc viſionis inſtrumenta uſque ad noſtram ætatem in uſu erant, qua maximo Dioptrices emolumento vitiis partim a figura ſphærica pendentibus, partim ex diverſi generis radiorum diverſa refractione ortis, remedia adhiberi cæperunt. Unde e commodo tironum nos facturos putavimus, ſi primum de his ageremus, quæ emendationi fundamentum præberent. Neque tamen exiſtimandum eſt, a nobis prætermitti alia quædam, quæ licet huic uſui deſtinata non ſint, ſcitu tamen præ ceteris digna videntur.

CAPUT I.

ARTICULUS I.

DE
REFRACTIONE IN LENTE RADIORUM LUCIS AXI INFINITE PROPINQUORUM.

1.

Definitio. *Lentis* nomine intelligimus vitrum, cujus vel utraque pars ſuperficie ſphærica prædita eſt, vel quod ex altera parte ſit planum, ex altera autem ſuperficiem ſphæricam habeat. Poteſt autem imprimis utraque ſuperficies eſſe convexa, vel utraque concava. In primo caſu lens convexa dicetur; in altero cava. Si altera ſuperficies ſit plana, convexa altera, erit lens plano-convexa, uti etiam plano-concava, ſi ſuperficierum altera ſit plana, altera concava. Quod ſi denique ſuperficies una connexa, altera cava ſit, ita, ut radius cavitatis excedat radium convexitatis, ex forma lunulæ, quam ejus ſectio exhibet, meniſcus dici conſuevit, etſi hac voce comprehendamus illas quoque, in quibus radius cavitatis ſit minor, quam radius convexitatis.

2. Si (fig. 1. Tab. I.) AITB exhibeat lentem quamcunque, & Fig. 1.
AB producta conjungat centra ſuperficierum C & K, dicetur AB *axis* Tab. I.

lentis, *diameter* vero recta ex M ad N ducta. Si producatur utrinque axis AB, & aliquod punctum physicum radians collocetur in hac recta producta, v. g. in O, erit objectum in axe lentis situm. Si jam ponatur arcus AI admodum parvus, ut ejus magnitudo tuto negligi possit, is non censetur differre a recta, & radius ex O in I incidens, dicetur axi infinite propinquus. Si porro cogitentur radii lucis ex O ad omnia puncta inter A & I posita venire, idque fieri in omnibus sectionibus lentis per axem transeuntibus, orietur conus radiosus, cujus basis habet radium AI, velut si lente circa axem rotata ex superficie trianguli OIA ad A rectanguli conus generaretur. Ex iis, quæ Part. I. N. 30 diximus, evidens est, radium OA transire per superficies lentis irrefractum, utpote qui ad utramque perpendicularis est. At vero etsi sumatur arcus AI admodum parvus, tangens tamen superficiei in I non est perpendicularis ad OI, sed inclinata. Intelligatur itaque radius OI productus sine refractione in G; ducatur ex centro K superficiei MAN radius KI, erit KIG angulus incidentiæ, ideoque si lux veniat ex medio rariore in densius, velut ex aere in vitrum, refringetur versus perpendiculum KI, ita, ut si dein nulla amplius sequeretur refractio, radius in I refractus secaret axem lentis productum in P. Et quoniam id contingeret omnibus radiis lucis in toto cono, de quo supra diximus, contentis, radii ex O venientes unirentur iterum in puncto axis P, quod punctum *focus* ex refractione per primam superficiem lentis MAN dicitur.

Verum dum radius lucis ex I versus P tendens occurrit in puncto T secundæ lentis superficiei, denuo patitur refractionem, eritque, ducto ad T ex centro C radio CT, angulus incidentiæ ITC, consequenter in exitu e vitro in aerem ab hoc perpendiculo CT recedet aliquantum, & occurret axi in F, quod punctum erit focus ex duplice refractione in lente facta.

Denique notandum, quod si radii ITP, vel TF habeant post unam, vel duplicem refractionem talem situm, ut producti non occurrant axi OABP ultra lentem respectu objecti O, sed ex eadem parte, in qua est objectum, radii perpetuo post lentem ab axe divergunt, & dicuntur habere focum *virtualem*, quem nobis in formulis semper indicabit signum —, nempe illud punctum axis, ad quod non ipsi radii, sed horum productiones concurrunt.

3. Id igitur nobis in præsens agendum, ut inveniamus debitam expressionem tam foci P ex unica refractione, quam alterius F, qui habetur per duas refractiones, sive potius distantiæ horum focorum a secunda lentis superficie, BP, & BF. Ponemus autem ab initio lentem utrinque convexam, cujus radius convexitatis MBN sit $CB = CT = R$; convexitatis autem MAB radius sit $KA = KI = r$, centris superficierum in C & K positis. Præter ea, quæ jam numero priore constructa posuimus, demittatur ex K ad radium incidentem productum

OIG

OIG perpendiculum KG, uti etiam alterum KH ad radium ſemel refractum in I, ſive ad IP. Eodem modo intelligantur radii PI, FT verſus D & E producti, & ad eos fiant ex C perpendicula CD, CE. Evidens eſt, ſumpto ſinu toto KI, fore KG ad KH in ratione ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, quando lux venit ex aere in vitrum, cum ſit KIG angulus incidentiæ ad I, & IP radius refractus, ideoque KIH angulus refractionis. Sit ratio hujus incidentiæ in hac hypotheſi ad ſinum refractionis m ad n, dicaturque KG $= p$; erit $m : n =$ KG : KH $= p$: KH, & HK $= \frac{np}{m}$. Eodem modo liquet, eſſe CTD angulum incidentiæ, & CTE angulum refractionis in egreſſu lucis per punctum T e vitro in aerem, & proinde erit CD : CE $= n : m$, & ſi dicatur CD $= q$, fiet CE $= \frac{mq}{n}$. Denique ponatur OA $= d$, axis, ſeu craſſitudo lentis AB $= c$, BP $= z$, BF $= x$; & hiſce ita habentibus aggrediamur ſolutionem problematis.

4. Quoniam arcus admodum parvus AI pro recta haberi poteſt, triangula OAI, OGK ad A & G rectangula, & angulum O habentia communem, in quibus ob exilitatem anguli ad O catheti OG, OA ab hypotenuſa OK, OI nil differunt, præbent analogiam OK : OA = KG : AI, ſeu adhibitis valoribus literalibus $d + r : d = p :$ AI $= \frac{dp}{d+r}$. Ex eadem cauſa triangula rectangula PHK, PAI dant PH : PA = KH : AI, vel PB + AB − AK : PB + AB = KH : AI, id eſt $z + c - r : z + c = \frac{np}{m} :$ AI $= \frac{np\,(z+c)}{m\,(z+c-r)}$. Habemus igitur $\frac{dp}{d+r} = \frac{np\,(z+c)}{m\,(z+c-r)}$, vel $\frac{d}{d+r} = \frac{nz+nc}{mz+mc-mr}$, facta reductione, & omiſſo communi denominatore $dmz + dcm - dmr = dnz + dcn + nrz + nrc$, ac $dmz - dnz - nrz = dmr + dcn - dcm + nrc$, ac tandem $z = \frac{dmr + dc\,(n-m) + nrc}{d\,(m-n) - nr}$.

Si agatur de unica refractione in ſuperficie MAN, evidens eſt, fore AB $= c = o$, & tum fiet PB $= z =$ PA; hinc formula inventa evadet $\frac{dmr}{d\,(m-n) - nr} = z$.

Verum ſi radius ad I refractus iterum egrediatur e vitro, patet, fore triangula (ob arcum BT nil a recta differentem) PBT, PCD ſimilia, & PD : PB = CD : BT, ſeu cum PD a PC ſenſibiliter non diſcrepet, $z + R : z = q :$ BT $= \frac{qz}{z+R}$. Item triangula ſimilia

 FCE.

FCE, FBT dant FC: FB $=$ CE: BT, vel $x + \mathrm{R} : x = \frac{mq}{n}$: BT $= \frac{mqx}{nx + n\mathrm{R}}$. Est igitur $\frac{qz}{z + \mathrm{R}} = \frac{mqx}{nx + n\mathrm{R}}$, aut $\frac{z}{z + \mathrm{R}} = \frac{mx}{nx + n\mathrm{R}}$, facta reductione $nzx + n\mathrm{R}z = mzx + m\mathrm{R}x$, vel $m\mathrm{R}x = (nx + n\mathrm{R} - mx)z$, & $\frac{m\mathrm{R}x}{n\mathrm{R} - mx + nx} = z$.

5. Obtinuimus duplicem expressionem de z; eritque propterea $\frac{dmr + dcn - dcm + cnr}{dm - dn - nr} = \frac{m\mathrm{R}x}{n\mathrm{R} - mx + nx}$; si reductio fiat ad communem denominatorem, fiet $dmn\mathrm{R}r + dcn^2\mathrm{R} - dcmn\mathrm{R} + cn^2r\mathrm{R} - dm^2rx - dcmnx + dcm^2x - cmnrx + dmnrx + dcn^2x - dcmnx + cn^2rx = dm^2\mathrm{R}x - dmn\mathrm{R}x - mn\mathrm{R}rx$, & factis reductionibus $x = \frac{dmn\mathrm{R}r - cdmn\mathrm{R} + cdn^2\mathrm{R} + cn^2\mathrm{R}r}{dm^2r + dm^2\mathrm{R} - dmnr - dmn\mathrm{R} - mn\mathrm{R}r + 2cdmn - cdm^2 + cmnr - cdn^2 - cn^2r}$.

6. Crassitudo lentis in pluribus casibus non attenditur; unde si ponatur $c = o$, formula abibit in $\frac{dmn\mathrm{R}r}{dm^2(\mathrm{R} + r) - dmn(\mathrm{R} + r) - mn\mathrm{R}r} = \frac{dn\mathrm{R}r}{d(m - n)(\mathrm{R} + r) - n\mathrm{R}r}$; & facile intelligitur, manere eandem distantiam foci x, contempta lentis crassitudine, seu objecto obvertatur convexitas MAN, cujus radius est $= r$, seu altera MBN, quæ habet radium $= \mathrm{R}$; at vero si crassitudinis habenda sit ratio, res non perinde sese habet, quippe si R & r habeant diversos valores, in numeratore termini $- cdmn\mathrm{R} + cdn^2\mathrm{R}$, & in denominatore $cmnr - cn^2r$ diversi quoque fiunt ab iis, qui haberentur permutatis radiis.

7. Neglecta lentis crassitudine formula $x = \frac{dn\mathrm{R}r}{d(m - n)(\mathrm{R} + r) - n\mathrm{R}r}$ facile aliis lentium speciebus accommodari potest. Nam posito I° $\mathrm{R} = r$, habebitur formula distantiæ foci lentis isosceliæ $x = \frac{dnr}{2d(m - n) - nr}$.

II° Si ponatur $r = \infty$, exhibebit focum radiorum vitri plano-convexi, objecto superficie plana obversa $x = \frac{dn\mathrm{R}\,\infty}{d(m - n)\infty - n\mathrm{R}\infty} = \frac{dn\mathrm{R}}{d(m - n) - n\mathrm{R}}$, & si ponatur $\mathrm{R} = \infty$, erit $x = \frac{dnr}{d(m - n) - nr}$, quæ a priore non differt, nisi radio convexitatis. Unde sequitur etiam, in eodem vitro plano-convexo manere eundem focum, sive convexitas, sive superficies plana objecto obvertatur. At non idem est, si ratio habeatur crassitudinis lentis. Quod ut planum fiat, opus tantum est, in formula foci N. 5. pro R vel r ponere ∞.

III°. Si vitrum ſit utrinque cavum, radii AK, & CB ſitum contrarium acquirunt, conſequenter in formula focus uterque acquirit ſignum negativum, & habebitur $x = \frac{dnRr}{-d(m-n)(R+r)-nRr} = \frac{-dnRr}{d(m-n)(R+r)+nRr}$. Ex quo intelligitur, focum fieri negativum ſeu virtualem; ſi ponatur $R=r$, fit $x = \frac{-dnr}{2d(m-n)+nr}$ pro lente cava iſoſcelia.

IV°. Si accipiatur r negative, & $R=\infty$, obtinetur pro vitro plano-concavo focus $x=\frac{-dnr}{d(m-n)+nr}$.

V°. Poſito r poſitivo, & R negativo, pro vitro convexo-concavo fit $x = \frac{-ndRr}{d(m-n)(r-R)+nRr}$, & ſiquidem ſit $r > R$, denominator eſt poſitivus, & meniſcus habet focum virtualem; at ſi $r < R$, fieri poteſt, ut pro diverſis valoribus quantitatis d etiam denominator ſit negativus, ideoque meniſcus acquirat focum poſitivum, aut realem. Si denique $R=r$, formula evadit $x = \frac{-ndR^2}{nR^2} = -d$, hoc eſt, ſi ſphæricitatum radii ſint æquales, contempta craſſitudine vitri, radii lucis irrefracti manent, & non niſi in ipſo objecto concurrunt.

VI°. Si in formula pro foco ex unica refractione in ſuperficie ſphærica (4) $z = \frac{dmr}{d(m-n)-nr}$ ponatur r negativus, id eſt, ſi radii ex aere incidant in medium denſius concavum, fit $z = \frac{-dmr}{d(m-n)+nr}$; quare tum habetur focus virtualis. Si radii lucis in eadem hypotheſi egrederentur e medio denſiore in rarius, m & n permutandæ forent, & haberetur $z = \frac{-dnr}{d(n-m)+nr}$; & quia $m > n$, fieri poteſt, ut denominator ſit negativus; continget etiam, ut focus evadat poſitivus ſi fuerit d quantitas ſat magna.

8. Poſtquam formulam N. 6 $x = \frac{dnRr}{d(m-n)(R+r)-nRr}$ omnis generis lentibus applicuimus, videamus modo, an & quando foci ſint reales, vel virtuales, ſi diverſi valores quantitati d, ſive diſtantiæ objecti a lente, tribuantur. Apparet autem illico, x habere valorem poſitivum, quando $d(m-n)(R+r)$ eſt majus, quam nRr; negativum vero, dum minus eſt, & infinitum, ſi fuerit $d(m-n)(R+r) = nRr$;

nRr; itaque quando in lente utrinque convexa eſt $d > \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$, focus eſt realis, ſi $d < \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$, focus eſt negativus, ſeu virtualis, & ſi $d = \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$, focus eſt infinitus, hoc eſt, radii e lente emergentes exeunt inter ſeſe paralleli, & non niſi in diſtantia infinita cum axe concurrunt.

Ponamus $d = \infty$, fiet formula $x = \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$. Dum $d = \infty$, radii lucis veniunt ad lentem inter ſe paralleli. Cum prius invenerimus, radios exire e lente parallelos, ſi punctum radians ſit in diſtantia $= \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$, & nunc viderimus, radiorum parallele incidentium eſſe focum $= \frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$, evidens eſt, objecto in foco radiorum parallelorum collocato, radios e lente emergere parallelos. Sequitur hinc

I°. Si radii incidant paralleli in lentem iſoſceliam, fore focum $x = \frac{mr}{2(m-n)}$ (N. 7. I°).

II°, Focum radiorum parallelorum vitri plano-convexi eſſe $x = \frac{mr}{m-n}$, nempe duplo majorem, quam lentis iſoſceliæ.

III°. Si lens ſit utrinque cava, focum radiorum parallelorum eſſe $x = \frac{-nRr}{2(m-n)}$, eundem nempe magnitudine, ac in lente utrinque convexa.

IV°. Si Lens ſit utrinque cava & iſoſcelia, pro iisdem radiis obtineri focum $x = \frac{-nr}{2(m-n)}$.

V°. Lentem plano-concavam habituram focum radiorum parallelorum $\frac{-nr}{m-n}$.

VI°. In meniſcis focum pro radiis parallele incidentibus eſſe $\frac{-nRr}{(m-n)(\mp r \pm R)}$, qui erit poſitivus, ſi $-r+R$, aut $r-R$ fuerit quantitas negativa.

9. Quando citra additum, aut nulla facta diſtantiæ objecti mentione, dicimus lentem habere tantum focum, vel eſſe foci tanti; v. g. trium pedum, unius digiti &c, ſemper intelligitur focus radiorum parallele

allele in lentem incidentium. Verum quando focus lentis mediocris est, distantiæ magnæ, etsi infinitæ non sint, satis sunt, ut radii incidentes pro parallelis haberi possint. Quanta autem in casu particulari distantia pro data lente requiratur, ut focus a foco radiorum parallelorum sensibiliter non differat, facilius ex sequentibus determinabimus. Eodem modo dicemus, qua ratione determinetur focus lentis, quando radii convergentes ad aliquod punctum ultra lentem positum adveniunt, postquam formulas ad commodiorem expressionem reduxerimus; quem in finem sequens subjicimus

10. Theorema I. Lenti cuivis semper substitui potest lens isoscelia manente eadem longitudine foci.

Demonstratio. Dividatur in formula $x = \frac{dnRr}{d(m-n)(R+r)-nRr}$ tam numerator, quam denominator per $\frac{2}{R+r}$, fiet $x = \frac{dn \times \frac{2Rr}{R+r}}{2d(m-n) - \frac{nRr}{R+r}}$; ponatur $\frac{2Rr}{R+r} = \varrho$; habebitur $x = \frac{dn\varrho}{2d(m-n)-n\varrho}$; sed hæc est formula lentis isosceliæ, cujus radius convexitatis est $=\varrho$; quare si fiat $R+r : 2R = r : \varrho$, habebitur radius convexitatis lentis isosceliæ, quæ habeat eundem focum x cum lente data, in qua radii convexitatum sint R & r. Potest igitur &c. Q. E. D.

11. Corollarium. Per se intelligitur, theorema facile extendi ad omnes lentium species. Si v. g. velis vitro plano-convexo substituere lentem utrinque convexam, pone $\frac{dnr}{d(m-n)-nr} = \frac{dn\varrho}{2d(m-n)-n\varrho}$, fiet $2dr(m-n) - nr\varrho = dr\varrho(m-n) - nr\varrho$, sive $2r = \varrho$.

12. Theorema II. Neglecta lentis crassitudine si objectum collocetur in ipso foco, focus semper erit in eadem distantia a lente, in qua prius erat objectum positum; seu focus, & distantia objecti semper possunt permutari.

Demonstratio. Ut id evidens fiat, opus tantum est, ut in formula $x = \frac{dnRr}{d(m-n)(R+r)-nRr}$ quæratur expressio distantiæ d per x, & fiet $dx(m-n)(R+r) - nRrx = dnRr$, sive $dx(m-n)(R+r) - dnRr = nRrx$ & habebitur $d = \frac{xnRr}{x(m-n)(R+r)-nRr}$. Est autem secundum æquationis membrum nil aliud, quam expressio foci, dum objectum a lente habet distantiam x; igitur &c. Q. E. D.

13. Problema I. Formulam $x = \frac{dnRr}{d(m-n)(R+r) - nRr}$ reducere ad commodiorem expressionem, data distantia foci radiorum parallelorum.

Resolutio. Formula proposita resolvitur in hanc analogiam $d(m-n)(R+r) - nRr : nrR = d : x$. Dividatur prima ratio per $(m-n)(R+r)$, fiet $d - \frac{nRr}{(m-n)(R+r)} : \frac{nRr}{(m-n)(R+r)} = d : x$. Est autem (8) $\frac{nRr}{(m-n)(R+r)}$ expressio foci radiorum parallelorum; qui si detur, & dicatur $= f$, analogia postrema abibit in $d - f : f = d : x$, ideoque $x = \frac{df}{d-f}$. Q. E. F.

14. Corollarium I. Quia per Theor. I. cuivis lenti substitui potest lens isoscelia, evidens est, solutionem pertinere ad omnis generis lentes, ita, ut id unum attendendum sit, an focus radiorum parallelorum sit positivus, an vero negativus, & siquidem postremum contingat, tribuendum erit quantitati f signum negativum. Exempli causa in vitris concavis fiet $x = \frac{-df}{d+f}$.

15. Coroll. II. Si detur focus x pro data distantia objecti d, facile invenitur focus radiorum parallelorum, nam si dicatur $x = a$, $f = x$, erit $a = \frac{dx}{d-x}$, seu $ad - ax = dx$, vel $\frac{ad}{d+a} = x$.

16. Coroll. III. Si radii convergant versus aliquod punctum ultra lentem positum, distantia puncti convergentiæ a lente sumenda est negativa, seu in formula sumendum est $-d$. Hoc posito fiet $x = \frac{-df}{-d-f} = \frac{df}{d+f}$, ideoque si lens sit convexa, seu si f positiva quantitas, x semper erit positivus focus. Si vero sit f focus negativus in formula $x = \frac{-df}{d+f}$ in præsente hypothesi fiet $\frac{df}{-d+f} = x$. Cum proinde possit esse $f > d$, vel $f < d$, aut etiam $f = d$; focus erit positivus, negativus, aut infinitus.

17. Coroll. IV. In Theorem. II. diximus, objectum in foco collocatum habere focum æqualem distantiæ, qua prius a lente remotum erat. Quando focus est negativus, probe notandum, objectum in eo non aliter collocari posse, nisi tributa illi distantia negativa, hoc est, nisi fiat, ut radii incidant ex altera parte lentis convergentes ad illud punctum, in quo prius erat focus ex radiis divergentibus. Nam si in formula $x = \frac{-df}{d+f}$, quæratur expressio quantitatis d, fiet $dx +$

df

$df = -fx$, adeoque $\frac{-fx}{x+f} = d$. Jam vero quemadmodum in formula $x = \frac{-df}{d+f}$ intelligitur, focum virtualem x, & diſtantiam d objecti, ex quo radii divergunt, eſſe ex eadem parte lentis, ita etiam in altera $d = \frac{-fx}{x+f}$ exprimitur, diſtantiam foci d, & puncti, ad quod radii convergunt, nempe x, eſſe ex eadem lentis parte.

18. Coroll. V. Si detur focus radiorum parallelorum, & quæratur, quanta debeat eſſe diſtantia objecti, ut radii poſſint cenſeri paralleli, conſtituendum erit prius, quæ quantitas reſpectu foci f contemni poſſit? Erit enim hæc pro diverſa magnitudine f etiam diverſa. v. g. Si focus f ſit duorum pedum, $\frac{1}{10000}$ pars de f fere inſenſibilis fiet. Dicemus inferius, ex focis poſitivis lentium convexarum minimum eſſe focum radiorum parallelorum, quamdiu d eſt poſitiva; unde ſine errore ſenſibili focus actualis objecti habentis diſtantiam d poterit eſſe major, quam f, $\frac{1}{10000}$, ſeu 0,0244 lineæ. Ponatur igitur $f + \frac{1}{10000} = \frac{df}{d-f}$, & quæratur d; fiet $10000\,df - 10000\,ff + d - f = 10000\,df$, ſeu $d = 10000\,ff + f$. In noſtro exemplo, ſi $f = 2$ ped., fiet $d = 40002$. ped.

19. In poſtremo corollario promiſimus nos oſtenſuros, ſumpta d poſitiva, minimum focum poſitivum eſſe radiorum parallelorum. Patebit hoc ex formula $x = \frac{df}{d-f}$, ſeu potius ex analogia $d - f : d = f : x$ in qua manifeſtum eſt, antecedens primæ rationis eſſe minus conſequente, ideoque etiam erit in altera ratione $f < x$. Verum quando d ſit ∞, prima ratio $\infty - f : \infty$ ſit ratio æqualitatis, conſequenter etiam tum habetur $f = x$. Igitur quandocunque d eſt quantitas finita, focus x major eſt, quam f, ſeu focus radiorum parallelorum. At ſi accipiatur d negativa pro radiis convergentibus, analogia eſt $-d - f : -d = f : x$, vel $d + f : d = f : x$. In hac hypotheſi d decreſcere poteſt ultra quemcunque limitem, & facta ea $= \frac{1}{\infty}$, fiet $f : \frac{1}{\infty} = f : x$, & focus x pariter fiet infinite parvus.

In lentibus cavis habentibus focum negativum, analogia eſt $d + f : d = -f : x$. Atqui quamdiu d eſt finita, & poſitiva, eſt $d + f > d$; erga etiam $-f > x$, quod pariter erit negativum. Pa-

tet autem, discrimen inter $d + f$ & d eo fore majus, quo d minus fuerit; igitur etiam quando distantiæ d parvæ sunt, foci negativi x erunt multo minores, quam dum distantiæ d sunt ingentes. Unde sequitur, cum d fit $= \infty$, focum negativum x fieri maximum. Sed si accipiatur $- d$ pro radiis convergentibus, analogia abit in $f - d : - d = - f : x$. Jam diximus, si primus terminus sit negativus, seu $f < d$, fore x negativum; & si $f > d$, x pariter habere valorem positivum. In hypothesi igitur, quod $f < d$, eo erit antecedens $f - d$ majus consequente, quo fuerit d minus, eo vero magis excedetur antecedens a conseqnente, quo d propius accesserit ad quantitatem f. Unde necesse est, ut evanescente $- d$, evanescat etiam x; abeunte $- d$ in infinitum, fiat $- f = x$ (ut quidem aliunde constabat); & quando $- d = - f$, fiat $x = \infty$, seu ut radii ad focum parallelorum convergentes e lente exeant inter se paralleli.

20. In Optica annotavimus, in foco positivo depingi objecti imaginem, si radii excipiantur in tabula, vel charta alba. Sequitur hinc, posse hac ratione inveniri focos lentium, si nempe mensuretur non modo distantia objecti, sed etiam illius imaginis a lente. Quando lentes habent focos longiores, & radii paralle incidentes haberi nequeunt, sæpius sumenda sunt objecta lenti satis vicina, quo casu foci fiunt quandoque ita longi, ut spatium, v. g. intra conclave, vel ambulacrum haud ita longum, iis mensurandis non sit. Quare locus est sequenti Problemati.

21. Problema II. Quæritur distantia objecti a lente habente focum positivum, ut summa distantiarum objecti, & foci a lente sit omnium minima.

Resolutio. Sit distantia foci $= x$ distantia objecti $= y$, debebit $dy + dx$ evanescere in casu *Minimi.* jam vero est $x = \frac{ynr}{2y(m-n) - nr}$,

$dx = \frac{nrdy}{2y(m-n) - nr} - \frac{2dy(m-n)nry}{(2y(m-n) - nr)^2}$; quare fiet $\frac{nrdy}{2y(m-n) - nr}$

$- \frac{2dy(m-n)nry}{(2y(m-n) - nr)^2} + dy = o$, seu $nr(2y(m-n) - nr) - 2(m-n)nry$

$+ (2y(m-n) - nr)^2 = o$, item $nr - \frac{2(m-n)nry}{2y(m-n) - nr} + 2y(m-n)$

$- nr = 2y(m-n) - \frac{2(m-n)nry}{2y(m-n) - nr} = o$, omnibus per $2y(m-n)$

divisis, & facta transpositione obtinetur $1 = \frac{nr}{2y(m-n) - nr}$, vel

$2y(m-n) = 2nr$; $y = \frac{2nr}{2(m-n)}$, est autem $f = \frac{nr}{2(m-n)}$; igitur $y = 2f$. Jam vero constat, distantiam foci cum distantia objecti permutari,

ri, quare si ponatur $x = \frac{2f \times nr}{4f(m-n) - nr}$, & in secundo membro numerator, & denominator dividatur per 2 $(m-n)$, obtinebitur $x =$

$$\frac{2f \times \frac{nr}{2(m-n)}}{2f - \frac{nr}{2(m-n)}} = \frac{2ff}{2f - f} = 2f.$$

Est ergo minima distantiarum foci & object a lente summa, si utraque sit $= 2f$. Esse autem isthic minimum, vel ex eo intelligitur, quod dicta summa possit fieri $= \infty$, posito objecto in foco radiorum parallelorum, nec secundum differentiale evanescat, sed maneat positivum.

ARTICULUS II.

De Punctis extra axem sitis, & præcisione Imaginum.

22. Propositio I. In lentibus unica superficie sphærica præditis (ut sunt vitra plano-convexa, & plano-concava) datur unicum punctum, ad quod radius oblique veniens ex puncto extra axem sito ita refringitur, ut sibi ipsi parallelus e lente exeat.

Perspicitur veritas hujus propositionis vel ex ipsa figura 2 & 3 Tab. I. Nam unicum punctum A habet tangentem PAT superficiei MBN parallelam. Atqui ut radius incidens RA (fig. 2) exeat situ parallelo per superficiem planam, nempe directione Dr, requiritur, ut sit PT ad MN parallela, ut facile intelligitur ex iis, quæ Part. I. N. 31 diximus. Verum etsi unicum hoc sit punctum A, possunt tamen radii ex infinitis punctis diversum situm extra axem habentibus in illud incidere, ut rursus sibi ipsis paralleli egrediantur, velut radius SA, si refringatur ad AE, exibit directione Es ad AS parallela, utpote infinitis angulis refractionis DAB, EAB &c competentibus infinitis angulis obliquitatis RAT, SAT &c. Quod modo de plano-convexo dictum est, applicatur eodem modo vitro plano-concavo fig. 3. Fig. 1. & 2. Tab. I.

23. Propositio II. Si lentes sint duplice superficie sphærica præditæ, cuivis puncto superficiei minoris sphæricitatis, respondet punctum in superficie majoris sphæricitatis, quorum tangentes parallelæ sunt. Et hinc ex unico puncto extra axem lentis sito unicus tantum radius ita potest incidere, ut exeat e lente sibi ipsi parallelus; seu puncti extra axem siti unicus tantum datur radius principalis.

Sit axis lentis vel utrinque convexæ, vel utrinque cavæ AB (fig. 4 & 5 Tab. I). Poterit cuivis radio e centro C alterius superfi- Tab. 4 & 5. Fig. I.

 ciei

ciei CD ducto fieri alter e centro K superficiei oppositæ parallelus KE, igitur tangens puncti D erit parallela tangenti puncti E, uti clarum est. Conjungatur D cum E; erit KED determinatus aliquis angulus refractionis; & cum ratio sinus refractionis ad sinum anguli incidentiæ sit constans, unicus angulus KER (vel hujus supplementum) erit possibilis, qui ejus respectu sit angulus obliquitatis. Quare ex unico puncto R ad punctum E incidere potest radius, qui per D*r* exeat ad RE parallelus. Quod si ad extremum punctum N superficiei habentis majorem radium sphæricitatis ducatur KN, poterit semper ex C duci C*n* parallela, ita, ut in arcu B*n* (fig. 4) vel A*n* fig. 5 sint omnia puncta, quæ possint habere tangentes parallelas tangentibus punctorum in arcu toto AN (fig. 4) vel BN fig. 5 contentorum. Quare cum innumera puncta correspondentia istorum arcuum conjungi possint eum in modum, quo puncta D & E, fient infiniti anguli refractionis inter se diversi, quorum singulis respondeant singuli tantum anguli incidentiæ; & propterea ex infinitis punctis extra axem sitis possunt tantum singuli radii ad singula puncta incidere, qui sibi ipsis paralleli e lente egrediantur.

Fig. 6 & 7. Tab. I. Quod de lentibus convexo-convexis, aut concavo-concavis dictum est, intelligi etiam debet de meniscis (fig. 6 & 7 Tab. I). Rursus enim ex utriusque superficiei centris C & K duci possunt radii CD, KE inter se paralleli, eruntque tangentes punctorum D & E parallelæ, & angulo refractionis CDE, cujus suplementum (fig. 6) est KER, unicus angulus incidentiæ *r* DC (fig. 6) vel supplementum anguli EDC (fig. 7) competere potest. Pari ratione definitur arcus B*n* in superficie minoris radii CB, respondens arcui AN.

Coroll. I. Recta DE (etiam producta si necesse sit) ita secat axem lentis (pariter productum in meniscis) in O, ut distantia puncti O ab utravis superficie sphærica sit in ratione radiorum sphæricitatis. Nam ob CD, KE parallelas, triangula COD, KOE similia sunt, & CD : CO = KE : KO, vel CB : CO = AK : KO (fig. 4, & 6); hinc CB — CO (= OB) : AK — KO (= OA) = CB : AK. In fig. 5 pariter CD : CO = KE : KO, vel CA : CO = KB : KO, ac denique CO — CA (= AO) : CA = KO — KB (= OB) : KB. In fig. 7 similis est analogia.

Coroll. II. Si in fig. 4 & 5 sit CB = KA, vel CA = KB, punctum O erit in medio axis AB. Si in figura 6 & 7 foret CB = CA, fieret DE ad axem parallela; & si forent superficies concentricæ, punctum O caderet in centrum commune. Si radii sphæricitatum sint æquales, patet ex N. 7 V°, meniscum esse ad usus opticos ineptum; & si superficies sint concentricæ, congruet DE cum radio tam DC, quam KE; hinc angulus refractionis fieret $= \frac{1}{\infty}$, & talis etiam angulus incidentiæ esse deberet ob rationem constantem sinuum. Unde neque hujusmodi lentes usum habent.

Ut

Ut ſequentem propoſitionem expeditius demonſtremus, utemur lemmate, quod ſubjicimus.

24. Lemma. Si radius oblique incidat in ſuperficies planas AS, BS convergentes ad S, nequit ſibi ipſi parallelus ex altera ſuperficie egredi, ſed inclinatur verſus eam partem, ex qua venit (fig 8 Tab. I.) Fig. 8. Tab. I.

Sit radius incidens IP, TP *t* perpendiculum ad ſuperficiem AS, ad quod proinde, ſi ex aere veniat ad vitrum, accedit refractus ad PO. Excitetur ad O perpendiculum QO*q* ad ſuperficiem BS, & agatur per O parallela *sa* ad SA. Evidens eſt, quod ſi ſuperficies SB haberet ſitum *sa*, radius PO exiret directione O*e* ad IP parallela; atqui radius PO magis obliquus eſt ad O*a*, quem ad OB, id eſt, angulus incidentiæ reſpectu ſuperficiei O*a* major eſt, quam reſpectu ſuperficiei OB, igitur etiam angulus refractionis, quæ fieret in ſuperficie O*a*, foret major angulo refractionis in ſuperficie OB; quare cum e prima emergeret directione O*e*, directio, qua e ſecunda egreditur, minus debet recedere a perpendiculo O*q*, ſed faciet angulum v. g. EO*q* minorem, quam *e*O*q*, vel verget verſis partem puncti I, quod idem eſt.

25. Propoſitio III. Si punctum R (Fig. 9. Tab. I.) ſatis a lente remotum ſit, & extra axem AB (productum) ſitum, veniatque ex R radius RD, qui refractus ad DE ex altera ſuperficie emergat ſibi ipſi parallelus E*r*; radii alii velut RP ex eodem puncto R incidentes, poſt duplicem refractionem in P, & Q ita exibunt e lente, ut ſumptis arcubus DP exiguis, concurrant cum E*r* alicubi in *r*. Fig. 9. Tab. I.

Nam per Lemna, ſi intelligantur duo plana tangentia lentem in P et Q, quæ cum parallela non ſint, convergent ad S, radius emergens Q*r*, nequit eſſe parallelus cum RP, ſed vergit verſus partes puncti R, adeoque etiam verſus E*r* ad RD parallelam; ſed ſi arcus DP ſit exiguus, & diſtantia puncti R ſat magna, angulus PRD fiet valde parvus, conſequenter angulus *e*Q*r*, quo radius emergens Q*r* deficit a parallelismo cum PR vel Q*e*, facile fit major angulo PRD, ideoque occurret radio principali E*r* ſat cito, eoque citius, quo *e*Q*r* fuerit major.

Addidi vero conditionem, ut angulus PRD ſit exiguus. Cum enim ſit RP ad Q*e*, & RD ad E*r* parallela, & angulus PRD non reapſe infinite parvus, fieri poteſt angulus *e*Q*r* ita exilis, ut non modo Q*r* fiat parallela cum E*r*, ſed etiam ab eadem divergat. Verum id non continget, niſi punctum R ſit nimis vicinum lenti, aut, ut videbimus, niſi objectum etiam in axe poſitum acquirat focum vel infinitum, vel negativum.

Quod diximus de punctis P & Q in arcubus DM, EM ſitis, intelligi etiam debet de aliis in arcubus DN, EN ſumptis, quorum tangentes eodem modo ex parte N concurrunt. Jam vero refractio in punctis P, Q eodem modo fit, ac in planis tangentibus, quorum ſectio exhibetur per PS, QS. Unde perſpicitur, etiam radios in arcum DN inciden-

incidentes e puncto eodem R, debere sub exposita conditione concurrere cum radio principali Er.

Coroll. Si ex aliquo puncto posito in axe producto, & ejusdem distantiæ a lente, ac est PR vel DR, incideret in punctum P radius, is haberet minorem angulum incidentiæ, quam RP, ideoque etiam minorem angulum refractionis, & egrederetur e lente per aliquod punctum inter Q & B situm, e quo ducta tangens faceret cum PS minorem angulum, quam QSP. Unde censeri deberet transire per prisma habens minorem angulum ad S, & propterea etiam minus refringeretur a perpendiculo in egressu, & posito angulo radii incidentis cum axe producto æquali cum angulo PRD, in majore distantia a puncto B rursus occurreret axi. Ex quo palam est, focum punctorum in axe positorum esse paullo longiorem, quam punctorum extra axem sitorum.

Fig. 10. Tab. I. 26. Propositio IV. Si punctum B parum ab axe lentis *Aa* distans radiet in lentem MN, & arcus PR, in quem incidunt radii, sit exiguus, habebit focum in *f* fere tantundem remotum a lente, quantum distat focus F puncti A in axe positi.

Si B parum distet ab axe radii BP, BR fere eundem situm habent respectu radii principalis *BcOdf*, qui sibi ipsi parallelus e lente egreditur, quem habent radii AP, AR respectu axis *AabF*; nam post duplicem refractionem tam illi ad *df*, quam hi ad *b*F convergunt. Igitur quo AB fuerit minus, eo relatio situs radiorum propius ad æqualitatem accedet, consequenter etiam eadem proxime relatio obtinebit in radiis refractis *qf*, *sf*, quæ est in radiis *p*F, *r*F, ut adeo distantiæ OF, O*f*, proxime æquales censeri possint.

27. Neque dissentit experientia. Imagines objectorum in telescopiis, in quibus angulus AOB = FO*f* est perexilis, sunt admodum distinctæ, & in usu censentur habere eandem a lente distantiam puncta F, *f*: in *camera obscura* imagines objectorum ab axe paullo magis remotorum etiam aliquantum obscuriores, & minus distinctæ apparent, utpote cum foci F, *f* non habeantur in plano parallelo ad diametrum lentis MN, sed in curva quapiam F*f*, quæ parum etiam a circulari discrepat. Hinc etiam (de quo alibi agemus) micrometri, seu reticuli, quod apud Astronomos in usu est, non nisi exigua pars accurate congruit cum imagine objecti, & partes, quæ prope limbos sitæ sunt, non adeo præcisæ videntur.

Fig. 11. Tab. I. 28. Lentem A (Fig. 11 Tab. I) circulo ligneo BCDE, & axibus diametraliter oppositis C*o*, E*p* munitam indidi alteri circulo ligneo PKRS verticaliter super tabula quadrangulari LMNO firmato, ut per eum axes C*o*, E*p*, transirent, & lens circa eosdem intra eum in utramque partem converti posset. In tabula duxi per foramen G, cui axis E*p* inserebatur, rectam FGH in plano circuli PRS, & parallelam aciei tabulæ MN. Eidem circulo verticali superne agglutinavi discum

cum

cum *dabc*, per cujus centrum K tranſibat alter lentis axiculus C*o*, ſitu horizontali. Radius hujus diſci K*b* erat lineæ FH parallelus, atque adeo in plano ad diametrum lentis parallelo. Arcus *ba*, *bc* in gradus diviſi. In axiculo C*o* firmavi indicem IQ, qui lente circa axiculos C*o*, E*p* mota una cum ea movebatur, & angulos indicabat, quibus lens ad planum circuli PRS inclinabatur. Machinulam ita præparatam ſuper tabula oppoſui feneſtræ cubiculi cortinis obductæ, & non niſi exiguo ſpatio apertæ, per quod ſtatua in edito ædificio 50 circiter hexapedas diſſita directe videri poterat. Imaginem ſtatuæ excepi charta alba & nitida ſuper tabula lignea firmata, & machinulam eidem tamdiu juxta regulam in digitos, & centeſimas digiti partes diviſam admovi, aut removi, donec exigua pars imaginis centro lentis viciniſſima, & ab aliis facillime diſcernenda, appareret clariſſime, lente ad ſtatuam & imaginem obtinente ſitum proxime parallelum, ut merito judicarem, eam partem ſtatuæ eſſe in axe lentis ſitam. Inveni diſtantiam lentis a tabula 2 ped. 6,15 dig. Tum lentem circa axiculos converti 5°, notato prius ope ſtyli acuti centro illius partis imaginis, quam in axe eſſe judicabam: movebatur in partem eandem, in quam lens convertebatur, imaginis centrum ſpatio tam exili, ut dubitarem, an prorſus 0,02 digiti æquaret; ſed ipſa ea pars imaginis tum videbatur aliquantum obſcurior, & minus diſtincta. Verum lente in eodem ſitu 5° ad planum parallelum inclinato ad tabulam 0,35 dig. admota, imago fiebat aliquantum diſtinctior, ut quidem optime diſcerni poſſet, attamen eam diſtinctionem nunquam recuperabat, quam in prima diſtantia, & lente ſitum parallelum obtinente, habuit. In hoc novo ſitu, nempe 0,35 dig. intra focum primum, denuo reſtitui lentem ad ſitum parallelum cum tabula & objecto; verum imago fiebat obſcurior, quam lente ad angulum 5° inclinata.

29. Ex hoc phænomeno manifeſtum eſt *primo*: converſione lentis circa axiculos nil aliud fuiſſe præſtitum, quam ut pars objecti prius in axe (proxime) collocata, diſcederet ab axe angulo 5°, & ejus imago jam depingeretur in concurſu radiorum cum aliquo radio principali. *Secundo*, focum, ubi imago objecti extra axem poſiti clariſſime videtur, eſſe paullo minorem, quam objecti in axe collocati. *Tertio*, imaginem objecti 5° extra axem collocati, & ſuo proprio foco exceptam eſſe quidem aliquantum minus diſtinctam, quam imagines objectorum in ipſo axe poſitorum, ſi eæ in debito foco excipiantur, attamen notabiliter magis diſtinctam, quam ſit imago objecti in axe poſiti, ſi excipiatur intra focum debitum ſpatio, 0,35 digit. Porro objecti pars, quam videbam proxime in centro lentis, erat exigua, ſcilicet pinnulæ, aut cauda ſagittæ, quæ apparebat extra totam ſtatuam, & in imagine non occupabat niſi 0,03 digiti proxime.

30. Lente rurſus ad diſtantiam 2 ped. 6,15 dig. ſitu parallelo remota, denuo notabam eandem imaginis partem. Tum tribui lenti

inclinationem 7° 30′; videbatur imago in partem eandem moveri proxime 0,02 digiti, paullo obſcurior; verum in diſtantia 0,35 dig. imminuta rurſus aliquantum magis diſtincta, & equidem notabiliter magis, quam dum lenti in ea diſtantia ſitus parallelus tribuebatur. Tandem lente ad angulum 10° inclinata, imago movebatur proxime 0,03 digiti, erat obſcurior, & lente ad tabulam 0,3 propius admota videbatur quidem aliquantum diſtinctior, attamen fere æque obſcura, ac dum in eadem diſtantia lens reſtituebatur ad ſitum parallelum.

31. Cur imago ſemper aliquantulum in partem, in quam movebatur lens, diſceſſerit, lente circa axem converſa, facile intelligitur ex iis, quæ de radio principali diximus. Erat axis lentis proxime duarum linearum decimalium, ſive 0,2 dig. diameter vero 3,92 dig. Ceterum hoc experimentum abunde confirmat, quæ ſuperioribus quatuor propoſitionibus, & earum Corollariis attulimus, & inſuper oſtendit, quando foci non ſunt adeo magni, velut $2\frac{1}{2}$ pedum, poſſe objecta, quæ non ſub majoribus angulis, quam 15°, aut 18° videntur, adhuc ſatis diſtinctis imaginibus, quantum uſus deſiderat, exhiberi.

32. Quoniam itaque etiam imagines punctorum extra axem ſitorum, modo ne nimis ab eo remota ſint, per radios in conos coeuntes ſatis diſtinctæ depinguntur, jam perſpicitur, qui fiat imago alicujus objecti habentis etiam notabilem extenſionem. Ut vero imago talis ſatis diſtincte exhibeatur (fig. 12 Tab. I), neceſſe eſt, ut excipia-

Fig. 12. Tab. I.

tur in diſtantia a lente debita, in qua nempe ſint apices conorum radioſorum *a*, *c*, *b*, qui ſitum oppoſitum habent ſitui punctorum A, C, B, objecti. Quod ſi tabula, in quam projicitur imago, TV removeretur, velut ad R*r*, jam radii inde a punctis *a*, *c*, *b*, divergerent, ideoque in tabula R*r* efformarentur parvi circelli, quorum diametri *no*, *pq*, *sx*, & quoniam ejusmodi circellos a punctis contiguis objecti efformatos aliquantum inter ſeſe permiſceri neceſſe eſt, fiet imago *confuſa*, & indiſtincta; eodem modo tabula *tv* intra debitam diſtantiam a lente collocata, circelli, quorum diametri *de*, *fk*, *lm*, oriuntur, & ſimilis enaſcitur confuſio.

33. Ut porro tirones videant, qua ratione per vitra concava

Fig. 13. Tab. II.

objecta appareant, utimur ſchemate ampliore (fig. 13 Tab. II). Eſto objectum ACB radians in vitrum concavum LM*ml*. Ex puncto C in axe ſito incidant radii extremi CG, CH, qui duplice refractione in G, *g*; H, *h*, egedientur e lente magis divergentes GR, H*r*, ita ut verſus objectum producti concurrant in puncto axis *c*. Et hinc ſi oculus ſit ita conſtitutus, ut radii ex omnibus, qui inter *r* & R e lente emergunt, ſufficientes pupillam ingrediantur, atque ita in humoribus refringantur, ut apex coni ex iis efformati veniat in retinam, videbitur punctum C in *c*. Pariter erit aliquis radius principalis e puncto A veniens AO, qui ſibi ipſi parallelus egrediatur per *i* in Y; alii in ſuperficiem GOH ex A incidentes iterum poſt duplicem refractionem

in

in G, & H emergent ita in S & *s*, ut producti versus objectum occurrant radio principali in *a*. Idem fiet radiis e puncto B digressis, & in T, *t* refractis, quorum productorum concursus erit in *b*. Jam si oculus ita constitutus sit, ut videat distincte per radios divergentes, referet punctum A objecti in *a*, C in *c*, & B in *b*, ita, ut objectum appareat situ erecto, attamen minus, quam reapse sit.

34. Oculus bene constitutus est, si objecta tam remota, seu per radios parum divergentes, aut etiam per parallelos, quam vicina, per radios magis divergentes, facile videat. Ex formula (13 & 14) $x = \frac{df}{d-f}$ perspicitur, cum oculus lenti æquivaleat, x esse majus, quando d minus est, & idem x esse minus, dum d majus est. Igitur si oculus sit bene constitutus, debet in eo pro objectis vicinioribus efformari focus longior, & pro remotioribus brevior, ut adeo (quemadmodum Part. I. annotavimus) vel humor crystallinus versus posticam oculi partem propius admoveri, & rursus inde removeri posse debeat, vel cornea, aut humor crystallinus majorem minoremve convexitatem induere, vel utrumque horum fieri. Quod si, ut apud homines ætate jam in senium vergente contingit plerumque, humores reddantur minus convexi, quam ut vicinorum objectorum foci satis breves efformentur, objecta vicina confuse videbuntur. Verum hujusmodi vitio laborantes juvari possunt vitris convexis. Nam cum (fig. 12. Tab. I) radii ex vitris convexis emergentes vel convergant, vel saltem minus divergant, excepti oculis ita comparatis habebunt focum breviorem, adeoque in retina efformabunt imaginem distinctam. Homines, qui ita constituti sunt, ex usu *presbytæ* dici solent, & utuntur commode perspicillis vulgaribus. Fig. 12. Tab. I.

35. Verum si oculus habeat humores nimium convexos, neque retinæ tribui possit necessaria vicinia cum humore crystallino, ut excipiat focos breviores objectorum remotiorum: supplebit hoc vitium vitris cavis. Nam in hisce ita refringuntur radii, ut in exitu magis divergant, quam in ingressu, veluti fieret, si nudo oculo aspiceretur objectum vicinius, quam reapse sit; fiet focus in oculo proinde longior, & in retina imago distincta. Quorum oculi hoc vitio sunt præditi, quod objecta minuta (quæ semper in magna vicinia videre solemus) distincte videant, *myopes* dici consueverunt. Sed de visione per unam lentem sequente Articulo paullo uberius agendum nobis est.

ARTICULUS III.

De objectis visis per unicam Lentem.

36. Problema I. Datis foco radiorum parallelorum lentis convexæ, distantiis objecti, & oculi a lente, invenire rationem magnitudinis apparentis objecti visi per lentem ad magnitudinem apparentem ejusdem spectati oculo libero.

Fig. 14. Tab. II. Resolutio. Exhibeat OCE (fig. 14. Tab. II.) axem lentis GHL productum; sit O locus oculi, F focus radiorum parallelorum, & CO > CF; objecti semidiameter sit EN, ejus distantia a lente EC. Consideretur oculus instar objecti, & quæratur ejus focus QC, qui erit positivus, cum sit CO > CF; apertura lentis sit CB. Brevitatis gratia consideramus refractionem fieri in unico puncto B, neglecta lentis crassitudine. Per focum oculi Q, & punctum B ducatur recta, donec occurrat objecto in N, eritque EN semidiameter visibilis, & si objectum fuerit majus, reliquum non videbitur. Evidens est, radium, qui ex N per Q & B transit, refringi ad O (12), consequenter etiam eos, qui huic sunt admodum vicini, ita refringi, ut pupillam (quæ aliquam extensionem habet) ingredi possint, adeoque si oculus sit rite constitutus, videbit semidiametrum EN sub angulo BOC, vel si producatur tam OB, quam NE in P, sub angulo POE; sine lente appareret EN sub angulo EON, unde erit magnitudo visa per lentem ad magnitudinem apparentem sine lente, ut est PE ad EN, sive sumpto sinu toto OE, ut tangens anguli POE ad tangentem anguli EON, aut denique si prior angulus sit $= \varphi$, posterior $= \alpha$, ut *tang.* φ: tang. α, & siquidem ponantur anguli exigui, etiam ut $\varphi : \alpha$.

Est autem ob PEN, BC parallelas EN: BC = EQ: QC, &
BC: PE = OC: OE. Compositis rationibus EN: PE = EQ × OC: QC × OE. Sit CF $= f$, CO $= d$, EC $=$ D, erit CQ $= \frac{df}{d-f}$, EQ $=$ EC $-$ CQ $=$ D $- \frac{df}{d-f} = \frac{Dd - Df - df}{d-f}$, EO $= d +$ D, & PE: EN $=$ *tang.* φ : *tang.* $\alpha = \frac{df}{d-f} \times (d + D) : \left(D - \frac{df}{f-d}\right) d = fd^2 + Ddf : Dd^2 - Ddf - d^2f$, ac

denique $\frac{tang.\ \varphi}{tang.\ \alpha} = \frac{fd\,(d + D)}{D\,(d^2 - df) - d^2f} = \frac{f(d+D)}{Dd - Df - df} = \frac{f(d+D)}{Dd - f(d+D)}$.

Posuimus modo objectum extra focum oculi Q. Verum si objectum sit in *en*, erit magnitudo apparens per lentem, ad magnitudinem

dinem apparentem oculo libero, ut tangens anguli BOC ad tangentem anguli nOe, seu pOC. Eſt autem $pC : en = OC : Oe$, & $en : BC = Qe : QC$, compoſitis rationibus $pC : BC = OC \times Qe : Oe \times QC = OC\,(CQ - eC) : (OC + Ce)\,QC$, vel retentis prioribus denominationibus $tang.\,\alpha : tang.\,\phi = d\left(\frac{df}{d-f} - D\right) : (d+D) \times \frac{fd}{d-f} = (d+D)f - Dd : f(d+D)$, & $\frac{tang.\,\phi}{tang\,\alpha} = \frac{f(d+D)}{f(d+D) - Dd}$.

Apparet, in primo caſu objectum videri ſitu inverſo, in altero vero ſitu erecto, & auctum; & augebitur etiam in primo caſu, ſi fuerit $Dd - f(d+D) < f(d+D.)$ Quodſi fieret CE vel $eC = QC$, ſive ſi objectum conſtitueretur in foco oculi, unicum ejus punctum in axe ſitum appareret ſub angulo BOC, & nihil poſſet diſcerni.

37. Obſerva. Nos dixiſſe, ſi oculus ſit rite diſpoſitus, ei apparituram ſemidiametrum EN (idem eſt de en) ſub angulo BOC. Cum enim radii divergant e puncto N, poſt egreſſum e lente citius convergent, quam ad O veniant, & e puncto illo iterum divergentes incident in pupillam, ut facile intelligitur ex eo, quod radii ex Q venientes habeant focum O; conſequenter qui veniunt e puncto remotiore E, focum breviorem habent, proinde e puncto aliquo inter F & O poſito iterum divergent. Pariter cum radii e Q incidentes in lentem non habeant focum longiorem, quam CO, venient radii ex e digreſſi ad O divergentes, ſi fuerit $eC < CF$, vel convergentes ad majorem diſtantiam, quam ſit CO, ſi ſit $eC > CF$, vel denique paralleli, in caſu quo $eC = CF$. Unde oportet oculum ita eſſe diſpoſitum, ut per radios divergentes, convergentes, vel parallelos diſtincte videat. Porro generatim notandum, ſemper inveniri, an radii divergentes, vel convergentes veniant ad oculum, ſi quæratur focus puncti E, vel e.

38. Eſto modo (fig. 15 Tab. II) locus oculi O intra focum radiorum parallelorum F; erit ejus focus CQ negativus; & magnitudo apparens per lentem ad magnitudinem viſam ſine lente, ut BC ad PC, ſeu $tang.\,\phi$ ad $tang.\,\alpha$. Nam manente reliqua conſtructione eſt $PC : NE = OC : OE$, & $NE : BC = QE : QC$, compoſitis rationibus $PC : BC = OC \times QE : OE \times QC$, hoc eſt $tang.\,\alpha : tang.\,\phi = d\left(D + \frac{df}{f-d}\right) : (d+D)\frac{df}{f-d} = f(d+D) - dD : f(d+D)$, & $\frac{tang.\,\phi}{tang.\,\alpha} = \frac{f(d+D)}{f(d+D) - Dd}$. Fig. 15. Tab. II.

39. Ceterum apparet, in nullo horum caſuum fieri denominatorem rationis $\frac{tang.\,\phi}{tang.\,\alpha}$ negativum, aut $= o$; Nam in primo caſu N. 36, eſt per hypotheſin $EC > QC$, ſeu $D > \frac{df}{d-f}$, igitur etiam

$dD - Df > df$, consequenter est $Dd - f(d + D)$ quantitas positiva. In altero casu ponitur $eC < QC$, sive $D < \frac{df}{d - f}$, quare etiam $Dd - df < df$, ergo multo magis $Dd < df + Df$, unde rursus est $f(d + D) - Dd$ quantitas positiva. Denique N. 38 est FC > OC, sive $f > d$, ergo etiam fD (quidquid sit D) > Dd, adeoque multo magis erit $fD + fd = f(d + D) > Dd$, ideoque $f(d+D) - Dd$ quantitas positiva. Perspicitur autem, etiam in hoc ultimo casu (ubicunque sit EN, apparere objectum auctum, utpote cum in $\frac{f(d + D)}{f(d+D) - Dd}$ numerator sit major denominatore.

40. Superest adhuc casus, qui attentionem meretur, dum scilicet oculus in foco radiorum parallelorum constituitur. Finge igitur esse in fig. 15 $OF = o$, erit focus oculi $= \infty$. Sit apertura lentis CP, & agatur ex P ad axem parallela Pn, occurrens objecto in n, & radius e puncto n directione nP incidens refringetur ad O, ita, ut si distantia CE non sit tanta, ut radii jam ad sensum fiant paralleli, egrediantur e lente vel convergentes ultra O, vel divergentes pro diversa magnitudine distantiæ CE, quæ si fiat ingens, omnes radii ex omnibus punctis inter n, E incidentes ad sensum paralleli, convergunt in O, & oculus nihil distincte videre poterit; extra hunc casum videbitur pars objecti nE sub angulo NOE.

Est autem PC ($= n$E): NE = OC: DE, hoc est $tang.\, \alpha : tang.\, \phi = d : d + D$, & $\frac{tang.\, \phi}{tang.\, \alpha} = \frac{d + D}{d}$. Idem eruitur ex formula algebraica. Et quia $d + D > d$, objectum per lentem majus apparet, quam si non utaris lente.

Consentit experientia. Nam oculo in foco radiorum parallelorum lentis convexæ constituto, objecta admodum dissita penitus videri desinunt; & apparet summa confusio in lente; vicina distincte cernuntur; quæ habent mediocrem distantiam, cernuntur quidem, sed aliquantum confuse, quia radii nimis convergentes ad pupillam veniunt.

41. Problema II. Data lente concava, ejus distantia ab oculo, & objecto, invenire rationem magnitudinis apparentis per lentem ad magnitudinem visam sine lente.

Fig. 16. Tab. II. Resolutio. Sit (fig. 16 Tab. II) oculus in O, ejus focus virtualis in Q. Per B ducatur QBN, erit EN semidiameter visibilis, & quidem sub angulo POE, cum libero oculo appareat sub angulo NOE. Est vero BC: PE = CO: OE, &

NE: BC = EQ: CQ, compositisque rationibus NE: PE = CO × EQ: OE × CQ. Et si sit $CO = d$, $EC = D$, erit $CQ = \frac{fd}{d + f}$, & fiet $tang.\, \phi : tang.\, \alpha = (d + D) \times \frac{df}{f + d} : d\left(D + \frac{df}{f + d}\right)$

$= fd$

$= fd + f\mathrm{D} : f\mathrm{D} + d\mathrm{D} + \mathrm{D}f = f(d + D) : f(d + \mathrm{D}) + \mathrm{D}d;$ ac denique $\frac{tang.\,\varphi}{tang.\,\alpha} = \frac{f(d + \mathrm{D})}{f(d + \mathrm{D}) + d\mathrm{D}}$. Ex quo manifeſtum eſt, objectum apparere ſitu erecto, ſed minus, quam ſi libero oculo ſpectetur, cum denominator major ſit numeratore.

42. Problema III. Invenire, quibus caſibus, dum objectum videtur per lentem, haberi poſſit *Maximum*, vel *Minimum* augmentum, vel decrementum magnitudinis apparentis per vitrum, poſita diſtantia oculi ab objecto conſtante $= a$, & loco lentis variabili.

Reſolutio. Quando objectum eſt extra focum oculi (fig. 14 Tab. II), fuit $\frac{tang.\,\varphi}{tang.\,\alpha} = \frac{f(d + \mathrm{D})}{\mathrm{D}d - f(d + \mathrm{D})}$. Sit jam $d + \mathrm{D} = a$, $d = x$, erit $\mathrm{D} = a - x$, & $\frac{tang.\,\varphi}{tang.\,\alpha} = \frac{af}{ax - xx - af}$. Manifeſtum eſt, quando augmentum per lentem eſt maximum, debere numeratorem non modo eſſe majorem denominatore, ſed etiam differentiam inter numeratorem & denominatorem eſſe maximam, nempe $2af - ax + xx$, cujus differentiale $- adx + 2xdx = o$ dat $\frac{1}{2} a = x$, & differentiale ſecundum ſit $+ 2dx^2$ poſitivum, quare non poteſt haberi maximum, ſed potius minimum. Ut $2af - ax + xx$ fieret maximum, requireretur, ut ſit $x = o$, quod eſt contra hypotheſin, vi cujus eſt $x > f$. In hypotheſi $x = \frac{1}{2} a$, ſit $\frac{tang.\,\varphi}{tang.\,\alpha} = \frac{af}{\frac{1}{4} a^2 - af}$; igitur debet eſſe $\frac{1}{4} a > f$.

Fig. 14. Tab. II.

In hoc eodem caſu contingere poteſt, ut ſit $af = ax - xx - af$, ſeu $2af = ax - xx$, & tunc nec incrementum, nec decrementum magnitudinis habebitur. Ut hoc fiat, debebit eſſe $x = \frac{1}{2} a \pm \frac{\sqrt{a^2 - 8af}}{2}$, ideoque debet eſſe a vel $=$ vel $> 8f$.

Dum objectum ponitur intra focum oculi, formula ſit $\frac{af}{af - ax + xx}$, & diſcrimen inter numeratorem, ac denominatorem $ax - xx$, dum ſit maximum, dat $\frac{a}{2} = x$, manente differentiali ſecundo negativo. In hac hypotheſi eſt $\frac{tang.\,\varphi}{tang.\,\alpha} = \frac{af}{af - \frac{1}{4}a^2}$, ideoque non modo debet eſſe $f > \frac{1}{4} a$, ſed etiam cum focus oculi ſit poſitivus, debet ſumi $\frac{1}{2} a > f$.

In caſu N. 38, dum focus oculi eſt negativus, eadem eſt formula $\frac{af}{af - ax + xx}$, adeoque datur iterum maximum, quan-

do

do $x = \frac{1}{8} a$, sed hypothesis exigit, ut sit $\frac{1}{2} a < f$, seu $a < 2 f$.

Denique si accipiatur lens concava, formula est $\frac{tang.\, \varphi}{tang.\, \alpha} = \frac{af}{af + ax - xx}$, & imminutio objecti maxima est, quando differentia inter denominatorem & numeratorem $ax - xx$ est maximum, sive dum $\frac{1}{2} a = x$, (est enim secunda differentia $- 2dx^2$ negativa). Fit vero tunc $\frac{af}{af + \frac{1}{4} a^2}$, quae est quantitas semper positiva, quidquid sit f.

43. Problema IV. Datis iis, quae prioribus problematis ponebantur, invenire magnitudinem veram objecti

Fig. 14. Tab. II. Resolutio I° dum objectum est extra focum oculi fig. 14. Tab. II. Est BC: NE = QC: QE, seu si apertura dimidia lentis dicatur $= \alpha$, $\frac{df}{d - f} : D - \frac{fd}{d - f} = df : Dd - Df - df = \alpha : NE = \frac{\alpha Dd}{df} - \frac{f\alpha (D + d)}{df} = \frac{\alpha D}{f} - \frac{\alpha (D + d)}{d}$.

II°. Quando objectum est intra focum oculi, analogia habetur QC $\left(\frac{fd}{d - f}\right)$: Qe $\left(\frac{df}{d - f} - D\right)$ = BC (α): $ne = \frac{\alpha f (d + D)}{df} - \frac{\alpha Dd}{df} = \frac{\alpha (d + D)}{d} - \frac{\alpha D}{f}$.

Fig. 15. Tab. II. III°. In fig. 15ta, posito foco oculi negativo, rursus habetur QC $\left(\frac{df}{f - d}\right)$: QE $\left(\frac{df}{f - d} + D\right)$ = BC (α) : NE $= \frac{\alpha (d + D)}{d} - \frac{\alpha D}{f}$.

Fig. 16. Tab. II. IV°. Si Lens sit concava (fig. 16 Tab. II) est CQ $\left(\frac{df}{f + d}\right)$: QE $\left(\frac{df}{d + f} + D\right)$ = BC (α): NE $= \frac{\alpha (d + D)}{d} + \frac{\alpha D}{f}$.

44. Ex hoc postremo Problemate solvi potest analogum, v. g. datis α, f, d, & NE $= b$, invenitur D $= x$. Ut enim exemplo utamur, cum habuerimus NE $= \frac{\alpha D}{f} - \frac{\alpha (d + D)}{d}$, fiet $b = \frac{\alpha x}{f} - \frac{\alpha x}{d} - \alpha$ aut $bfd + \alpha fd = \alpha dx - \alpha fx$, seu $\frac{fd (b + \alpha)}{\alpha (d - f)} = x$.

ARTI-

ARTICULUS IV.

De Constructione Graphica Formulæ $x = \frac{df}{d-f}$.

45. Proponimus constructionem graphicam formulæ $x = \frac{df}{d-f}$, quod ea sæpius usui esse possit in constructione machinarum opticarum, quando quis vitrorum distantias tantummodo proxime definire desiderat, neque rigore calculi accuratioris opus est. Præterea præbet ea exemplum applicationis Geometriæ, qua in re industria tironum nunquam non cum utilitate exercetur. Enunciamus itaque nostram constructionem hunc in modum: in axis lentis producti puncto, quo datur distantia objecti a lente, excitetur perpendicularis ad axem: ex extremo dimidiæ aperturæ lentis ducatur per focum radiorum parallelorum recta, quæ occurrat in aliquo puncto perpendiculari ad axem. Ex eodem extremo aperturæ dimidiæ puncto agatur parallela ad axem indefinita. Tum ex intersectione perpendicularis cum recta per focum parallelorum radiorum transeunte ducatur per centrum lentis alia recta, dum occurrat parallelæ ad axem. Ex harum intersectione demissum in axem perpendiculum definiet distantiam foci a lente, qui debetur distantiæ objecti.

Apparet autem, in hac constructione negligi crassitudinem lentis; tum etiam radium principalem sumi ita, velut qui sine omni refractione per lentis centrum transeat. Applicemus jam constructionem casibus diversis, qui emergere possunt.

46. I° dum objectum est extra focum radiorum parallelorum lentis convexæ.

Sit AC (fig. 17 Tab. II) distantia objecti a lente, AB ad ACL perpendicularis, apertura dimidia lentis CD, recta BFD per focum objecto vicinum radiorum parallelorum transiens occurrat perpendiculari AB in B. Sit præterea DG ad axem parallela, cui in G occurrat recta ex B per centrum lentis C ducta. Perpendiculum GL dat distantiam foci CL objecti BA, ita, ut imago puncti A efformetur in L, puncti B vero proxime in G, cum BCG sit radius principalis. Fig. 17. Tab. II.

Formulam esse rite constructam, facile ostenditur. Nam cum sit DG, ad FC parallela, triangula DBG, FBC similia dant FC: DG vel CL = BF: BD. Porro ob parallelas DC, AB similia etiam sunt triangula DFC, AFB, & BF: FD = AF: FC, nec non BF: BF + FD (= BD) = AF: AF + FC (= AC); sed fuit BF: BD = FC: CL; igitur etiam erit AF: AC = FC: CL. Jam vero AC = *d*,

FC $= f$, AF $=$ AC $-$ FC $= d - f$, ergo habetur $d - f : d = f :$ $\frac{df}{d - f} = x$.

Ex hac conſtructione evidens eſt *primo*, quod ſi A vel B diſtaret infinite, rectæ DB, GB fierent parallelæ, conſequenter DG, ſive CL $=$ FC $= f$. *Secundo*: Si punctum A caderet in F, etiam B in idem incideret, proinde BC congrueret axi, & cum parallela DG non niſi ad diſtantiam infinitam concurreret, hoc eſt, ſi objectum conſtitueretur in foco radiorum parallelorum, radii lucis e lente emergerent paralleli. *Tertio* liquet, quod ſi daretur CL, focus objecti AB, reperiri quoque poſſet focus radiorum parallelorum. Nam facta LG æquali, & parallela cum CD, ductaque per C recta GCB, & conjunctis punctis D & B, interſectio F determinat focum quæſitum. Sed hæc ſemel indicaſſe ſatis eſt, nec ea deinceps repetemus.

47. II°. Quando objectum ponitur intra focum radiorum parallelorum lentis convexæ.

Fig. 18. Tab. II. Eſto AC $= d$, minor, quam FC $= f$. Erecta perpendiculari AB, & ducta DF, patet, rectam ex B per C tranſeuntem non poſſe occurrere parallelæ ad axem DG, niſi ex eadem parte, ex qua eſt objectum, nempe in G, igitur focus CL fit virtualis.

Quoniam triangula FAB, FCD, item GBD, FBC ſimilia ſunt, ex primis habetur FB: BD $=$ FA: AC; ex ſecundis FB: BD $=$ FC: GD vel LC; unde etiam FA: AC $=$ FC: CL, vel $f - d : d = f :$ $\frac{df}{f - d} = \frac{df}{d - f} = - x$.

48. III°. Dum radii incidunt convergentes in lentem convexam.

Fig. 19. Tab. II. Quando radii ex parte FC (fig. 19 Tab. II) incidunt convergentes ad aliquod punctum A, diximus, ſumendam eſſe diſtantiam CA negative (16); & quia in prioribus caſibus accepimus CA $= d$ ex parte FC, jam erit AC conſtruenda ex parte oppoſita. Ducta igitur per D, FDB indefinita, cui in B occurrat AB perpendicularis ad CA, ducatur item BC, & ex D ad CA parallela DG. Ex G demiſſum perpendiculum determinat focum CL radiorum verſus A convergentium; & ſi porro alii convergerent verſus B, haberent focum proxime in G.

Nam rurſus triangula ſimilia FBC, DBG præbent analogiam FB: DB $=$ FC: DG vel CL. E triangulis autem ſimilibus FBA, FDC habetur FB: DB $=$ FA: CA; quare etiam FA: CA $=$ FC: CL, ſive $d + f : d = f : \frac{df}{d + f} = \frac{- df}{- d - f} = x$.

Tranſeamus jam ad vitra concava, de quibus diximus, quod focum habeant negativum, adeoque focus radiorum parallelorum ſemper is erit in conſtructione adhibendus, qui jacet ex altera vitri parte,

te, cum pro convexis adhibuerimus ſitum ex eadem parte, ex qua incidunt radii in lentem.

49. IV°. Dum radii veniunt divergentes ex objecto ſeu extra, ſeu intra focum radiorum parallelorum poſito.

Sit CA (fig. 20 Tab. II) diſtantia objecti, apertura lentis CD, focus radiorum parallelorum CF. Ductæ ex F per D indefinitæ occurrat perpendiculum AB in B. Agatur item CB, quæ ſecet DG ad AC parallelam in G, cum eidem ex parte F occurrere nequeat. Demiſſo perpendiculo GL, habebitur focus virtualis CL. Fig. 20. Tab. II.

Sunt iterum triangula CBF, GBD ſimilia, & FB: DB = CF: GD vel CL. Et ob parallelas AB, CD habetur quoque FB: DB = FA: CA. Quare eſt etiam FA: CA = CF: CL, ſive $d + f : d = f : \frac{fd}{d+f} = - x$, cum CL jaceat ex eadem parte cum objecto reſpectu vitri cavi.

50. V°. Dum radii incidunt convergentes ultra focum radiorum parallelorum in vitrum concavum.

Sit (fig. 21 Tab. II) focus radiorum parallelorum F, punctum convergentiæ A, e quo excitatæ perpendiculari ad CA occurrat in B recta DFB. Patet, BC occurrere tantummodo poſſe parallelæ ad axem DG ex ea parte, ex qua veniunt radii, & proinde erit focus CL negativus. Quippe triangula ſimilia GBD, CBF dant BF: BD = FC: DG ſeu CL. E triangulis ſimilibus DCF, BAF itidem habetur FB: FD = AF: CF, & FB: FB + FD (= BD) = AF: AF + CF vel AC. Hinc AF: AC = FC: CL, $d - f : d = f : \frac{df}{d-f}$, ſive acceptis f & d negative $\frac{df}{-d+f} = - x$. Fig. 21. Tab. II.

51. VI°. Si radii convergant ad punctum intra focum parallelorum vitri cavi (fig. 22 Tab. II). Fig. 22. Tab. II.

Sumatur focus radiorum parallelorum CF, punctum convergentiæ A; DF ſecetur a perpendiculari AB in B. Secabit recta ex C per B ducta parallelam ad axem DG in G ex parte puncti convergentiæ. Quare focus CL erit poſitivus. Ex triangulis DBG, CBF eſt BF: DB = CF: DG vel CL; ſed ob parallelas DC, AB habetur BF: DB = AF: AC; igitur erit AF: AC = CF: CL, ſeu $f - d : d = f : \frac{df}{f-d}$, ut habuimus N. 16. Et liquet ſimul, A incidente in F, evaneſcere denominatorem, cum B pariter cadat in F, & BC congruat cum axe, ideoque DG non niſi in diſtantia infinita ſecet.

Atque ex his conſtat, eandem, quantum particulares ſinunt conditiones, fuiſſe a nobis conſtructionem adhibitam, quæ nempe geometrice idem præſtat, quod formula Algebraica in calculo.

CAPUT II.

Ut machinæ dioptricæ ad eam perfectionem perducantur, cujus capaces sunt, non modo vitra accurate elaborata adhiberi debent, sed etiam requiritur, ut constet de longitudine focorum. Hæc porro cum pendeat partim ex radiis sphæricitatis, partim ex majore, vel minore refractione, quæ in diversis vitrorum speciebus diversa est, oportet, ut habeamus methodos hæc omnia accurrato examini subjiciendi. Præterea etsi non sit animus vitrorum tornatores formare, attāmen nosse debemus, utrum artificum, qui nobis in hoc genere operam locant, negligentia quidpiam, quantumve peccatum sit. Sæpe enim vitium lentium in eo est, quod figuram sphæricam non habeant; alias quod axis non sit in medio lentis, vel ut usitata phrasi dicam, quod sint male centratæ. Hæc igitur omnia, qua ratione examinari possint, præsente capite exequi visum est. Adferemus tamen ex plurimis methodis adhuc ab Opticis excogitatis eas tantummodo, quarum executio paucioribus obstaculis obnoxia, & satis secura in usu videtur.

ARTICULUS I.

De invenienda refractione media, & discrimine refractionis radiorum extremorum.

52. Prima methodus explorandi refractionem in data vitri specie est usus prismatis triangularis, cujus sectionem ad axem perpendicularem exhibet (fig. 23 Tab. III) ABC. Debent autem plana AC, BC esse accurata, quod facile advertetur (cum quodlibet vitrum instar speculi multos radios reflectat), si imagines rerum iis objectarum non exhibeat distortas, sed debita figura, & magnitudine, uti specula plana melioris notæ. Dein notus esse debet angulus C. Siquidem ipsæ bases prismatis sint axi ejusdem normales, poterunt eæ imponi planæ tabulæ, & ductis juxta CB, CA lineis (quæ dein quantum libet produci applicata regula poterunt) angulus ab iis comprehensus vel ope scalæ geometricæ ex data chorda calculari, vel per transportatorium goniometricum definiri. At si bases prismatis vel normales non sint ad axem, vel quavis ex causa plano applicari nequeant, poterunt binæ regulæ satis longæ, & tenues decussatim positæ paullo ultra tabulam prominere, intra quas angulus prismatis ita inseritur, ut

Fig. 23. Tab. III.

ut acies regularum ejus plana non modo tangant accurate, ſed etiam ſecent latera ad angulos rectos. Ductæ dein rectæ juxta crura regularum tabulæ incumbentia, definient angulum prismatis. Si hoc examen ſexies, octiesve diligenter fiat, neque adeo magna ſe ſe prodant diſcrimina, ſumpto ex omnibus medio quodam, habebitur prismatis angulus ſatis, quantum uſus poſcit, accurate. In uſu præterea ſemper ponimus, radium incidentem, & refractum eſſe in plano ſectionis priſmatis ad axem perpendiculari. Cognoſcetur autem id ſine difficultate ex eo, ſi notetur locus ſpectri, & remoto priſmate, advertatur, foramen, per quod lux incidit, radium irrefractum, & locum ſpectri eſſe in eodem plano verticali, aut etiam in eadem plani verticalis cum horizontali interſectione.

53. Porro prismati radium ſolis per tenue foramen ingreſſum excipienti is tribuendus eſt ſitus, ut refractionum ſumma, quæ in ingreſſu, & emerſione per alterum planum fiunt, ſit minima, ſeu ut radius ſecundo refractus minimum diſcedat a via radii irrefracti. Sit in figura citata radius incidens LI, qui productus veniret in R, & refractione prima acquirit ſitum IE, ſecunda ſitum EO. Producatur OE, donec in N ſecet radium irrefractum in N, erit angulus RNO, qui metitur ſummam utriuſque refractionis, ſive quantum a prima ſua directione radius incidens detorqueatur. Quare evidens eſt, refractionem tunc eſſe minimam, quando hic angulus minimus fit. Noſcetur autem, quando id contingat, ex infimo loco ſpectri priſmatici: nam ſi excipiatur & ſpectrum, & radius irrefractus in eadem diſtantia in plano aliquo verticali, minime diſtat O ab R, dum angulus RNO minimus eſt. Uti autem in omnibus maximis, & minimis contingit, ita quoque hic fiet, ut mutato paullum angulo (prismate tantillum in utramque partem circa axem rotato) incrementum ex una, & decrementum ex altera parte ſe ſe exæquent, ideoque ſpectrum aliquamdiu velut ſtare, nec attolli illico videatur. Hunc ſitum dum prisma obtinet, ſpectrum nitidiſſimum apparet, & minime confuſum. Jam vere hoc ipſum accuratius nobis conſiderandum eſt, & videndum, quem ſitum intra priſma radius primo refractus habere debeat, ut angulus RNO ſit minimus.

54. Dico itaque, ſi radius incidens LI ita refringatur in prima ſuperficie AC, ut intra prisma acquirat ſitum IE ad AB parallelum, ſive ut punctum incidentiæ I, & egreſſus E æqualiter diſtent ab angulo C, refractionum ſumma in utraque ſuperficie factarum minima eſt. Producatur radius incidens in R; cum per hypotheſin acquirat ſitum IE, angulus, quo a prima directione recedit, eſt NIE, & ſi ad I fuerit PIM perpendicularis, angulus refractionis erit MIE. Ducatur etiam ad E perpendiculum QEM, erit MEI angulus incidentiæ in ſecundam ſuperficiem. Evidens autem eſt, ſi ſit IC = CE, fore etiam IM = ME, & triangulum IME eſſe iſoſceles, ſeu angulum MEI = MIE, hoc

 eſt,

eſt, angulum incidentiæ in egreſſu eſſe æqualem angulo refractionis in egreſſu. Ob conſtantem ſinuum refractionis, & incidentiæ rationem erit igitur *ſin.* NIM : *ſin.* MIE $= m : n$; & in egreſſu *ſin.* MEI : *ſin.* OEQ, ſeu *ſin* MEN $= n : m$, compoſite *ſin.* NIM $\times$ *ſin.* MEI : *ſin.* MIE $\times$ *ſin.* MEN $= 1 : 1$; hinc *ſin.* NIM $\times$ *ſin.* MEI $=$ *ſin.* MIE $\times$ *ſin.* MEN, vel quia MEI $=$ MIE, *ſin.* NIM $=$ *ſin.* MEN; ſunt igitur etiam anguli MIN, MEN, conſequenter etiam NIE, NEI æquales, & RNO $=$ 2NIE $=$ 2NEI, quæ angulorum æqualitas dein nobis uſui erit.

Sit jam alius radius incidens *l* I, qui ita refringatur, ut intra prisma habeat ſitum I *e*, qui non ſit ad AB parallelus; ad *e* ducatur perpendiculum *me* ad ME parallelum. Producatur item *l*I in *r*. Patet, cum angulus incidentiæ *r*I*m* major ſit angulo NIM, debere etiam radium refractum I*e* magis recedere a prima ſua directione I*r*, quam diſcedat radius refractus IE a prima ſua directione IR, ſeu *r*I*e* erit major, quam RIE. Auferatur angulus communis RI*e*, manebit *r*IR major quam *e*IE. Ob parallelas ME, *me* eſt angulus ME*s* $=$ E*se*, & E*se* $=$ *se*I (ſeu *me*I) $+$ EI*e*, ideoque angulus incidentiæ in egreſſu radii I*e* imminutus jam eſt angulo EI*e* minore, quam ſit angulus RI*r*, quo auctus eſt angulus incidentiæ in ingreſſu *r*I*m*, conſequenter cum primæ incidentiæ angulus ſit magis auctus, quam decreverit angulus ſecundæ, evidens eſt, ſummam angulorum incidentiæ creviſſe, & eſſe *r*I*m* $+$ I*em* $>$ RIM $+$ MEI. Atqui ubi major eſt ſumma angulorum incidentiæ, ibi etiam eſt major ſumma angulorum refractionis, ob conſtantem rationem ſinuum; igitur radius *lIeo* majorem patitur refractionem, quam radius LIEO, & hinc debet eſſe *rno* $>$ RNO. Idem oſtenderetur, ſi radius refractus ad I tranſiret ſupra IE. Sed fortaſſis res hæc clarior adhuc fiet e ſequente conſideratione. Ponamus angulum incidentiæ LIP augeri infinite parvo angulo *l*IL, ut quantitas refractionis ſit minima vel maxima, requiritur, ut mutationes in angulis LIA, BEO ſint æquales & contrariæ, & hinc decreſcente angulo LIA quantitate *l*IL, tantundem creſcere debet angulus B*eo*, hoc eſt, ſi fiat *teq* ad OEN parallela, oportet, ut ſit *teo* $=$ *qen* $=$ *n*IN. Evidens autem eſt, id fieri non poſſe, niſi triangulum I*eq* ſit iſoſceles, & I*q* $=$ *qe*, adeoque idem ſit angulus incidentiæ in egreſſu *e*, ac in ingreſſu in prisma ad I, ad quod neceſſarium eſt, ut etiam ſit *me* $=$ I*m*, & tum erit I*e* parallela ad AB, ſeu congruet cum IE.

55. Sit jam in hypotheſi refractionis minimæ angulus prismatis ACB $= c$; quia IE ad AB parallela, & anguli MIC, MEC recti, nec non MI $=$ ME, erit IME $+$ ICE $= 180^\circ =$ IME $+$ MIE $+$ MEI $=$ IME $+$ 2MIE, adeoque ICE $=$ 2MIE; dicatur ONR $=$ EIN $+$ IEN $=$ 2EIN $= r$, fiet $\frac{1}{2} r =$ EIN, & $\frac{1}{2} r + \frac{1}{2} c =$ EIN $+$ MIE $=$ angulo incidentiæ MIN. Eſt autem *ſ.* MIE : *ſin.* MIN $= n : m$,

ſive

five $f. (\frac{1}{2} c) : fin. (\frac{1}{2} r + \frac{1}{2} c) = n : m$; & hinc $m = \frac{n \times fin. (\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} r)}{fin. \frac{1}{2} c}$;

Aut fi (quod commodius) ponatur $n = 1$, $\frac{\frac{fin. (c + r)}{2}}{fin. \frac{1}{2} c} = m$. Patet ergo, quod fi angulus r & c determinetur, reperiatur ratio finus incidentiæ ad finum refractionis.

56. Qua ratione angulus c inveniri poffit, jam indicavimus; fupereft, ut etiam oftendamus methodum determinandi angulum r ex minima refractione radii lucis in prismate. Per exiguum foramen F incidant in conclave probe obfcuratum radii SFI, *sFi* in prisma ABC, ita, ut planum fectionis ABC, in quo funt radii IE, *ie*, fit ad prismatis axem perpendiculare (fig. 24 Tab. III), & rotetur prisma tamdiu circa axem fuum, donec fpectrum coloratum O*o* in plano verticali oppofito confiftat in infimo loco, cujus fupremus limbus violaceus O, & infimus ruber *o* notetur, & quam citiffime remoto prismate excipiatur in plano verticali vel eodem, vel alio ad id parato LK imago folis *Aa* ex radiis irrefractis. Concipiantur radii OE, *oe* producti, donec occurrant radiis incidentibus FI, F*i* pariter productis in N, *n*, ex quibus punctis ope plumbaginis demittatur perpendiculum NX, *n*X, quod idem cenferi poteft, quando radii FI, F*i* incidunt prope C, & fpatium I*i* fit valde parvum. Ex N, *n* concipiantur rectæ NM, *nm*; item NK, *nk*, quarum illæ funt æquales cum XP, hæ cum XL; attamen quia radius *ie* tantillo deflectit a parallelismo cum AB, prudente æftimatione poterit fumi *nm* tantillo major, quam NM, & *nk* quam NK. Acceptis igitur menfuris NK, AK, item *nk*, *ak*, in triangulis NKA, *nka* ad K, *k* rectangulis quærantur anguli KNA, *kna*. Eodem modo menfurentur verticales OP, *o*P; dabitur etiam OM = OP — MP = OP — NX, & *om* = *o*P — *n*X. Pariter menfurata NM = XP, & *nm* (fi lubet tantillo accepta majore) invenientur anguli ONM, *onm*. Evidens eft, fi O*o* cadat infra NK, *nk*, fore fummam angulorum ONM + KNA refractionem totam radiorum violaceorum, & fummam *onm* + *kna* refractionem radiorum rubrorum; at fi O*o* cadat infra NM, *nm*, refractio erit differentia dictorum angulorum - ONM + KNA, & - *onm* + *kna*. Ex quo manifeftum eft, obtineri angulum r tam pro rubris, quam pro violaceis, quorum differentia dat difcrimen inter utriufque generis radios. Porro media refractio accipitur radiorum, qui funt in confiniis aurantiorum, & flavorum; unde fi menfuretur horum diftantia in fpectro a P, competens aliqua altitudo inter NX, & *n*X, eodem modo refractio pro id genus radiis calculari poterit.

Fig. 24. Tab. III.

57. Quod fi fpatium I*i* non fit tam parvum, & major punctorum *i* & I ab angulo C diftantia, puncta N, *n* fatis accurate hunc in modum determinari poterunt (fig. 25 Tab. III). Menfuretur proxime

Fig. 25. Tab. III.

angulus

angulus FIA, complementum anguli incidentiæ QIS = FIT; accipiatur etiam diſtantia puncti I a C, uti etiam altitudo prismatis CD, & AB (ſupponitur triangulum ACB iſoſceles). Quia IE ad AB proxime parallela, erit AC: AD = IC: IR, & CD: AD = IR: QR. Demiſſo ex Q in IN perpendiculo QS, eſt *ſin.* QIR (= *ſin.* $\frac{1}{2}$ c): *ſin.* QIN = RQ: QS; habebitur igitur QS, quæ parum differt a QN. Unde ſi calculetur angulus *r* primo aſſumpta QS pro QN, dabitur *r* proxime, quo habito dabitur quoque proxime *ſin.* INR = *coſ.* $\frac{1}{2}$ *r*; & ſi fiat *coſ.* $\frac{1}{2}$ *r*: 1 = QS: QN, poterit *r* repetito calculo accuratius inveniri. Verum ut dixi, poſito ſpatio I*i* exiguo, & radiis incidentibus prope C, error ſenſibilis vix enaſci poterit, ſi etiam puncta N, *n* non tam accurate determinentur, præcipue (quod ſemper curandum) quando ſpatium
Fig. 24. Tab. III. (fig. 24 Tab. III) XP, ſeu NM, *nm* eſt plurium pedum; tum enim diſcrimen paucarum centeſimarum digiti mutationem in angulis ONM, *onm*, KNA, *kna* ſenſibilem inducere nequit. Sed major eſt difficultas in notando extremo limite radiorum violaceorum ob debilitatem lucis jam in umbram vergentis. Quare conveniet hunc primum notare, cum in limitibus radiorum rubrorum, & imaginis ſolis irrefractæ notandis nulla ſit difficultas, ut inde error notabilis oriatur.

58. Ut experimento acquieſci poſſit (quod univerſe in hoc genere probe obſervari convenit), ſæpius id repetendum erit; prodet ſe ſe ſemper aliquod exiguum diſcrimen; verum medio ex pluribus accepto, ad verum valorem de *m* eo propius acceſſiſſe nos cenſebimus, quo frequentius experimentum fuerit iteratum. Quod ſi aliqua ex ejusmodi experimentis nimium aberrent a reliquis, quam ut pari accuratione inſtituta credi poſſint, ea penitus rejicienda ſunt. Præterea obſervandum, oportere hoc refractionis examen inſtitui tali tempore, quo intra breve tempus ſolis altitudo non ita ſenſibiliter mutatur, ſe-
Fig. 24. Tab. III. cus enim anguli KNA, *kna* (fig. 24 Tab. III) ab iis, qui eſſe deberent, nimis diſcreparent. Unde aptiſſimum tempus erit prope meridiem. At ſi eo per circumſtantiis uti non liceat, & periculum ſit majoris variationis altitudinis ſolis, adhibenda erit machina, quam helioſtatam vocant, aut alia æquivalens, quo poſſit radio incidenti per tempus ſufficiens eadem conſtanter directio tribui. Et ſiquidem id genus machina ad manus ſit, calculus erit adhuc commodior; quippe ſi radius incidens conſervetur in ſitu horizontali, ut imago directa incidat in M*m*, anguli tantummodo ONM, *onm* calculandi erunt. Denique ſi præſto ſit horologium Aſtronomicum, notatis limbis ſpectri colorati, & adſcripto tempore, quo id factum eſt, poterit ex ipſo tempore inveniri altitudo ſolis vera, quæ ſi corrigatur competente refractione, invenietur angulus KNA, *kna*. Ceterum vel me tacente quisque intelligit, neceſſe non eſſe, ut imago ſolis directa excipiatur plano verticali, cum æque anguli ANK, *ank* calculari facile poſſint, ſi notentur limbi ex-

tremi

tremi in horizontali XP, & menſurentur eorum diſtantiæ ab X, quanquam ſæpe commodius adhibeatur planum verticale.

59. Subjicio in tironum gratiam exemplum calculi totius experimenti, licet non accuratiſſimi (chartas enim, in quas alia retuli, dudum abjeci) quod aliquot ab hinc annis inſtitui. Prisma e vitro Anglicano, quod *Flintglaſs* appellant, intra duo brachiola, ut cum liberet, eximi poſſet, applicabatur altera ſuperficie plana laminæ tenui, ferreæ, & nigræ, circa duplicem axem mobili, ita, ut ad quoslibet angulos inclinari (quo idem obtinebatur, quod converſione circa axem), & ſimul eum ſitum acquirere poſſet, ut radius incidens eſſet ad axem perpendicularis. In lamina erat foramen circulare diametri 0,08 digiti, angulo prismatis proximum. Limbis laminæ undique perforatis aſſutus erat pannus niger, & craſſus, qui valvæ feneſtræ affixus excludebat omnem lucem, quæ per aliud foramen valvæ admiſſa alia via, quam per prisma, in conclave bene obſcuratum ingredi potuiſſet. Ut dimenſiones, quas ſubjungo, rite intelligantur, inſpiciatur (fig. 24 Tab. III; notetur tamen, ſpectrum prismaticum O*o* fuiſſe infra NM, *nm*.

KL = 44,98 *dig.*	*k*L = 44,90	NK = 32,02
LA = 1,90	L*a* = 1,07	*nk* = 32,05
KA = 43,08	*ka* = 43,83	
MP = 44,98	*m*P = 44,90	NM } 122,7.
PO = 10,01	P*o* = 4,56	*nm* } 122,7.
MO = 34,97	*mo* = 40,44	

Reſol. trianguli NKA. Anal. NK : KA = 1 : *tang.* KNA.

Log. KA	=	1,6342757
Log. 1	=	10,0000000
Sum.	=	11,6342757
Log. NK	=	1,5054213
Log. *tang.* KNA	=	10,1288544
proximus	=	10,1289428, cui competunt 53° 23′.

Reſolutio trianguli NMO. Anal. NM : MO = 1 : *tang.* MNO.

Log. MO	=	1,5436956
Log. 1	=	10,0000000
Sum.	=	11,5436956
Log. NM	=	2,0888446
Log. *tang.* MNO	=	9,4548510
proximus	=	9,4546276, cui conveniunt 15° 54′

Refractio igitur tota radiorum violaceorum eſt differentia angulorum KNA − MNO = 53° 23′ − 15° 54′ = 37° 29′, quam ad diſtinctionem a refractione radiorum rubrorum poſſumus vocare = r'.

Resolutio trianguli *kna*. Anal. $nk : ka = 1 : tang.\ kna$.

Log. *ka*	=	1,6417715
Log. 1	=	10,0000000
Summ.	=	11,6417715
Log. *nk*	=	1,5058280
Log. *tang. kna*	=	10,1359435
proximus	=	10,1358197, cui respondent 53° 49′.

Resol. trianguli *mko*. Anal. $nm : mo = 1 : tang.\ mno$.

Log. *mo*	=	1,6068111
Log. 1	=	10,0000000
Summ.	=	11,6068111
Log. *nm*	=	2,0888446
Log. *tang. mno*	=	9,5179665
proximus	=	9,5177606, cui competunt 18° 14′.

Refractio tota radiorum rubrorum 53° 49′ − 18° 14′ = 35° 35′ = *r*.

Habitis r', r pro utroque radiorum genere, facile jam invenitur m' pro violaceis, & m pro rubris.

Angulus prismatis *c* fuit proxime 51° 30′, hinc $\frac{c + r'}{2} = 44° 29'$

$\frac{c}{2} = 25° 45'$

$$\text{Log. } \mathit{sin.}\ \frac{(c + r')}{2} = 9{,}8455332$$
$$\text{Log. } \mathit{sin.}\ \tfrac{1}{2} c = 9{,}6379351$$
$$\text{Log. } m' = 0{,}2075981$$

Proximus huic logarithmus est 0,2076344, cui debetur numerus 1,613. proinde erit ratio sinus incidentiæ ad sinum refractionis in egressu e vitro in aerem 1 : 1,613, pro radiis violaceis.

Pariter $\frac{c + r}{2} = 43° 32'$. Log. *sin.* $\frac{c + r}{2}$ = 9,8380783

Log. *sin.* ½ *c*	=	9,6379351
Log. *m*	=	0,2001432
proximus	=	0,2000292, cui

respondet numerus 1,585.

Hinc ratio sinus incidentiæ ad sinum refractionis pro radiis rubris in egressu e vitro in aerem 1 : 1,585. Differentia inter m' & m = 0,028 est discrimen refractionum, in hac quidem vitri specie, quantum præsens exprimentum indicat, pluribus enim acceptis medium quoddam fuit 0,031, $m' = 1{,}611$, $m = 1{,}58$.

65.

65. Diximus, in vitro ordinario pro radiis rubris eſſe rationem ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis in egreſſu e vitro in aerem proxime 1 : 1,54, & pro violaceis 1 : 1,56; & in plurimis vitrorum ſpeciebus ea ratio minor eſt, quam 1 : 2.

Hinc etiam frequentiſſime eſt $r < c$, quemadmodum in ſuperiore exemplo fuit $r' = 37^{\circ}\,29'$, $r = 35^{\circ}\,35'$, & $c = 51^{\circ}\,30'$. Unde ſi c ſit angulus exiguus, fere ſemper erit $\frac{c+r}{2} < c$, aut ſaltem non multum excedetur c a $\frac{r+c}{2}$ in caſibus valde raris, conſequenter poterit etiam $\frac{c+r}{2}$ cenſeri angulus exiguus. Jam vero in angulis exiguis arcus ſenſibiliter non differunt a ſuis ſinubus, & pro $\frac{\text{ſin.}\,(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}r)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}c} = m$: licebit ſumere $\frac{c+r}{c} = m$, $\frac{r}{c} = m - 1$, aut $r = (m-1)\,c$.

Et ſi ſint duo ejuſmodi priſmata exigua, quorum anguli ſint c, c', ex eadem maſſa vitri, erit refractio primi $r = (m-1)\,c$, ſecundi $r' = (m-1)\,c'$, ideoque $r + r' = (m-1)(c + c')$, eritque ſumma refractionum $r + r' = R$ eadem cum refractione priſmatis ejuſdem ſpeciei, cujus angulus ſit $C = c + c'$, modo ne $c + c'$ major ſit, quam ut adhuc cenſeri poſſit angulus exiguus.

66. Diſcrimen inter refractionem radiorum rubrorum, & violaceorum a nonnullis etiam hunc in modum explorari ſolet. Tingatur tabula quadrangularis, aut charta firmior ACDF parte altera ABEF colore rubro, altera BCDE violaceo, & circumplicetur eidem filum tenue ſericum AabEBcdD nigri coloris: conſtituatur lens IKL in diſtantia GO, quæ fere æquet duplum focum radiorum parallelorum; ſi tabella AD probe illuminetur (quod fieri poterit, ſi lens ſit inſerta aperturæ circulari valvæ feneſtræ conclavis obſcurati, & in AD ope ſpeculi reflectantur radii ſolares) ejus imago in pari fere diſtantia OM excipiatur tabula alba XYZW, & menſuretur accurate imprimis diſtantia OM, quando in imaginis parte violacea QTSR diſtincte apparet filum, quod tum non niſi confuſum videbitur in parte imaginis rubræ QTVP. Removeatur dein paullum a lente charta alba, vel tabula XZ, donec filum in parte imaginis rubra optime diſcernatur, & notetur denuo diſtantia OM nova. Sit prior $= a$, poſterior $= b$, GO $= d$, m pertineat ad radios rubros, m' ad violaceos, habebuntur duæ æquationes $b = \frac{dr}{2d\,(m-1) - r}$, & $a = \frac{dr}{2d\,(m'-1) - r}$, poſita ſcilicet $n = 1$, ex quibus inveniri poſſunt m' & m, ſiquidem noti ſint radii ſphæricitatum, ut commodioris calculi gratia adhiberi poſſit formula

Fig. 26. Tab. III.

E 2 lentis

lentis iſoſceliæ; verum me quidem judice prius allata methodus inveſtigandi refractionem per prisma hac multis ex capitibus præferenda eſt, ut cuivis experimentum capienti illico patebit.

ARTICULUS II.

De inveniendis radiis ſphæricitatis lentium.

67. Sæpe, & præcipue dum conficienda ſunt teleſcopia accuratiora, ſcire debemus radios ſphæricitatis lentium. Quando foci lentium ſunt longiores, moduli, ad quos tornatæ ſunt, ob exiguam cavitatem, in hunc finem parum ſubſidii præſtant, utpote cum minimus error in metienda profunditate moduli producat ingentem in radio. Generatim vero cum id genus moduli ſemper atterantur, atque figuram mutent, uſui eſſe non poſſunt. Unde commodiſſime ſequens methodus adhiberi proterit, ſi detur lens jam elaborata e certa maſſa vitri, de cujus refractione conſtat. In conclavis obſcurati valva (fig. 27 Tab. III) excidatur foramen exiguum, quod pro lentibus minoribus non majorem, quam duarum linearum diametrum habeat, pro majoribus etiam paullo ampliora adhiberi poterunt, cui agglutinentur duo capilli humani (dum lentes minoris ſunt foci; pro majoribus uſui eſſe poſſunt pili equini) decuſſatim poſiti ad F; proxime ad foramen pariter agglutinetur fruſtillum chartæ albæ & nitidæ. Per foramen F non admittendi ſunt radii ſolares, ſed tantummodo lux diurna, ex atmoſphæra, & objectis terreſtribus reflexa. Conſtituatur regula CD in ſitu horizontali, & ſuper ea lens (quam utrinque convexam ponimus) AB ſitu ad foraminis planum parallelo, tamdiu admovenda foramini F, vel ab eo removenda, donec in charta proxime ad F videatur imago foraminis *f* ita diſtincte, ut capilli optime diſcernantur. Advertetur, diſtinctionem imaginis citiſſime mutari exiguo motu lentis. Unde notetur accurate diſtantia lentis GH ab imagine. Tum invertatur lens, ut altera ejus ſuperficies reſpiciat foramen, quæ prius averſa fuerat, atque denuo exploretur diſtantia, noteturque, dum imago foraminis capillos nitidiſſime exhibet. Debet autem imago proxime ad ipſum foramen projici, ut nullum ſenſibile ſit diſcrimen inter diſtantias foraminis & imaginis a centro lentis. Præterea apertura lentis modica ſit, oportet, ut radii ſint axi lentis proximi, ne opus ſit correctione ex apertura lentis. His rite præſtitis, facile erit radios ſphæricitatis reperire.

Fig. 27. Tab. III.

68. Sit (fig. 28 Tab. III) lentis MN ſuperficies MDN obverſa objecto O; ut ejus imago proxime ad O depingatur, neceſſe eſt, ut radii ex O incidentes in I ita refringantur ad T, ut ſit IT ad ſuperficiem MAN perpendicularis, alias enim radii reflexi ad T non iterum

Fig. 28. Tab. III.

ad

ad O redire possent, refractione in I facta. Igitur TI debet congruere cum radio sphæricitatis superficiei aversæ ab objecto TC. Quare ut inveniatur distantia puncti O a lente, satis est, si consideretur radius lucis directione TC ad centrum superficiei MAN incidens in superficiem MDN in puncto I, quando e vitro in aerem exit. Jam vero formulam, dum incidit in superficiem convexam ex aere in vitrum, habuimus (5) $\frac{dmr}{d(m-n)-nr} = z$, in qua si ponatur $n = 1$, & z ex observatione nota $= d$, imprimis ob situm contrarium superficiei ponendum est $-r$, dein quia e vitro in aerem radius lucis incidit, 1 loco m, & m loco 1, pro d autem, si dicatur radius superficiei MAN $=$ R, sumendum est — R, quoniam radii convergunt ad C. His mutatis formula fiet $\frac{-R \times -r}{-R(1-m)+r} = \frac{Rr}{R(m-1)+r} = d$. Clarum est, si versa lente nova distantia imaginis fuit $=$ D, in hac formula tantummodo surrogandum esse r pro R, & ex opposito R pro r. Unde habebitur $\frac{Rr}{r(m-1)+R} = D$. Ex prima fit $Rr = dR(m-1) + dr$; ex secunda $Rr = Dr(m-1) + DR$, & hinc

$$dR(m-1) + dr = Dr(m-1) + DR$$

$$dr - Dr(m-1) = DR - dR(m-1)$$

$$\frac{dr - Dr(m-1)}{D - d(m-1)} = R.$$

$$\frac{dr^2 - Dr^2(m-1)}{D - d(m-1)} = Rr$$

$$\frac{Rr}{R(m-1)+r} = \frac{\frac{dr^2 - Dr^2(m-1)}{D-d(m-1)}}{\frac{dr(m-1) - Dr(m-1)^2}{D-d(m-1)} + r} =$$

$$\frac{r^2(d - D(m-1))}{dr(m-1) - Dr(m-1)^2 + Dr - dr(m-1)} = \frac{r^2(d-D(m-1))}{Dr - Dr(m-1)^2} =$$

$$\frac{r(d - D(m-1)}{D(2m - m^2)} = d.$$

Ex hac æquatione eruitur $r = \frac{Dd(2m-m^2)}{d - D(m-1)}$. Brevitatis gratia ponatur hic valor $= \varrho$, & substituatur pro r in æquatione $\frac{Rr}{r(m-1)+R} = D$, habebitur $\frac{R\varrho}{\varrho(m-1)+R} = D$; $R\varrho = D\varrho(m-1) + DR$, sive $R(\varrho - D) = D\varrho(m-1)$, ac tandem $R = \frac{D\varrho(m-1)}{\varrho - D}$.

 Unde

Unde data m, & notis per experimentum d & D, innotescunt radii sphæricitatum r & R.

69 Observa I. Si habenda sit ratio crassitudinis lentis $= c$, ex figura 28 intelligitur, ob TI proxime $=$ AD $= c$, ponendum esse $\frac{r\,(R - c)}{(R - c)\,(m - 1) + r} = d$, & $\frac{R\,(r - c)}{(r - c)\,(m - 1) + R} = D$, & si ineatur calculus, invenitur aliquantulum accuratius utervis radius. Sed longe commodiores obtinentur expressiones sequente methodo. Cum habuerimus $\frac{Rr}{Rm - R + r} = d$, erit $\frac{Rm - R + r}{Rr} = \frac{m - 1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{d}$, & $\frac{1}{R} = \frac{1}{d} - \frac{m - 1}{r}$. Pariter quia fuit $\frac{Rr}{rm - r + R} = D$, habebimus $\frac{m - 1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{D}$; sed invenimus $\frac{1}{R} = \frac{1}{d} - \frac{m - 1}{r}$, ideoque $\frac{m - 1}{R} = \frac{m - 1}{d}\ \ \frac{- m^2 + 2m - 1}{r} = \frac{m - 1}{d} - \frac{(m - 1)^2}{r}$; hic valor substituatur, fiet $\frac{m - 1}{d} - \frac{(m - 1)^2}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{D}$, & $\frac{1}{D} - \frac{(m - 1)}{d} = \frac{-(m - 1)^2 + 1}{r}$, seu $\frac{d - D\,(m - 1)}{Dd} = \frac{-(m - 1)^2 + 1}{r}$, sive $\frac{Dd\,(-(m - 1)^2 + 1)}{d - D\,(m - 1)} = r$, aut denique $\frac{Dd\,(2m - m^2)}{d - D\,(m - 1)} = r = \varrho$. Resumatur jam formula $\frac{m - 1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{d}$, & adhibito ϱ pro r, fiet $\frac{1}{R} = \frac{1}{d} - \frac{(m - 1)}{\varrho} = \frac{\varrho - d\,(m - 1)}{d\varrho}$, ac $R = \frac{d\varrho}{\varrho - d\,(m - 1)}$.

70. Observa *secundo*. Si lentes sint concavæ, ope Catoptricæ facilius inveniuntur radii, ex qua interim sumere nobis licebit formulam foci speculi sphærici concavi $\frac{dr}{2d - r} = x$, in qua x denotat distantiam foci sive imaginis, d distantiam objecti, r radium cavitatis. Quod si igitur imago habeat eandem distantiam cum objecto, fiet $\frac{dr}{2d - r} = d$, vel $r = 2d - r$, aut $2r = 2d$, vel $r = d$; quare dum imago foraminis distinctissime apparet, ipsa distantia lentis ab imagine exhibet radium sphæricitatis. In meniscis radius superficiei obversæ foramini immediate ex sola reflexione tanquam sphærici speculi cavi invenitur; sed ut obtineatur radius pro superficie postica,

opus

opus eſt refractione in anteriore, & reflexione in poſtica. Ponamus igitur radium ſuperficiei objecto obverſæ notum eſſe $= R$, erit in formula $\frac{dmr}{d(m-1)-r} = z$, loco d ſumendum $-r$, & R pro r, item 1 pro m, cum lux e vitro egrediatur in aerem. Diſtantia imaginis obſervata ſit $= d$, habebitur $\frac{-rR}{-r(1-m) - mR} = \frac{rR}{-r(m-1)+mR}$ $= d$, $rR = -dr(m-1) + mRd$, $rR + dr(m-1) = mdR$, ac $r = \frac{mdR}{R + d(m-1)}$.

71. Ex iis, quæ adhuc attulimus, apparet, radios ſphæricitatis non inveniri, niſi prius conſtet de ratione ſinuum angulorum incidentiæ, & refractionis, ſeu niſi detur m. Atqui non ſemper haberi poſſunt prismata ex eadem vitri maſſa, ex qua jam habentur lentes elaboratæ: unde opus erit etiam methodo, per quam ope ejusdem lentis reperiatur m. Præter diſtantias d, D imaginum foraminis ab utravis ſuperficie exploretur itaque etiam focus dioptricus radiorum parallelorum, radiis ſolis ad minimum, qui haberi poteſt, circellum in charta alba collectis, & ejus diſtantia a lente accurate menſurata, vel ſumpto objecto remotiſſimo, ut radii ex eo incidentes pro parallelis haberi poſſint, vel denique in ejusmodi defectu quæratur focus idem ex foco objecti vicinioris, de cujus diſtantia accurate conſtet (15), aut denique ſi per N. 21 conſtituatur lens in medio inter objectum, & ejus imaginem diſtinctiſſime depictam, cum in hoc caſu utriuſque diſtantia ſit dupla foci radiorum parallelorum. Dicatur diſtantia foci radiorum parallelorum $= \delta$, erit (8) $\frac{Rr}{(m-1)(R+r)} = \frac{Rr}{mR - R + mr - r} =$ $= \delta$, & $\frac{m}{r} - \frac{1}{r} + \frac{m}{R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{\delta}$. N. 69 invenimus $\frac{m}{r} - \frac{1}{r}$ $+ \frac{1}{R} = \frac{1}{d}$, & $\frac{m}{R} - \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{D}$; addantur hæ tres fractiones trium focorum, fiet $\frac{m}{r} - \frac{1}{r} + \frac{m}{R} - \frac{1}{r} + \frac{m}{r} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R} + \frac{m}{R}$ $- \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{2m}{r} + \frac{2m}{R} - \frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{d} + \frac{1}{D}$. Si addantur ſolæ fractiones $\frac{1}{d} + \frac{1}{D}$ inter ſe, fiet $\frac{m}{r} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R} + \frac{m}{R} - \frac{1}{R}$ $+ \frac{1}{r} = \frac{m}{r} + \frac{m}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{D}$, hoc eſt $\frac{m(R+r)}{Rr} = \frac{D+d}{Dd}$, & $m = \frac{(D+d)Rr}{Dd(R+r)}$. Hic valor de m ſubſtituatur in ſumma fractionum

omnium

omnium trium focornm, fiet $\frac{2(D+d)R}{Dd(R+r)}+\frac{2(D+d)r}{Dd(R+r)}-\frac{1}{r}-\frac{1}{R}$ $=\frac{2(D+d)(R+r)}{Dd(R+r)}-\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{2(D+d)}{Dd}-\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=$ $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{d}+\frac{1}{D}$, & transpositione $\frac{2D}{Dd}+\frac{2d}{Dd}-\frac{1}{d}-\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}=$ $\frac{1}{d}+\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}=\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{R+r}{Rr}$, vel $\frac{Dd+d\delta-Dd}{Dd\delta}=\frac{R+r}{Rr}$, & $\frac{Dd\delta}{D\delta+d\delta-Dd}=\frac{Rr}{R+r}$. Substituatur hic valor in æquatione ad $m=\frac{(D+d)Rr}{Dd(R+r)}$, obtinebitur $m=\frac{(D+d)Dd\delta}{Dd(D\delta+d\delta-Dd)}=\frac{(D+d)\delta}{D\delta+d\delta-Dd}$ $=\frac{D\delta+d\delta}{D\delta+d\delta-Dd}=1+\frac{Dd}{D\delta+d\delta-Dd}$.

72. Etsi hæc methodus admodum sit elegans (quam *R. P. Boscovich* in acceptis refero), fateri tamen debeo, in omnibus adhuc institutis a me experimentis, in quibus lentium crassitudinem neglexi, obvenire mihi valorem de m justo notabiliter minorem; & siquidem ratio crassitudinis lentium habeatur, calculus evadit permolestus, qui labor proinde omnino subeundus est, si quid accuratius erui debeat. Accedit, quod si lens sit concava, focus dioptricus radiorum parallelorum tam facile non obtineatur, etsi radii sphæricitatis fortassis accuratius inveniantur. Et sane methodus illa, qua inveniri potest satis secure focus radiorum parallelorum lentium convexarum, quando is ingens est, velut 20, 30, aut plurium pedum, & quam etiam pro Micrometris objectivis *Maskelynus* commendavit, videtur unica, quæ etiam lentibus cavis applicari satis tuto possit. Subjiciam utrumque casum.

Fig. 29. Tab. III. 73. Sit vitrum convexum DE, in quod incidant radii paralleli Oc, oI, ita ut OC transeat per centrum C; refringetur oI ad focum b; eodem modo paralleli radii PI, pC habebunt focum in a, ibique depingetur imago objecti ab, ex quo radii paralleli incidunt. Si cum vitro DE conjungatur altera lens HK, ita, ut ejus focus radiorum parallelorum sit in b & a, radii in hoc ex a & b digressi refringentur ita in k, m: g, & h, ut egrediantur e lente HK paralleli inter se, adeoque si oculus ad F constituatur, videbitur imago objecti $a\,b$ per radios parallelos, quemadmodum id clarius fiet e sequentibus, dum de tubis agemus. Sit igitur investigandus focus radiorum parallelorum vitri alicujus convexi AB, quem ponimus valde longum. Accipiatur aliquis tubus opticus melioris notæ, HDEK, & dirigatur ad objectum maxime dissitum, v. g. ad lunæ maculas, vel Jovis satellites, ut quam distinctissime videantur, nihil mutetur dein in situ vitrorum ocularium,

&

& objectivi. Ante vitrum objectivum hujus tubi DE constituatur lens examinanda AB, & in distantia Oc, quantus circiter judicatur focus, jubeatur alter quispiam tenere v. g. librum minore typo excusum, aut aliud objectum, in quo habeantur notæ quædam minusculæ, tamdiu admovendum propius, vel removendum, donec typus, vel notæ quævis distinctissime appareant. Erit cO focus radiorum parallelorum vitri AB. Nam cum tubus ita sit comparatus, ut ad visionem distinctam necessarii sint radii paralleli, evidens est, dum distincte typus legi potest, in vitrum objectivum DE incidere radios parallelos; atqui hi e vitro AB parallele egredi nequeunt, nisi veniant ex foco radiorum parallelorum O; igitur in O hic focus sit, oportet. Radius Oc per utramque lentem AB, DE irrefractus transit; Oi exit ex AB parallelus ad axem OC, adeoque venit ad lentem DE eodem modo, ac si propagatus fuisset ex distantia infinita. Pari ratione aliquis radius Pc transibit citra sensibilem refractionem per lentem AB, & alter quispiam e P in i incidens refringentur ita in i, ut e lente AB egrediatur ad priorem parallelus, consequenter radii il, cn e P digressi ita incidunt in lentum DE, ac si ex distantia infinita venirent, proinde puncti P imago efformabitur in α in eadem distantia a lente DE, in qua erat prius imago a objecti infinite distantia. Ex quo manifestum est, debere esse O focum radiorum parallelorum, quando objectum distincte cernitur vitro AB ante DE collocato.

74. Sit modo explorandus focus radiorum parallelorum vitri AB (fig. 30 Tab. III). Adesse debet lens convexa DE, cujus focus radiorum parallelorum Cb sit bene exploratus. Paretur tubus, cui instar objectivi inseratur DE, & alterum vitrum AB loco ocularis lentis tamdiu movenda in axe tubi, donec aliquod objectum remotissimum ex quo radii paralleli veniunt, distinctissime videatur; erit focus radiorum parallelorum lentis AB focus radiorum parallelorum vitri DE imminutus distantia cC utriusque vitri, sive bc. Per id genus tubos ab oculo bene constituto objecta distincte videntur per radios e vitro AB inter se se parallele egressos; jam vero radii in DE parallele inter se incidentes refringuntur ad focum b lentis DE; quare si ex AB paralleli inter se emergunt, necesse est, ut sit b focus radiorum parallelorum vitri AB, ad quem nempe convergunt radii per DE transeuntes, ut patet ex N. 8 & 19. Verum intelligitur etiam, requiri in hoc casu oculum ita constitutum, ut per radios parallelos distinctissime videat. Quod si non sit, & radii debeant aliquantum convergere, ut habeatur distincta visio, focus cb quæsitus erit aliquantum longior, utpote cum b tunc situm sit intra focum vitri AB; contrarium accidet, si oculus sit myops. Quare si oculus ejusmodi vitio laboret, debebit non immediate per tubum objectum aspicere, sed adhibere vel perspicilla, vel vitrum concavum per quod alias distincte videre consuevit. Hac cautela in priore casu opus non est, quippe tubo jam debite pro oculo com-

Fig. 30. Tab. III.

parato. Unde examen foci lentium convexarum etiam tutius erit, quam concavarum.

ARTICULUS III.

De centrandis lentibus, & exploranda earum figura ſphærica.

75. Lens male *centrata* dicitur, quando linea centra ſuperficiei utriusque conjungens non tranſit per media earundem puncta, uti (fig. 28. Tab. III) ſi AD non tranſeat per C, centrum ſuperficiei MAN, & per centrum ſuperficiei oppoſitæ MDN, ubi ponitur eſſe A medium punctum prioris & D medium punctum poſterioris ſuperficiei. Lentes minores hoc ipſo bene erunt centratæ, quod undique in aciem binæ ſuperficies coeant, veluti eadem figura talem exhibet. Quippe ſi (fig. 31 Tab. III) bini quivis ſemicirculi DMA, EMB ſe ſe interſecent in M, & cogitentur circa DE tanquam axem rotari, duæ generantur ſphæræ, pars vero MBA efficiet lentem, cujus axis BA, quæ lens eſt pars communis utrique ſphæræ, ut ex Geometria elementari intelligitur. Verum dum lentes longioris foci parantur, id non poteſt fieri, tum quod labor nimium excreſceret, tum etiam (& maxime quidem ex hoc capite) quod lentes fierent nimis tenues, & fragiles, adeoque nimis multis periculis, dum tubis inſerendæ, ex iis eximendæ, & ſæpius purgandæ ſunt a ſordibus & pulveribus adhæreſcentibus. Explorandi, utrum tali defectu laboret lens, plures quidem ſunt methodi; & ſiquidem in lentibus majoribus limbi non appareant undique ejusdem craſſitudinis, id certo indicio eſt, lentem eſſe male centratam: nam maxima craſſitudo lentis eſt AB, uti clarum eſt; quare ſi AB non ſit in medio utriusque ſuperficiei, & limbus circularis fieri; non poteſt, ut is undique eandem habeat craſſitudinem, cum omnes lineæ ad AB parallelæ nequeant eſſe æquales, niſi æqualiter diſtent ab AB. Verum cum exiguæ craſſitudinum limbi differentiæ non ita facile explorentur, ſequentem methodum proponimus admodum uſitatam, & meo quidem judicio aliis tutiorem.

Fig. 28. Tab. III

Fig. 31. Tab. III.

Fig. 32. Tab. III.

76. Parentur torno duo tubi (fig. 32 Tab. III); majoris ſectionem exhibet GH *hg*, minoris vero IK *ki*, qui facile quidem majoris cavitati inſeri, & intra eam circa axem ſuum converti poſſit, attamen nullo modo vacillet. Paretur etiam vel aſſerculus e ligno duriore ejusdem ubivis craſſitudinis L*l*, vel lamina metallica, cui in medio firmiter apprimatur tubus minor IK*ki*, ita, ut exacte ei inſiſtat ad perpendiculum. Stylo acuto undique circa perimetrum exteriorem tubi, quam planum aſſerculi tangit, ſignetur circulus, cujus centrum (in quod axis tubi incidit) remoto tubo quæratur, & ex eo diametro aliquantum majore, quam ſit diameter lentis examinandæ, deſcribatur

in

in afferculo, vel lamina alter circulus priori concentricus. Excidatur scalpello lignum, quod intra peripheriam circuli minoris est, ut afferculo tubus minor inseri, & ad perpendiculum firmari possint, quemadmodum latera sectionis tubi, & afferculi in fig. citata LKI*ikl* exhibentur. Agglutinetur dein vitrum AB examini subjiciendum ita afferculo, ut medium ejus punctum C, quantum oculi judicio fieri potest, axi tubi respondeat; tubus major GH*hg* firmetur in foramine circulari valvæ fenestræ cubiculi bene obscurati FM*mf*, eique inseratur tubus minor cum vitro, & afferculo IL*li*. Constituatur in distantia debita tabula ad vitrum parallela TV charta alba, & nitida obducta, ut in ea depingantur objecta externa quam distinctissime. Seligatur in tali imagine punctum aliquod, quod præ ceteris nitidius exhibetur, velut *o*, & siquidem axis lentis non sit CD, sed v. g. *ef*, ut cum axe tubi non congruat, tubo minore, una cum lente circa axem O*c* rotato imaginis punctum *o* describet circellum *ocp*, quod quidem etiam observabitur in aliis punctis lateralibus, præterquam in puncto *c* exhibente objectum in axe rotationis situm. Notetur iterata rotatione punctum supremum *o*, & infimum *p* hujus circelli ope cerussæ, & sistatur motus lentis, dum *o* supremum locum obtinet; tum deprimatur lens AB aliquantum versus axem tubi O*c*; evidens est, depressum iri hac ratione etiam axem lentis *ef* versus CD, & siquidem denuo rotata lente imago *o* non quiescat in *c*, circulus, quem percurrit, saltem multo minor erit, unde iterato depressa aliquantulum lente etiam hic error tolli poterit. Postquam imago puncti O quiescit, dum lens circa axem tubi rotatur, congruere debet verus axis lentis *ef* cum CD. Eximatur igitur tubus minor una cum lente afferculo agglutinata ex majore, & constituatur super basi tubi *li*, velut in fig. 33, in qua exhibet FEQ circulum majorem centro C, in quod incidit axis tubi, AGBD lentem depressam, ut *e* congrueret cum C, KN*k*M cavitatem tubi minoris. Ex peripheria circuli FEQ, super parte laminæ orichalcinæ vitro prope C agglutinatæ factis diversis intersectionibus inveniatur centrum C, & ope circini describatur ex centro C circulus maximus, qui haberi potest super lente *Acb*. Si habeatur circinus, cujus alterum crus instructum sit adamante, hæc descriptio facile peragetur. Quidquid vitri extra peripheriam *Acb* fuerit, tollendum erit, & tum habebitur lens rite centrata. Fig. 33. Tab. III.

77. Damnum ex mala centratione tantum non est, præcipue in tubis objectis terrestribus spectandis destinatis; in Astronomicis tamen, quando reticulis utendum, lente rite centrata obtinetur, ut pars objecti ad filorum intersectionem distinctissimam imaginem habeat. Verum quando tubi reticulo instructi sunt, facile detegitur, an lens rite centrata sit, si, dum stellæ culminant (quo tempore nempe intra tempus breve altitudinem sensibiliter non mutant) varias in partes rotetur vitrum objectivum, & notetur, utrum stellæ maneant in eodem

F 2 filo

filo horizontali: id si contingat, vitium sensibile non est; at si mutato situ lentis stella jam supra filum notabiliter ascendat, jam descendat, id indicio erit malæ centrationis.

78. Sed multo magis obest lentibus, si debitam figuram sphæricam non habeant, id, quod fere contingit, dum poliuntur. Solent enim fere Optici, qui conficiendis ejusmodi vitris operam dant, postquam lenti ope smiridis figuram moduli induxerunt, dein ut expoliant vel ope terræ Tripolitanæ, vel ope hæmatitis, vel denique calcis stanni, eidem modulo agglutinare fasciam chartæ, super qua deinceps lentem in utramque partem movent. Nihil autem pronius est, quam ut hac ratione pars lentis anterior minus apprimatur chartæ, quam posterior, atque hac ratione in ipsa politura figura, quam prius nacta fuerat, e sphærica abeat in conicam. Multo minus eæ lentes acquirere possunt accuratam figuram, quæ ope machinæ rotantur perpetuo super eadem parte moduli; hanc enim brevi exteri necesse est, & a reliqua figura dissidere. Optimum foret, si politura eodem modo perageretur, quo figura sphærica vitris inducitur, movendo nempe lentem quaqua versus per totum modulum, ad quod necesse foret, totum modulum charta obducere, quæ dein ope moduli convexi, & cavo congruentis accurate abrasis asperitatibus complananda foret. Verum artifices iis, quæ semel didicerunt, tenacissime inhærentes, vix adduci possunt, ut hunc poliendi laborem subeant, cum tamen certum sit, si lentes objectivæ accurata figura sphærica sint præditæ, eas multo majorem admittere aperturam, ut tubis opticis vel pari augmento major claritas, vel pari claritate majus augmentum conciliari posset.

79. Porro cum lentes instar speculi sphærici ex anteriore superficie magnam radiorum incidentium partem reflectant, facile cognoscetur, an figura sit accurate sphærica, si ejusdem objecti imago in omnibus lentis partibus, si eandem semper & oculus, & objectum habeat a superficie lentis distantiam, ejusdem magnitudinis, nec ullibi magis distorta appareat. In hunc finem exploretur methodis traditis radius sphæricitatis superficiei MFN (fig. 34 Tab. III), & vel ope circini longioris pertica instructi, vel ope styli in plano quopiam defixi, & chordæ eidem alligatæ describatur arcus $\alpha\delta$ longiore radio, quam sit radius sphæricitatis FC. Collocetur lens MN in distantia sui radii a puncto C in situ verticali, postica ejus superficie interim panno, vel charta nigra obtecta, & accipiatur aliquod objectum AB tantæ altitudinis, ut proxime æquet dimidiam diametrum lentis, v. g. parallelogrammum ex charta firmiore, vel lamina orichalcina. Statuatur id successive in arcu $\alpha\delta$, v. g. in BA, tum in ba, $\beta\alpha$ &c, oculo eidem immediate imminente, & videatur, an latitudo parallelogrammi, seu acies ejus suprema BA, ba, $\beta\alpha$ &c ejusdem magnitudinis in diversis lentis partibus E, F, G &c appareat. Rotetur tum lens aliquantum circa

Fig. 34. Tab. III.

circa axem, & repetatur eadem obſervatio. Evidens eſt, ſi non ſit eadem curvatura lentis ad E, F, & G, non poſſe imaginem aciei regulæ, vel parallelogrammi ubivis æque magnam, & nuſpiam diſtortam apparere. Quod ſi inſenſibilis ſit differentia, ea pro nulla habenda erit; quæ enim ſentiri non poſſunt, obeſſe nequeunt.

CAPUT III.

De præcipuis Inſtrumentis Dioptricis.

Cum viſus noſter, etiam dum oculus nullo laborat vitio, ſe ſe non niſi ad mediocres diſtantias extendat, plurimis commodis carendum nobis eſſet, niſi Dioptrica nobis teleſcopia ſuppeditaret, quibus videndi facultatem longe ultra eos limites extendimus, quos natura oculis poſuit. Quantum per hæc inſtrumenta ſæpe navigantium ſecuritati conſuli poſſit, quid ſubſidii in iisdem ad explorandas hoſtilis exercitus vires repoſitum ſit, quid denique utilitatis in Geographiam, in Aſtronomiam redundet, nemo eſt, qui ignoret. At quemadmodum, ut res ad ingentia intervalla a nobis remotas, brevis oculorum acies diſcernat, tubis opticis juvari debet, ita non minus Dioptrices ope indiget, ut corporum particulas, quæ alias exilitate ſua nos penitus fugerent, videamus. Aſſequimur igitur eam minutiſſimarum rerum notitiam per microſcopia, quæ adhuc Anatomiæ, Medicinæ, univerſæ denique Phyſicæ maxima incrementa attulit. Unde de his, quæ ſcitu neceſſaria ſunt, hoc capite adferemus, unam alteramve additurі machinam, quæ oblectandis magis ſpectatoribus, quam utilitati excogitata eſt.

ARTICULUS I.

De magis uſitatis Teleſcopiorum Dioptricorum ſpeciebus.

80. Teleſcopia alia corporibus cœleſtibus ſpectandis deſtinata ſunt, atque Aſtronomica propterea dicuntur, alia objectis terreſtribus. Utriusque generis teleſcopia debent objecta magnitudine aucta, clare, & diſtincte repræſentare. Et quoniam apud Aſtronomos non intereſt, an erecto, an vero inverſo ſitu exhibeantur ſidera, plerumque teleſcopia Aſtronomica duobus tantum conſtant vitris, altero longioris foci, quod objecto obvertitur, & *objectivum* dicitur, altero oculo proximo, quod *lens ocularis* appellari conſuevit. Ut autem intel-

Fig. 35. Tab. IV. ligatur constructionis ratio, sit (fig. 35 Tab. IV) MN lens objectiva, I ejus centrum, aperturæ diameter GH, in quam ex objecti remotissimi medio puncto A incidant radii paralleli inter se AG, AI, AH, quorum medius AI cum axe lentis, & tubi, cui inclusa est, congruit, & non tantum per I, sed etiam per axem lentis ocularis DE, irrefractus transibit; extimi vero, omnesque intermedii inter G & H ex eodem puncto emissi, refringentur ad focum a, in quo apex coni radiosi efformabit puncti A imaginem, Iidem porro radii in a se se intersecantes efformabunt alterum conum ad verticem oppositum, *qap*. Constituatur jam lens brevis foci DE ita in C, ut ejus focus radiorum parallelorum congruat cum a. Quoniam radii coni *qap* e foco vitri DE divergunt, evidens est, eos ita refringi in DE, ut ex eo omnes emergant paralleli cum axe Cv, & constituant fascem quemdam cylindriformem *qpsr*. Ex infimo puncto B ejusdem objecti incidant præterea radii inter se paralleli BG, BI, BH; erit radius BI principalis, qui in lente MN ita refringitur, ut situ parallelo cum incidente egrediatur. Nos hunc deinceps semper ita considerabimus, ac si citra refractionem per lentem transiret. Unde veniet in b, in quo puncto etiam BG, BH colligentur, in eadem proxime distantia a vitro MN, quam habet ab eodem focus a. Quare etiam puncti infimi imago depingetur in b, e quo radii divergentes veniunt in lentem ocularem DE. Et quoniam b est focus radiorum parallelorum vitri DE, necesse est, ut omnes hi radii, qui conum *bom* constituunt, exeant post refractionem paralleli cum axe ejusdem coni. Quæstio igitur tantum esse potest, de radio principali Ibn, quo nempe per lentem ocularem refringatur. Clarum est, posse, & debere punctum I, seu centrum lentis; objectivæ, considerari instar puncti alicujus objecti in axe lentis CI, in distantia eadem CI positi, quod emittat radios In, IC. Quare invenietur focus, seu punctum concursus radii In, cum axe producto Cv, si ponatur CI $= d$; C$a = f$, ex formula $x = \frac{df}{d-f}$, hoc est, erit $Cv = \frac{CI \times Ca}{CI - Ca}$. Quia igitur omnes reliqui radii coni *bom*, utpote e foco radiorum parallelorum vitri DE divergentes, debent ad nv paralleli ex eodem vitro egredi, efformabitur iterum fascis cylindricus *omgi* e radiis a puncto infimo objecti B emissis.

81. Patet *primo*, quod si pupilla oculi constituatur ad intersectionem utriusque fascis radiosi prope v, omnes, quoscunque ea excipit, efformare æquales angulos cum nvC. Unde angulus visorius, si oculus rite constitutus sit, ut per radios parallelos distincte videat, sub quo apparet semidiameter objecti, erit nvC. *Secundo* intelligitur, quod cum objecta referamus ad directionem radiorum oculum subeuntium, & fascis *oigm* veniat ex puncto infimo objecti, situs ejusdem objecti appareat inversus, utpote cum punctum B referamus supra punctum medium A directione vn. *Tertio* manife-

stum

ſtum eſt, cum radii omnes (vel ſaltem partem maximam) in lentis objectivæ aperturam GH incidentes, quæ multoties aperturam pupillæ ſuperat, coarctentur ad ſatis exiguum ſpatium prope ν, ii multo denſiores veniant ad oculum, quam ſi tubus abeſſet, atque adeo objectum longe clarius videri debet. *Quarto* apparet, cum angulus viſorius $n\nu C$ ſit multo major, quam angulus AIB, ſub quo videretur objecti ſemidiameter ſine tubo oculo ad I poſito, videri objectum auctum magnitudine, & quoniam etiam tanto clarius & diſtinctius apparet, idem præſtat tubus, ac ſi objectum tanto propius fuiſſet oculo redditum, quantum requireretur, ut ſub angulo $n\nu C$ cerni poſſet. *Quinto* denique quisque facile videt, quando oculus per radios divergentes melius videt, oportere lentem ocularem tantillo admovere verſus vitrum objectivum, quippe cum imagine *ab* jam intra focum parallelorum radiorum conſtituta, radii deinceps e lente oculari divergentes egredi debeant, Pariter presbytæ, qui per radios convergentes diſtinctius vident, eandem lentem paullum removebunt a vitro objectivo, quo pacto fiet, ut *ab* extra focum radiorum parallelorum poſita radii e lente oculari convergentes egrediantur, qui jam habebunt focum verſus ν finitæ longitudinis.

82. Ut ratio augmenti diametri objecti intelligatur accuratius, concipiatur, neglecta craſſitudine lentium, radius principalis BI*b* quaſi in unico puncto lentis ocularis *n* refringeretur ad ν, & demittatur ex *n* ad axem perpendiculum *ne*, quod citra errorem ſenſibilem ſpectari poteſt, velut incideret in ipſum centrum C, ita, ut CI, pro *e*I, adhiberi poſſit. Quia anguli $n\nu e$, *n*I*e* exigui ſunt, & apertura lentis ocularis itidem parva, ipſæ rectæ *ne*, ba = GI pro arcubus haberi poſſunt, qui metiantur angulos $n\nu e$, BIA = G*a*I = *b*I*a*, ob parallelas G*b*, I*a*. Sunt porro anguli directe ut arcus, qui eos metiuntur, & reciproce ut radii, quibus deſcribuntur; igitur erit angulus $n\nu e$ ſub quo objecti ſemidiameter videturper tubum, ad angulum G*a*I = AIB, ſub quo appareret ſine tubo, ut $\frac{ne}{\nu e}$ vel $\frac{ne}{\nu C}$ ad $\frac{GI}{aI}$. Quia $ab = GI$, & *ne* ad *ab* parallela, eſt $ne : ab\,(\text{vel } GI) = eI$ vel $CI : aI$, hinc $ne = \frac{GI \times CI}{aI}$, & ratio angulorum fiet $\frac{GI \times CI}{\nu C \times aI} : \frac{GI}{aI} = \frac{CI}{\nu C} : 1 = CI : \nu C$, hoc eſt, *angulus viſorius per tubum eſt ad angulum viſorium ſine tubo, ut diſtantia lentium ocularis & objectivæ ad focum actualem lentis ocularis.*

Quoniam vero νC a C*a* (foco radiorum parallelorum lentis ocularis) parum admodum differt, alii rationem angulorum exprimunt per longitudines focorum radiorum parallelorum. Cogitetur centrum C conjungi recta cum ſupremo puncto *b* imaginis, poterunt $n\nu$, C*b* cenſeri parallelæ; & cum etiam *bn* parum admodum aberret a paralleliſmo

ſmo cum axe Ca, licebit angulo nvC ſubſtituere proxime æqualem bCa & hinc erit $\frac{ab}{Ca} : \frac{ab}{aI} = \frac{1}{Ca} : \frac{1}{aI} = a\text{I} : Ca$, ſive *angulus viſorius per tubum eſt ad angulum viſorium ſine tubo, ut eſt focus radiorum parallelorum lentis objectivæ ad focum eorundem radiorum lentis ocularis.* Reapſe fere in tubis longioribus eſt Cv tanto major, quam Ca, quantum CI excedit focum Ia. Unde parum diſcriminis erit in ipſis hiſce diverſis augmenti expreſſionibus.

83. Ad objecta terreſtria ſpectanda adhibendi ſunt tubi, qui eadem ſitu erecto exhibent, quorum prima ſpecies ſunt tubi Hollandici (uti appellabantur), quorum uſus etiam olim in Aſtronomia fuit. Conſtant hi tubi lente convexa ut Aſtronomici, MN objectiva (Fig. 36 Tab. IV), & lente concava, oculari DE. Si denuo cogitentur ex medio objecti puncto A incidere radii paralleli AG, AI, AH, ſi abeſſet lens ocularis, efformaretur imago hujus puncti in axe a, uti etiam imago puncti infimi B in eadem foci radiorum parallelorum diſtantia ad b, ubi radii BG, BH, omneſque intermedii concurrerent cum radio principali BIb. At ſi lens cava DE ita conſtituatur in C, ut ejus focus radiorum parallelorum congruat cum a, radii Gp, Hq ad a convergentes ita refringi in ea debent, ut exeant e vitro cavo cum axe Ca paralleli, efformato faſce cylindrico $psrq$. At vero radii ex I (centro lentis objectivæ) divergentes IC, In ita refringentur, ut In acquirat focum virtualem e, ſeu ut refractus radius nh verſus I productus interſecet axem in e. Et quoniam reliqui radii Gm, Ho coni GbH convergunt ad b, diſtantiam foci radiorum parallelorum vitri DE, exibunt cum nh paralleli, & alterum faſcem cylindricum $mgio$ conſtituent. Quod ſi oculus proxime ad DE conſtituatur, & ſufficientes radii tam e faſce $psrq$, quam ex $oigm$ in eum ingrediantur, riteque comparatus ſit, ut diſtincte per radios parallelos videat, apparebit ei imprimis objecti ſemidiameter ſub angulo hea ſive neC, quam ſine tubo in I poſitus videret ſub angulo AIB, ſive bIa = GaI, ob GI, ab; item Gb, Ia parallelas. Dein refert punctum infimum, ex quo radii $mgio$ veniunt, directione he, nempe infra medium A, conſequenter videt objectum ſitu erecto.

Fig. 36. Tab. IV.

Si intelligatur perpendiculum nC, poſitis angulis viſoriis exiguis, facile intelligitur, eſſe angulum viſorium per tubum ad angulum viſorium ſine tubo, ut eſt $\frac{nC}{Ce} : \frac{GI}{aI}$. Eſt vero ba (ſeu GI) : nc = aI : CI, & hinc $nC = \frac{GI \times CI}{aI}$, & ratio angulorum fiet $\frac{GI \times CI}{Ce \times aI} : \frac{GI}{aI}$ = CI : Ce, ſive angulus viſorius per tubum eſt ad angulum viſorium ſine tubo, ut diſtantia lentis ocularis ab objectiva ad focum actualem lentis ocularis.

Sed

Sed quia discrimen inter Cn, & Cm = ab perexiguum est, censeri possunt anguli bCa, neC æquales, & fiet ratio $\frac{ab}{a\text{C}} : \frac{ab}{a\text{I}} = a\text{I} : a\text{C}$ seu ratio reciproca focorum radiorum parallelorum lentium.

84. Quod superius de tubis Astronomicis monuimus, universe intelligi volumus de omnibus. Myopes lentem ocularem paullum admovebunt objectivæ, presbytæ removebunt; illi enim efficient, ut in vitrum cavum incidant radii convergentes ultra focum radiorum parallelorum, ut proinde divergentes egrediantur; isti vero, ut punctum convergentiæ sit intra eorundem radiorum focum, consequenter ut e vitro emergant convergentes. In hunc finem lentes oculares includuntur tubulo mobili intra ampliorem, qui vitrum objectivum continet.

Verum cum pupillæ sit exigua apertura, pauci radii ex utroque fasce oculum subire possunt; hinc fit, ut, dum longiores sunt foci vitrorum objectivorum, non nisi exigua pars objecti uno obtutu cerni possit, & tubi habeant campum nimis parvum, cujus nomine intelligo extensionem objecti, quæ ab oculo in debito loco posito per tubum simul videri potest. Atque hinc factum, ut longiores id genus tubi in usu esse desierint, retentis tantummodo parvis illis paucorum digitorum longitudinis, qui *portatiles*, vel *theatrales* dici consueverunt. Cum enim in istis modicum requiratur augmentum, fascis *mgio*, parum inclinatur ad alterum *psrq*, ac propterea ex utrovis sufficiens radiorum copia etiam ex objecto amplo emissorum pupillam ingredi potest.

85. At enim suffecti sunt tubis Hollandicis alii, qui ab Astronomicis numero lentium ocularium tantummodo differunt. Nam adjunctis adhuc duabus aliis situs objecti erectus obtinetur. Fig. 37 Tab. IV itaque exhibet lentem objectivam MN cum prima oculari DE prorsus ut fig. 35, ita, ut ab repræsentet imaginem objecti AB, *qrsp*, *oigm* binos fasces radiorum parallele e DE emergentium, & se se in t intersecantium, ubi si constitueretur oculus, tubo astronomico uti censeretur. Jam vero si lentis secundæ convexæ focus radiorum parallelorum sit in t, fascis *qrsp*, cujus radii paralleli axi sunt, colligetur ad focum α ex altera ejusdem lentis parte, ut sit $et = e\alpha$, ibique depingetur secunda imago puncti medii objecti A, utpote cum omnes hi radii veniant ex a prima ejusdem puncti imagine. Porro alterius fascis radius nh (qui erat axis coni *bom*) cum per t focum lentis KL transeat, necessario refractione in h exibit e lente axi parallelus, dum reliqui eidem antequam ingrediantur lentem KL, paralleli ad punctum β colliguntur, ibique efficiunt imaginem secundam puncti infimi objecti B, quippe qui omnes ex b veniant. Quare secunda objecti imago efformatur $\alpha\beta$ situ contrario imaginis primæ ab. Porro axis communis $h\beta\delta$ conorum $i\beta g$, $\lambda\beta\varrho$, quia ad axem $e\alpha x$ parallelus est, si tertiæ lentis convexæ OP focus radiorum parallelorum sit itidem in α, ita re- Fig. 37. Tab. IV.

fringetur in δ, ut cum axe $\alpha\kappa$ conjungatur in diſtantia $\kappa\phi = \kappa\alpha$. Et quia reliqui radii coni $\lambda\beta\varrho$ divergunt ex foco radiorum parallelorum ejusdem lentis OP, patet, eos debere ex ea parallelos ad $\delta\phi$ exire. Eodem modo radii ex α, ſeu foco radiorum parallelorum, digreſſi emergent e lente OP paralleli cum axe $\kappa\phi$. Apparet itaque, oculo ad ϕ poſito, per radios $\kappa\phi$ efformari in eo imaginem puncti A, per $\delta\phi$ vero puncti B, & quia B refertur ad directionem $\phi\delta$, infra A, ſitus objecti erectus videtur, & ſemidiameter ſub angulo $\kappa\phi\delta$.

86. Quod attinet ad rationem angulorum viſoriorum per tubum, & ſine tubo, ſi oculus foret in I conſtitutus, manifeſtum eſt, ob $h\beta\delta$, $e\alpha\kappa$; item eh, $\alpha\beta$, $\kappa\delta$ parallelas, eſſe $\kappa\delta = \alpha\beta = eh$; hinc angulus viſorius per tubum erit $\frac{\kappa\delta}{\phi\kappa} = \frac{\alpha\beta}{\kappa\alpha} = \frac{eh}{\phi\kappa}$, ſine tubo autem $\frac{ab}{a\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{GI}}{a\mathrm{I}}$. Eſt vero $eh : n\mathrm{C} = et : t\mathrm{C}$, & $n\mathrm{C} : ab$ vel $\mathrm{GI} = \mathrm{CI} : a\mathrm{I}$, compoſitis rationibus $eh : \mathrm{GI} = et \times \mathrm{CI} : t\mathrm{C} \times a\mathrm{I}$; ſubſtituatur poſterior ratio in $\frac{eh}{\phi\kappa} : \frac{\mathrm{GI}}{a\mathrm{I}}$, fiet $\frac{et \times \mathrm{CI}}{\phi\kappa} : t\mathrm{C} = et \times \mathrm{CI} : t\mathrm{C} \times \phi\kappa$, hoc eſt, angulus viſorius per tubum eſt ad angulum viſorium ſine tubo in ratione compoſita facti ex diſtantia lentis objectivæ a prima oculari in diſtantiam puncti interſectionis t a lente ſecunda oculari (quæ diſtantia in præſente caſu eſt ejusdem ſecundæ lentis focus radiorum parallelorum) ad factum ex foco actuali lentis primæ ocularis in focum lentis tertiæ ocularis, qui poſtremus ex hypotheſi conſtructionis eſt ſimul focus radiorum parallelorum. Videbimus autem in aliis conſtructionibus, & ſyſtematis lentium ocularium neceſſe non eſſe, ut et, & $\phi\kappa$ ſint foci radiorum parallelorum.

Si tres lentes oculares ſint ejusdem foci, ſumi poterit $et = t\mathrm{C}$, & ratio angulorum fiet $\mathrm{CI} : \phi\kappa$ vel etiam $\mathrm{C}a : a\mathrm{I}$, ut in tubo Aſtronomico unica lente oculari inſtructo.

87. Ex dictis adhuc facile advertet tiro, quando agitur de tubis conſtruendis, duo attendi debere: primum eſt, talis determinatio viæ radii principalis venientis ex extremo puncto objecti, & per centrum lentis objectivæ tranſeuntis, ut axem tubi in egreſſu ex lente oculo proxima interſecet ſub angulo majore, quam ſub quo objectum videretur oculo libero in centro lentis objectivæ conſtituto. Alterum eſt, ut determinetur locus, & ſitus imaginum objectum repræſentantium. Ut hoc ſciatur, ſatis eſt, ſi calculentur radii axi tubi proximi, vel inde a centro lentis objectivæ, per quam inter ſeſe paralleli ingrediuntur, vel vero a puncto oculi, in quem itidem paralleli intrant. Toties enim depingetur imago objecti in axe ſiti, quoties hi radii in focum colliguntur. Alii radii e punctis extra axem ſitis venientes in

iisdem

iisdem proxime diſtantiis focos habebunt, ideoque loca imaginum punctorum lateralium ex primis jam innoteſcunt.

88. Ex primi generis tubis, nempe Aſtronomicis (fig. 35 Tab. IV) apparet, totum conum *bmo*, cujus radii veniunt ex *b*, & dein ad efformandam imaginem puncti B in oculo, conſtituere debent faſcem cylindricum *oigm*, ſitum eſſe ſupra *Gbm* ad axem tubi parallelam, ideoque ſi apertura lentis ocularis DE non foret major, quam apertura lentis objectivæ GH, hi radii interciperentur, proinde ad oculum non venirent, niſi alii radii a puncto objecti axi viciniore emiſſi, qui in lentem objectivam inciderent inter G & I, ac inter H & I. Ex quo manifeſtum eſt, niſi diameter aperturæ lentis ocularis major ſit, quam apertura lentis objectivæ, objecti partem non poſſe tam amplam videri. Verum cum lentes oculares longe brevioris foci eſſe debeant, quam objectivæ, fieri nequit, ut illis tanta tribuatur diameter, quanta datur lentibus objectivis, cum & nimis craſſæ fierent, & arcus D*om*E nimis magni numeri graduum, ac propterea aberrationes fierent nimis ſenſibiles. Fig. 35. Tab. IV.

Hinc ut campus major obtineatur, & minores ſint lentis oculo proximæ aperturæ, non ſine commodo inter focum lentis objectivæ, & ipſam lentem objectivam interjicitur alia lens foci mediocris, manente augmento eodem, vel etiam, ſi lubet, creſcente, prout lens oculo proxima brevioris, aut longioris foci fuerit.

Fingamus a lente objectiva MN (fig. 38 Tab. IV) efformari imaginem *ab* puncti medii & extremi objecti. Poſita lente KL in C, radius principalis in eandem incidens ex diſtantia IC, nempe Iγ, ita refringetur, ut axi occurreret v. g. in f, & ſit $Cf = \frac{CI \times f}{CI - f}$, ubi f exprimit focum radiorum parallelorum lentis KL. Quare idem radius incidet in lentem DR directione γf, & diſtantia puncti ν, in quo ſecabit axem, reperietur, $c\nu = \frac{-fc \times \varphi}{-fc - \varphi} = \frac{fc \times \varphi}{fc + \varphi}$, in qua expreſſione eſt fc diſtantia puncti convergentiæ f, & φ focus radiorum parallelorum lentis DE. Deinde in lentem KL incidunt radii Gμ, Hπ convergentes ad α, conſequenter habebunt focum breviorem v. g. $C\alpha = \frac{Ca \times f}{Ca + f}$ Eodem modo radii ad punctum b tendentes concurrent cum γn in β, ut β habeat proxime eandem diſtantiam a lente KL, nempe Cα, & efformatur proinde imago objecti $\alpha\beta$ ſitu inverſo. Quod ſi αc fuerit focus radiorum parallelorum lentis DE, radii ex α & β digreſſi emergent ex poſtrema lente inter ſe paralleli. Manifeſtum ergo eſt, ob inflexionem radii principalis γf, in lentem minoris diametri DE incidere omnes radios, quos admittit apertura lentis objectivæ GH, & quia γf, Cf convergunt, poſſe angulum *nvc* eſſe majorem, quam ſi Tab. 38. Fig. IV.

 nulla

nulla lens KL interponeretur; id eſt, obtineri hac ratione majorem campum, & augmentum poſſe vel manere idem, vel creſcere.

Rationem angulorum *nvc*, *GaI* vel AIB, in præſens non exponimus. Dabimus inferius exemplum pro ſyſtemate plurium lentium ocularium, ex quo tiro facile videbit, quid in præſente caſu agendum ſit.

89. Teleſcopia terreſtria etſi plerumque inſtructa ſint tribus lentibus ocularibus, poſſunt tamen objectum ſitu erecto exhibere, ſi vel duæ, vel plures adhibeantur. Nam (fig. 39 Tab. IV) ſi focus lentis objectivæ ſit I*a*, & imago prima *ab*, & conſtituatur lens DE brevis foci ita in C, ut C*a* ſit major, quam ejus focus radiorum parallelorum, habebit ex altera parte alium focum realem Cα, in quo effingetur ſecunda imago objecti $\alpha\beta$ ſitu erecto, unde opus tantummodo erit adhuc ſecunda lente oculari KL, cujus focus radiorum parallelorum ſit $\kappa\alpha$, ut ex præcedentibus ſatis intelligitur. Verum ita inſtructa teleſcopia in uſu non ſunt, tum quod requirantur nimis magnæ diametri lentium ocularium, præcipue oculo proximæ, ut ſufficientem radiorum copiam excipiant, tum etiam quod irides (de quibus paullo poſt) in iis nimis ſint ſenſibiles.

Fig. 39. Tab. IV.

90. Univerſe ut irides diſtinctioni imaginum minus officiant, ſolent in tubis opticis ante ea loca, in quibus imagines efformantur, collocari diaphragmata, ſeu annuli (fig 41 Tab. IV) MN, quorum, ſi e ligno parentur, externa ſuperficies cylindrica eſt, interna in aciem *abc* circularem coit, ut fere ſectio talis annuli per axem tranſiens exhibeat duo triangula. Unde in fig. 35, & 37 (in tubis enim Hollandicis uſum non habent) diaphragmata indicavimus per K, L; Q, R. Cavitas horum diaphragmatum eſt paullo minor, quam ambitus imaginis, ideoque radii inutiles, præcipue violacei, qui maximam faciunt iridum extenſionem, per ea arceantur, ne in lentem oculo proximam incurrant. Ipſa porro tuborum latera interna ſolent fuſco, aut atro colore infici, ne radii lucis irregulariter refracti poſt varias reflexiones in oculum incidant diſtinctionem turbaturi, ſed per eum colorem abſorbeantur, extinguanturque.

Fig. 41. Tab. IV.

91. Ex primis tubis terreſtribus achromaticis, quos Dollandus confecit, unus aliquis mediocris (ut patebit ex dimenſionibus) ad nos allatus fuit quinque lentibus ocularibus inſtructus, & duplice objectiva, altera e vitro uſitato, e *Flintglaſs* altera. Lentium ocularium foci radiorum parallelorum, & diſtantiæ inter eaſdem omnes acceptæ ſunt, ſed focus lentis objectivæ compoſitæ ignorabatur. Subjicio eas hoc loco, & juvandæ memoriæ cauſa figuram 40 Tab. IV, in qua facile patet, ſpatium non admiſiſſe, ut diſtantia lentis poſtremæ ocularis DE ab objectiva MN (quam ut ſimplicem ſpectamus) cum majore aliqua proportione ad intervalla reliquarum exhiberetur. Fuit itaque

Fig. 40. Tab. IV.

focus

focus radiorum parallelorum

lentis OP	$= f = 10$ lin.	Intervallum $zu = 28$ lin.
.... QR	$= g = 36$	$uq = 36{,}75$
.... ST	$= h = 38$	$qi = 30{,}5$
.... KL	$= i = 38$	$iC = 45$
.... DE	$= k = 72$	$CI = 384.$

Quia focus lentis objectivæ datus non est, ponamus radios ex OP exiisse parallelos, & siquidem eodem modo ingrediantur per OP, quo exeunt, evidens est, eos tenere debere eandem viam trans omnia vitra, qua ex objectiva lente adveniunt. Unde reperientur iidem foci, & eædem inclinationes ad axem, seu iidem anguli. Itaque radii φz, vw axi proximi, & paralleli colligentur in foco δ vitri OP, ut sit $z\delta = f$, & puncti δ distantia ab u erit $zu - f$, consequenter invenietur focus actualis lentis QR ex usitata formula $\frac{df}{d-f}$, in qua est $d = zu - f$, & $f = g$, proinde abit in $\frac{(zu - f)g}{zu - f - g}$, adhibitis numeris $zu = 28$, $f = 10$, $g = 36$, fit $\frac{18 \times 36}{18 - 36} = -36$, seu focus lentis QR est negativus, & $= uf = 36$. Incidunt igitur radii in lentem sequentem ST, velut si venirent ex f, seu velut punctum radians haberet distantiam $fu + uq = 36 + 36{,}75 = 72{,}75$, & proinde habebit hæc lens focum $\frac{fq \times h}{fq - h} = \frac{72{,}75 \times 38}{72{,}75 - 38} = 79{,}55 = qF$. Quia hic focus realis est, in lentem KL veniunt radii convergentes, ut distantia puncti convergentiæ a lente sit $iF = qF - qi = 79{,}55 - 30{,}5 = 49{,}05$, quæ proinde pro foco lentis KL negative accipienda est, eritque ejus lentis focus $\frac{-iF \times i}{-iF - i} = \frac{49{,}05 \times 38}{49{,}05 + 38} = 21{,}41 = i\alpha$. Cum sit $iC = 45$, erit $\alpha C = 45 - 21{,}41 = 23{,}59$. Igitur focus lentis DE obtinebitur $= \frac{\alpha C \times k}{\alpha C - k} = \frac{23{,}59 \times 72}{23{,}59 - 72} = -35{,}08 = aC$. Evidens est, esse a focum radiorum parallelorum lentis objectivæ compositæ MN, quoniam radii ex ea convergentes ad a per DE refringuntur ad α; unde cum $CI = 384$, addendum adhuc erit intervallum $Ca = 35{,}08$, ut propterea focus lentis objectivæ radiorum parallelorum habeat longitudinem 419,08 lin. seu 2 ped. 10. dig. 11,08 lin. seu proxime 2 ped. 11 dig. Apparet igitur, imagines in hoc tubo efformari duas, primam in $\alpha\beta$ inversam, alteram erectam in $\delta\gamma$.

92. Videamus, modo, quam viam sequatur radius principalis ex supremo puncto objecti per centrum I lentis objectivæ tubum ingressus. In hunc finem spectandi sunt radii IC, qui cum axe congruit,

 &

& Im, divergentes e puncto I, eritque focus radii $Im = \frac{IC \times k}{IC - k} = \frac{384 \times 72}{312} = 88{,}61 = CA$. Hinc convergunt radii CA, oA versus lentem KL, & distantia puncti convergentiæ A ab eadem est $CA - Ci = 88{,}61 - 45 = 43{,}61$. Focus itaque lentis KL fiet $\frac{-iA \times i}{-iA - i} = \frac{43{,}61 \times 38}{81{,}61} = 20{,}3 = i\vartheta$. Quia $iq = 30{,}5$, est distantia puncti divergentiæ ϑ radiorum ϑk, ϑq a lente ST $= 10{,}2$, & focus fiet $\frac{\vartheta q \times h}{\vartheta q - h} = \frac{10{,}2 \times 38}{-27{,}8} = -13{,}94$. Hic focus negativus additus ad qu, dat distantiam puncti divergentiæ respectu lentis QR, quæ proinde erit $= 50{,}69$; ponamus hanc esse $u\pi$. Erit focus lentis QR $= \frac{u\pi \times g}{u\pi - g} = \frac{50{,}69 \times 36}{50{,}69 - 36} = 124.34 = uf$. Subtracta $uz = 28$, obtinetur distantia puncti convergentiæ $zf = 96{,}34$ a lente OP, & focus $z\varphi = \frac{-zf \times f}{-zf - f} = \frac{96{,}34 \times 10}{96{,}34 + 10} = 9{,}06$ proxime.

Evidens est, anguli visorii per tubum rationem ad angulum visorium sine tubo esse $\frac{zy}{\varphi z} : \frac{ab}{aI}$ vel $\frac{IH}{Ia}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Est autem } Co \text{ vel } IH : ig &= CA : iA = 88{,}61 : 43{,}61 \\
ig : qk &= i\vartheta : \vartheta q = 20{,}3 : 10{,}2 \\
qk : ur &= q\pi : u\pi = 13{,}94 : 50{,}69 \\
ur : zy &= uf : zf = 124{,}34 : 96{,}34
\end{aligned}
$$

compositis rationibus fit $IH : zy = CA \times i\vartheta \times q\pi \times uf : iA \times \vartheta q \times u\pi \times zf$, & ratio angulorum fiet $\frac{zy}{\varphi z} : \frac{IH}{aI} = \frac{iA \times \vartheta q \times u\pi \times zf}{\varphi z} : \frac{CA \times i\vartheta \times q\pi \times uf}{aI} = iA \times \vartheta q \times u\pi \times zf \times aI : CA \times i\vartheta \times q\pi \times uf \times \varphi z$.

Adhibeamus jam logarithmos, erit

iA	=	43,61	=	1,6395861
ϑq	=	10, 2	=	1,0086002
$u\pi$	=	50,69	=	1,7049223
zf	=	96,34	=	1,9838066
aI	=	419,08	=	2,6222140
		Summa	=	8,9591292

Log.

$$
\begin{aligned}
\text{Log. } CA &= 88{,}61 = 1{,}9474827 \\
i\vartheta &= 20,\ 3 = 1{,}3074960 \\
q\pi &= 13{,}94 = 1{,}1442628 \\
uf &= 124{,}34 = 2{,}0941216 \\
\varphi z &= 9{,}06 = 0{,}9571282 \\
&\text{Summa } 7{,}4504913
\end{aligned}
$$

Si poſterior ſubtrahatur e priore ſumma, habebitur logarithmus quoti = 1,5086379 cui competit numerus 32,26 proxime, ideoque plus quam trigeſies bis angulus viſorius per tubum major ſit angulo, quo ſine tubo videretur objectum. Tubus vulgaris terreſtris tribus lentibus ocularibus inſtructus, ſi vitri objectivi focus ſit 3 pedum, vix magis, quam decies & ſepties diametrum objecti auget.

Rationem expoſitam angulorum viſoriorum attendenti patebit, primum terminum eſſe factum ex omnibus diſtantiis punctorum ſeu convergentiæ, ſeu divergentiæ, ex quibus radii cenſentur in lentes incurrere, multiplicatum per focum radiorum parallelorum vitri objectivi; alterum vero factum ex omnibus focis actualibus tam poſitivis, quam negativis lentium ocularium. Quæ animadverſio deinceps inſtar regulæ eſſe poteſt, ſi quando in dato lentium ſyſtemate augmentum quærendum ſit.

ARTICULUS II.

Animadverſiones Generales de Teleſcopiis Dioptricis.

93. In Optica (Cap. I N. 39) diximus, radios lucis heterogeneos diverſimode eſſe refrangibiles, ut non ſit eadem in omnibus ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis, & quidem dum radii e vitro ordinario in aerem exeunt, hanc rationem pro rubris eſſe 1: 1,54, pro violaceis 1: 1,56, pro mediis inter aurantios & flavos 1: 1,544, qui videntur omnium vivaciſſimi, maximeque ſenſibilem impreſſionem in oculum facere. Si itaque radii incidant in lentem, cujus apertura ſit AD (fig. 42 Tab. V), & centrum I, evidens eſt, focum radiorum rubrorum IR debere eſſe longiorem, quam focum radiorum violaceorum IB. Ponamus enim radium ſphæricitatis lentis iſoſceliæ (quam aliis ſubſtitui poſſe diximus) eſſe $= r$, erit pro radiis rubris IR $= \frac{r}{2(m-1)} = \frac{r}{2(1{,}54-1)} = \frac{r}{1{,}08}$, & pro violaceis IB $= \frac{r}{2(1{,}56-1)} = \frac{r}{1{,}12}$; Ponamus etiam facilioris gratia calculi $r = 1$, fiet BR = Fig. 42. Tab. V.

IR

$IR - IB = \frac{1,12 - 1,08}{1,08 \times 1,12} = \frac{0,04}{1,2096} = \frac{0,01}{0,3024}$, & hinc $IR : BR = \frac{1}{1,08} : \frac{0,01}{0,3024} = 0,3024 : 0,0108 = 28 : 1$; item $IB : BR = \frac{1}{1,12} : \frac{0,01}{0,3024} = 0,3024 : 0,0112 = 27 : 1$. In lentibus (præcipue objectivis, quarum foci longiores sunt), anguli, quibus radii refringuntur, exigui sunt, & possunt pro sinubus adhiberi ipsi anguli, Patet autem, radiis parallele incidentibus EA, FI, GD, totam refractionem esse angulum HAB pro radis violaceis, & pro rubris HAR; in triangulo autem BRA est AR : BR = *sin.* ABI (= *sin.* HAB) : *sin.* BAR, seu ang. HAB : ang. BAR; Porro cum anguli ABI, ARI exigui sint, AR ab IR, & AB ab IB sensibiliter non differunt, consequenter erit proxime IR : BR = *ang.* HAB : *ang.* BAR, ac denique ob $\frac{1}{28}$, vel $\frac{1}{27}$ partem exiguam respectu unitatis, patet, esse proxime refractionem totam, ad discrimen refractionis radiorum rubrorum, & violaceorum, ut 28 : 1, seu differentiam esse vigesimam octavam partem foci radiorum rubrorum, vel 27^{mam} foci radiorum violaceorum, & hæc quidem differentia est aberratio ex heterogeneitate in longitudine focorum.

94. Hoc ipso autem manifestum fit, quod ubicunque seu ante B, seu post B excipiantur radii refracti, nuspiam coire possint in punctum idem omnes heterogenei, sed ubivis efformabunt circulos coloratos, quorum limbi usque ad *c*C (ubi radii violacei ex B divergentes denuo occurrunt rubris) sunt rubri, a *c*C vero deinceps fiunt violacei. Et quoniam idem contingit in omnibus radiis ab iisdem digressis objecti punctis, totidem habebuntur ejusdem puncti imagines per totam longitudinem BR, aliæ post alias positæ, quot sunt colores, quæ quodammodo nebulosam efficiunt imaginem principalem, atque id reapse sunt, quod *irides* appellamus. Cum igitur hæc imaginum confusio necessario ex diversa radiorum refrangibilitate consequatur, focus præcipuus pro objectis albis (cujusmodi sunt corpora coelestia) ibi constituendus est, ubi omnes radii heterogenei in minimum circellum colliguntur, quem procul dubio haberi patet in distantia IO, ubi, uti diximus, extimi radii violacei rubros intersecant. Ut itaque magnitudinem hujus circelli, (qui est latitudo iridum, & aberratio in latitudinem a foco) definiamus respectu aperturæ vitri AD, habemus ex triangulis similibus AIR, *c*OR, vel COR, AI : IR = CO : OR, vel AI : OC = IR : OR; item triangula similia AIB, OBC dant AI : OC = IB : BO, proinde etiam est IR : OR = IB : BO, & IR + IB : OR + OB (vel BR) = IR : OR, ac denique AI : OC = IR + IB : BR. Si jam adhibeamus valores de IR, IB, BR superius expositos, fiet $\frac{1}{1,08} + \frac{1}{1,12} : \frac{0,01}{0,3024} =$

$= \frac{2,2}{1,2096} : \frac{0,01}{0,3024} = \frac{1,1}{6,6048} = 1,1 : 0,02 = 55 : 1 = AI : OC$: erit igitur diameter aperturæ ad latitudinem iridis in ratione 55: 1 proxime.

Diſtantia foci radiorum mediorum inter flavos, & aurantios eſt $\frac{1}{2(0,544)}$; & ſi loco BI + RI accipiatur $\frac{2}{2(0,544)} = \frac{1}{0,544}$, ratio AI: OC ſit proxime $\frac{1}{0,544} : \frac{0,01}{0,3024} = 55,58 : 1$, quæ non multum diſcrepat a priore. Ceterum Newtonus judicat hanc rationem multo majorem aſſumi poſſe, ſcilicet 250: 1, quod cum radii cærulei, & violacei admodum debiles ſint, diſtinctioni haud ita obturbent.

95. Hæc quidem de ratione diametri aperturæ ad diametrum aberrationis in latitudine intelligi utique debent de vitro ordinario, cum eruta ſint ex allatis rationibus ſinuum anguli incidentiæ, & refractionis. Si in aliis vitris major ſit differentia refractionis radiorum extremorum, uti contingit in eo, quod Angli *Flintglaſs* appellant, ea aberratio ad aperturam lentis majorem quoque habebit rationem. Unde etiam deducitur, ſi tubi conſtruantur ex lentibus ſimplicibus, præſtare ea vitrorum genera, quæ radios heterogeneos minime diſpergunt, adeoque vitrum vulgare, ex quo ſpecula parari ſolent, opticis uſibus aptius multo eſt, quam *Flintglaſs*, vel alia id genus, quæ admiſto minio conficiuntur. Ceterum apparet, in eodem genere lentium aberrationem in longitudine foci minui non poſſe, ſeu BR, manente eadem ſphæricitate lentis, eſſe quantitatem conſtantem, utpote cum conſtans ſit in quavis vitri ſpecie *m*. Aberratio in latitudine, ſive irides, Cc, quia ad aperturam habet rationem conſtantem, ea imminuta, ipſa quoque minuetur. Verum hoc remedii genus ſemper conjunctum eſt cum damno claritatis, quod lucis copia quoque in ratione duplicata diametri aperturæ decreſcat, & imagines, ſi augmentum majus ſit, etſi reddantur magis diſtinctæ, fiant tamen obſcuriores, ut proinde pro corporibus terreſtribus, præcipue magis diſſitis, neceſſario majores aperturæ relinquendæ ſint.

96. Quoniam irides in teleſcopiis vulgaribus per idem vitri genus tolli nequeunt, & eæ in conſtante ratione ad aperturas ſunt, evidens eſt, non aliter, quam experientia decidi poſſe, quæ aperturæ, quibus lentibus objectivis congruant. Unde ante omnia neceſſe eſt, ut varia aperturæ mutatione, variis item adhibitis lentibus ocularibus, ſemel conſtruatur tubus, qui & diſtincte, & debito cum augmento exhibeat objecta, & conſtituatur ex proportionibus tam lentis objectivæ ad ocularem, quam utriusque ad aperturam, regula, juxta quam alii longiores, brevioresve, verum æque boni in ſuo genere, tubi conſtrui poſſint.

Sit itaque talis tubi, qui debitum effectum præstet, diameter aperturæ lentis objectivæ $= D$, focus ejusdem $= F$, focus lentis ocularis $= f$, iridis, seu circuli aberrationis diameter $= I$. Imprimis evidens est, cum claritas imaginis dependeat a copia lucis, quanto major fuerit objecti imago in oculo efformata, tanto quoque debere esse majorem aperturam, ideoque debet esse diameter aperturæ proportionalis augmento, seu diametro imaginis in oculo, hoc est, $D = \frac{F}{f}$ (82); iris est in ratione constante aperturæ (94), adeoque $I = D$, idque in imagine efformata a lente objectiva; quare magnitudo iridis apparens per lentem ocularem tanto erit major, quanto minor est focus lentis ocularis, sive iridis diameter visa per lentem ocularem erit $= \frac{D}{f}$; habuimus autem $D = \frac{F}{f}$; quare iris apparens per lentem ocularem erit ut $\frac{F}{ff}$. Ut igitur alter tubus æque bonus sit, iris non debet apparere major, ideoque iris apparens per lentem ocularem, debebit esse quantitas constans, seu $\frac{F}{ff} = 1$, & $F = ff$, aut $\sqrt{F} = f$. Deducitur ergo hinc, ut *tubi sint æque boni, debere esse focos lentium ocularium in ratione subduplicata focorum lentium objectivarum.*

Dein ut tubi æque boni sint, pariter requiritur, ut exhibeant objecta æquali claritate. Porro claritas tanto major est, quanto major copia lucis incidit, seu quanto major est apertura (quæ est ut DD), & simul quanto ad minus spatium ea in oculo diffunditur, hoc est, quanto minus est augmentum, sive est in ratione reciproca augmenti, ideoque claritas exprimitur per $\frac{DD \times ff}{FF}$, quæ cum debeat esse eadem in altero tubo, constans sit, oportet, sive $\frac{DD \times ff}{FF} = 1$, & $DD \times ff = FF$, $DD = \frac{FF}{ff}$; sed habuimus $f = \sqrt{F}$, & $ff = F$, consequenter fiet $DD = \frac{FF}{F} = F$, & $D = \sqrt{F}$, id est *in tubis æque bonis etiam aperturarum diametri debent esse in ratione subduplicata longitudinis foci vitri objectivi.*

97. Huic regulæ innituntur tabulæ proportionum lentium, & aperturarum, quas passim videre est apud Opticos. Si habeas v. g. tubum Astronomicum, in quo focus vitri objectivi sit 16 pedum, ocularis vero 2 dig. 6. lin. & velis tubum 9 pedum longitudinis foci vitri objectivi, invenies focum competentem lenti oculari ex hac proportione $\sqrt{16}:\sqrt{9}$

$\sqrt{9} = 4 : 3 = 30$ lin. : $f = \frac{90}{4} = 22{,}5$ lin. 1 d. 10,5 lin. Proinde longitudo tubi fiet 9 ped. 5 dig. 9 lin aut $9\frac{1}{2}$ ped. Eodem modo si tubus 16 pedum habeat aperturam diametri 26 lin., reperitur diameter aperturæ tubi 9 pedum $= \frac{3 \times 26}{4} = 19{,}5$ lin. $=$ 1 d. 7,5 lin. Ex quo apparet, competere tubis brevioribus majores respective aperturas, quam longioribus; nam si eæ forent in ratione longitudinum, deberet tubus brevior habere diametrum aperturæ $14\frac{5}{8}$ lin.

Subjicio isthic duplicem tabulam acceptam ex *Lectionibus Element. Optices* D. de la Caille, priorem pro telescopiis Astronomicis, posteriorem pro tubis terrestribus.

Pro Telescopio Astronomico.

Long. foci vitri objectivi Ped.	Diam. apert. vitri object. dig.	lin.	Long. foci vitri ocular. dig.	lin.	Augmentum diam. apparentium circiter
1	0	6,5	0	8	20ies
2	0	9	0	10	28
3	0	11,5	1	0,5	34
4	1	1	1	2,5	40
5	1	2,5	1	4	44
6	1	4	1	6	49
7	1	5,5	1	7,5	53
8	1	6,5	1	8,5	56
9	1	8	1	9,5	60
10	1	9	1	11	63
11	1	10	2	0	66
12	1	11	2	2	69
14	2	0,5	2	3	75
16	2	2	2	5	79
18	2	4	2	7	85
20	2	5,5	2	8,5	89
25	2	8	3	0	100
30	3	0	3	3,5	109
35	3	3	3	7	118
40	3	6	3	10	126
45	3	8	4	0,5	133
50	3	10	4	3	141

Pro Telescopio 4 vitrorum.

Long. foci vitri object. ped.	Diam. apert. vitri object. lin.	Long. foci vitri ocul. lin.	Diam. diaphrag. in foco vitri obj. lin.	Augment. diam. circiter
1	4,5	16	4	9[ies]
2	6,5	22	5,5	13
3	9	26	7,5	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	10,5	28
7	14	34	11	30
8	15	36	11,5	32

Longiora telescopia objectis terrestribus spectandis raro fiunt, quod ob vaporum copiam, quibus obsita sunt, eorum imagines nimis reddantur obscuræ. Ceterum in hisce tabulis ponuntur vitra ea diligentia elaborata, quæ plerumque ab artificibus adhiberi solet. Quodsi singularis accesserit industria, & præcipue si figura sphærica in lentibus sit accurata, patiuntur & majorem aperturam, & vitrum oculare brevioris foci.

98. Irides eo vivaciores sunt, quo propius ad limbum veræ imaginis acceditur, ita, ut limites inter veram imaginem & iridem vix possint discerni. Ex hoc autem sequitur, quod *telescopia vulgaria* debeant diametros, maxime corporum lucentium, justo majores exhibere. Et quia spectata magnitudine tuborum telescopia breviora respective majores habent aperturas, quam longiora, atque iridum magnitudo est in ratione constante aperturarum, telescopia breviora etiam magis augent diametros siderum, quam longiora. Sic *Picardus* in distantia 32000 hexapedarum Parisinarum ignis tres pedes lati diametrum noctu vidit sub angulo 8″, cum apparere debuisset sub angulo tantummodo $3''\frac{1}{4}$. Nec irides tantummodo in tubis efformantur, sed etiam in oculo. Ex hoc enim capite stellæ illustriores fixæ nudo oculo apparent habere diametrum sensibilem, quæ tamen per breviora telescopia visa multo fit minor, & in longioribus tubis in punctum abit. Hinc etiam fit, ut paullo post novilunium, quando luna falcata apparet, & pars sphæræ a sole non collustrata per radios e tellure reflexos visibilis nobis est, hæc videatur ad minorem sphæram pertinere, quam illa, quæ directe soli exposita est. Hinc, dum luna infra stellam aliquam fixam subit, limbo illuminato orienti obverso, stella, cujus lumen vivacius est lunari, adhuc apparet, etsi jam videatur tota limbo lunæ obtegi debuisse, quod scilicet limbus ille apparens sit tantummodo iris, non autem verus lunæ limbus, per quam iridem stellæ lux perceptibilis adhuc nobis est. Plura hujus generis phænomena adduci possent, quæ ab iride imaginem veram objecti ambiente ortum suum habent. De telescopiis terrestribus id tantum generatim notamus, focos in eorum constructione, & positione lentium determinari

pro

pro objectis albis. Unde si alius sit objectorum color, ut certa quædam radiorum ab iis reflexorum species prædominetur, focus eidem proprius adhibendus erit. Quem in finem etiam lentes oculares tubo mobili inclusæ esse debent, ut foco lentis objectivæ magis admoveri, quando is brevior fit, vel ab eo removeri, dum fit longior, possint. Requirunt hæc telescopia lentes oculares foci longioris, quam Astronomica, tum quod ipsa objecta sint magis obscura, tum quod oculus interdiu lucem debilem non satis percipiat, proinde si majus foret augmentum, imagines fierent ita obscuræ, ut non satis discernerentur.

99. Sæpius jam monuimus, a mediis diaphanis non omnem lucem incidentem transmitti, sed magnam etiam radiorum vim reflecti. Unde si (fig. 43 Tab. V) radius ex objecto quopiam O incidat in lentem MIN, in puncto incidentiæ I pars quædam reflectetur, pars autem transmissa, & versus P refracta cum alteri superficiei in T occurrerit, Fig. 43. Tab. V. denuo in plures dispescetur, ut aliqui radii veniant ad focum f utrique superficiei debitum, alii sub angulo æquali cum ITC (est CT radius curvaturæ superficiei MTN) nempe CTR reflectantur in R, e quo puncto necesse est, ut pars luminis refracta egrediatur per R, pars iterum reflexa veniat ad posticæ superficiei punctum S, atque inde rursus partim refringatur emissa in aerem, partim reflectatur in superficiem anteriorem, donec ita fiat debilis, ut sentiri nequeat.

Ex hac consideratione patet *primo*, posse, aut potius debere ex continuis reflexionibus, quæ singulas refractiones comitantur, in eadem lente innumeros focos enasci. *Secundo* ex hisce non nisi unum, vel alterum posse esse perceptibilem, cum lucis egredientis vis semper imminuatur. *Tertio* maxime sensibilem debere esse focum f, cum vitrum semper longe plus radiorum transmittat (saltem quando angulus obliquitatis non est nimis magnus), quam reflectat; post hunc quandoque sentiri posse focum, qui efformatur in axe AO radiis per R egressis; dein fortassis etiam tertium ad F, qui debetur radiis ex S emergentibus post duas refractiones in I & S, & totidem intermedias reflexiones ad T & R. *Quarto* focos, qui efformantur ex parte objecti O, distinctioni nihil posse officere, cum radii omnes inde ab oculo abeant, neque in reliquas lentes incurrant. At vero qui fiunt in axe BP, distinctionem imaginis principalis ad f turbare possunt, præcipue si prope ad eam effingantur.

100. Ut tirones videant, id genus focos subjacere calculo, exemplum pro posteriore ad F dabimus, verum neglecta lentis crassitudine, & sumimus interim ex catoptrica non tantum illud principium, quod angulus incidentiæ sit æqualis angulo reflexionis, verum etiam formulam foci pro speculis cavis esse $x = \frac{dr}{2d - r}$, in qua d est distantia objecti, r radius cavitatis speculi, & siquidem radii incidant convergentes, non minus debere distantiam

 puncti

puncti convergentiæ sumi negativam, quam in Dioptricis formulis. Præterea formulam foci pro foco unius superficiei sphæricæ, dum lux ex aere incidit in vitrum, habuimus $\frac{dmr}{d(m-1)-r} = z$, posita $n = 1$. Si modo non ipsos focos, sed focorum fractiones sumamus, habebimus $\frac{dm-d-r}{dmr} = \frac{m-1}{mr} - \frac{1}{md} = \frac{1}{z}$, & $\frac{1}{x} = \frac{2}{r} - \frac{1}{d}$. Applicemus jam hæc ad inveniendum BF. Evidens est, radium IT ita incidere in superficiem MBN cavam (cujus radium cavitatis ponamus = R) tanquam in speculum reflectens, ac si haberet objectum distantiam BP = z, sed quia P etiam versus O ex altera parte positum esse potest, relinquamus in formula speculi cavi signa, quæ posuimus, nempe $\frac{1}{x} = \frac{2}{r} - \frac{1}{d}$, verum quia radius cavitatis est R, & $\frac{1}{d} = \frac{m-1}{mr} - \frac{1}{dm} = \frac{1}{z}$, hæc formula mutabitur in $\frac{1}{x} = \frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md}$, essetque hæc expressio, si radius TR exiret sine refractione e vitro in aerem, nil aliud, quam $\frac{1}{BQ}$, aut BQ foret focus speculi. Intelligitur porro, cum ponatur radius TR denuo reflecti ex R versus S, etiam superficiem MAN spectandam esse instar speculi cavi, cujus radius sit = r, & in quod veniant radii convergentes ad Q in distantia AQ (neglecta crassitudine lentis) $= \frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md}$. Unde in formula pro hac superficie ob radios convergentes $\frac{1}{y} = \frac{2}{r} + \frac{1}{d}$ tantummodo loco $\frac{1}{d}$ ponendum est $\frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md}$, & habetur $\frac{1}{y} = \frac{2}{r} + \frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md} = \frac{m+1}{mr} + \frac{2}{R} + \frac{1}{md}$. Denique radius RS ita incidit in superficiem refringentem MBN (cujus radius est $-$ R), ut convergat ad punctum axis V in distantia BV, cum invenerimus $\frac{1}{BV} = \frac{m+1}{mr} + \frac{2}{R} + \frac{1}{md}$. Sed in formula $\frac{m-1}{mr} - \frac{1}{md} = \frac{1}{z}$, quam deduximus ex $\frac{dmr}{d(m-1)-r} = z$, non tantum sumendum est BV = d negative ob radios convergentes, & $-$ R loco $+ r$, sed etiam 1 loco m, & m loco 1, unde hæc

hæc fiet $\frac{1-m}{-R} + \frac{m}{1} \times \left(\frac{m+1}{mr} + \frac{2}{R} + \frac{1}{md}\right) = \frac{m-1}{R} + \frac{m+1}{r} + \frac{2m}{R} + \frac{1}{d} = \frac{3m-1}{R} + \frac{m+1}{r} + \frac{1}{d} = \frac{1}{BV}$, ex qua fiet $BV = \frac{drR}{dr(m-1) + dR(m-1) + Rr}$. Si radii incidant in lentem paralleli, d fit $= \infty$, & obtinetur $BV = \frac{Rr}{r(3m-1)+R(m+1)}$. Si præterea lens fit isoscelia, seu $r = R$, fiet $BV = \frac{r}{4m}$. In hac hypothesi focus radiorum parallelorum est $\frac{r}{2m-2}$, adeoque erit $Bf : BF = \frac{1}{2m-2} : \frac{1}{4m} = 2m : m-1$. In vitro ordinario est m pro radiis inter flavos & aurantios medios $= 1{,}544$, ideoque $BF : Bf = 0{,}544 : 3{,}088 = 1 : 5{,}67$, ex quo patet, focum secundarium F a primario admodum remotum esse.

101. Quæri etiam potest, quis debeat esse radius secundæ superficiei, ut focus secundarius F incidat (quando radii in lentem veniunt paralleli) in focum primarium f? Id vero haud difficulter reperitur, si ponatur $\frac{Rr}{r(3m-1) + R(m-1)} = \frac{Rr}{r(m-1)+R(m-1)}$, aut $r(m-1) + R(m-1) = r(3m-1) + R(m-1)$, vel $r(m-1-3m+1) = -2mr = R(m+1-m+1) = 2R$, vel denique $-mr = R$; hoc est, vitrum debet esse meniscus, in quo radius convexitatis MAN est ad radium cavitatis MBN in ratione $1 : m$. Et quia $m > 1$, meniscus æquivalebit lenti convexæ. In formula inventa $\frac{Rr}{r(3m-1) + R(m-1)}$, si loco R substituatur $-mr$, fit $\frac{-mr}{3m-1-mm-m} = \frac{-mr}{-mm+2m-1} = \frac{mr}{(m-1)^2}$; & in formula foci radiorum parallelorum menisci, in quo fit R negativus, habuimus $\frac{-Rr}{(m-1)(r-R)}$, sumpto $-R = -mr$, fiet $\frac{-mrr}{(m-1)(r-mr)} = \frac{-mrr}{-(m-1)(m-1)r} = \frac{mr}{(m-1)^2}$, qui est idem omnino valor foci secundarii F ex duplice refractione, & duplice reflexione.

Quando est $R = \infty$, seu vitrum plano convexum, reperitur ratio $BF : Bf = m-1 : m+1$, & in vitro usitato $0{,}544 : 2{,}444 = 1 : 4{,}67$. Ex quo colligitur, quando non adhibentur menisci, non esse periculum ut id genus foci secundarii nimis vicini fiant primariis.

Negle-

Neglecta lentis crassitudine facile item ostendi potest, perinde esse, seu objecto obvertatur superficies MAN, seu opposita MAN. Complura alia omitto, uti focum secundarium BF fieri infinitum, si retento alterutro radio r vel R determinetur alter ex æquatione posito denominatore $= o$; fiet enim v. g. $r(3m - 1) = - R(m + 1)$, sive $\frac{-r(3m-1)}{m-1} = R$ &c. Illud unum isthic observet tiro, in expressione generali foci secundarii ex duabus refractionibus & una reflexione intermedia, quam superius habuimus $\frac{1}{QA} = \frac{1}{x} = \frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md}$ contineri casum, quando imago reflectitur ad ipsum locum objecti, quo nempe usi sumus ad inveniendos radios sphæricitatum Cap. II. Art. II. Nam opus tantummodo est, ut loco $\frac{1}{x}$ ponatur $\frac{1}{d}$, & fiet $\frac{1}{d} = \frac{2}{R} - \frac{m-1}{mr} + \frac{1}{md}$, ex qua eruitur $\frac{m-1}{2mr} + \frac{m-1}{2md} = \frac{1}{R}$; quodsi dein pro altera superficie in æquatione $\frac{1}{D} = \frac{2}{r} - \frac{m-1}{mR} + \frac{1}{mD}$ substituatur valor de $\frac{1}{R}$, habebitur æquatio, in qua solus radius r continetur.

ARTICULUS III.

De determinatione valoris partium micrometri filaris.

102. Non agimus isthic de usu micrometrorum filarium, qui in Astronomia maximus est; neque de eorum diversis generibus. Partes necessariæ sunt (fig. 46 Tab. V) filum IK verticale fixum in parallelogrammo ABCD, quod ita in foco telescopii collocatur, ut ILKM exhibeat campum, & IK transeat per axem telescopii. Tum alterum filum fixum in eodem parallelogrammo ML, quod priori IK in centro campi insistat ad angulum rectum MOI. Huic parallelogrammo, cujus latera AB, DC instructa sunt crenis, inseritur alterum EFGH ope cochleæ TS mobile, quæ intra cavam in latere prioris BC excisam circumagitur. Secundo huic parallelogrammo affigitur alterum filum verticale PQ, ut ope cochleæ una cum parallelogrammo EG protrusum ad filum IK quantum libet admoveri, indeque rursus removeri possit. Evidens est, quod si sciatur, quot secunda minuta revolutioni uni co-

Fig. 46. Tab. V N. 1.

cochleæ, ejusque certis partibus (quæ ope indicis una cum cochlea circumagendi in disco adjuncto indicantur) respondeant, ope hujus machinulæ angulos exiguos licet (unde & micrometri nomen tulit) metiri possimus. V. g. si stella quæpiam sit in R, filo verticali fixo IK certæ cuidam divisioni quadrantis respondente, & adducatur ope cochleæ filum verticale mobile PQ ad stellam, donec eam secet, in distantia a fixo OR, scietur hoc intervallum, si circumagatur cochlea, donec PQ congruat cum IK, & numerentur accurate revolutiones integræ, atque partes earum aliquotæ ab indice monstratæ. Ex iis enim scietur, quo arcu, hoc est, quot minutis & secundis stella tempore observationis fuerit remota ab illo gradu, vel minuto quadrantis, quod filo fixo IK respondebat. Facile patet, hunc usum transferri etiam ad quadrantes, quibus in mensurationibus accuratioribus anguli accipiuntur. Quin etiam quisque videt, variationes in hac machina plurimas locum habere posse. Quippe ita etiam construere licebit micrometrum, ut ope ejusdem cochleæ moveatur filum PQ, donec objectum, ad quod collineatur, sit in ejus intersectione cum horizontali ML, dein filum alterum super limbo quadrantis tensum (quod sit in eodem plano cum verticali PQ) moveatur usque ad proximum punctum divisionis quadrantis, & numerentur revolutiones cochleæ. Dicuntur ejusmodi micrometra externa. Sed de his omnibus in præsens non agimus, cum nobis tantummodo propositum sit adferre methodum determinandi valorem micrometri, hoc est, inveniendi, quot minutis, ac secundis arcus circuli æquivaleat quævis distantia OR fili verticalis mobilis PQ a verticali fixo IK.

103. Tradidimus quidem jam constructionem formulæ foci pro quavis lentium specie, dum radii ex certa distantia in lentem incidunt, uti etiam methodum comparandi angulos visorios. Verum posuimus tantam objecti extensionem, ut ejus imago occupet totum campum telescopii. At enim quando objecta exigua sunt, eorum imagines pariter in exigua campi parte continentur, neque ejusdem apparent magnitudinis, quando objecta remotiora, aut viciniora sunt. Id in præsens geometrice ostendimus. Esto (fig. 44 Tab. V.) objecti semidiameter AB, & A punctum in axe lentis MN producto situm; focus radiorum parallelorum lentis sit Cf, CF; agatur ex B per f recta BfD occurrens lenti in D, refringetur radius hanc viam secutus in lente ita, ut ad axem parallelus egrediatur DM. Si porro ex B per centrum lentis transeat radius principalis BCM citra sensibilem refractionem, patet ex iis, quæ tum in constructione formulæ $x = \frac{df}{d-f}$, tum de punctis extra axem sitis diximus, fore in M focum puncti B, concurrentibus ad M omnibus radiis ex B venientibus, & tam supra, quam infra D incurrentibus in lentem. Evidens

Fig. 44. Tab. V.

itaque eſt, definiri hac ratione ſemidiametrum imaginis MP, quæ non occupet totam amplitudinem campi teleſcopii.

Ponamus modo idem, aut æquale objectum ab collocari in minore diſtantia a lente Ca. Quoniam b vicinius eſt, quam B, rectæ Bf, bf ſe interſecant in f, & radius bf incidet in punctum lentis ſupra D, velut in E, & hinc, ſi agatur bCm occurrens Em ad axem parallelæ in m, focus puncti b, ſeu m, non tantum remotior erit a lente, verum etiam ſemidiameter imaginis mp exhibentis objectum ab major ſemidiametro prioris imaginis MP. Sunt adeo *imagines ejusdem objecti campum teleſcopii non explentis majores, dum ſpectatur in majore vicinia.*

104. Dum formulam $x = \frac{df}{d-f}$ conſtruximus, oſtendimus eſſe $DM : fC = BD : Bf = AC : Af$; Ex ſimilitudine triangulorum ABf, fDC habetur fC: DC (vel MP) $= Af$: AB, ſeu $fC : Af =$ MP: AB. Cum igitur in priore analogia ſit $DM : AC = fC : Af$, erit quoque $DM : AC = MP : AB$, hoc eſt, diſtantia objecti eſt ad longitudinem foci actualis, ut diameter objecti ad diametrum imaginis. Atqui objecti vicinioris diſtantia foci a lente major eſt; igitur etiam imaginis diameter.

Sequitur etiam, quod cum longitudo foci actualis reſpectu diſtantiæ infinitæ evaneſcat, etiam diameter imaginis reſpectu diametri objecti infinite diſtantis evaneſcere debeat. Unde mirum non eſt, ſtellarum fixarum diametros evaneſcere in teleſcopiis, in quibus irides non ſint ſenſibiles. Sed videndum, quomodo id etiam ſequatur ex conſtructione geometrica. Formula foci radiorum parallelorum pro lente iſoſcelia (quam cuivis hoc effectu ſpectato ſubſtituere licet) eſt $\frac{r}{2(m-1)}$, pro diſtantia quavis autem finita $\frac{dr}{2d(m-1)-r}$ poſito $n = 1$. Hinc ſi CF ſit focus radiorum parallelorum, & $CP = DM = \frac{dr}{2d(m-1)-r}$, habebitur $FP = \frac{dr}{2d(m-1)-r} - \frac{r}{2(m-1)} = \frac{2dr(m-1) - 2dr(m-1) + r^2}{2(m-1)(2d(m-1)-r)}$, eritque $FP : CP = \frac{r^2}{2(m-1)(2d(m-1)-r)} : \frac{dr}{2d(m-1)-r} = \frac{r}{2(m-1)} : d =$ CF vel Cf: CA. Superius autem invenimus DM vel CP: AC = MP: AB, & cum ex præſente analogia ſit $FP : Cf = CP : AC$, habetur etiam $FP : Cf =$ MP: AB, vel $FP : MP = Cf$: AB. Igitur ſi ducatur fg æqualis & parallela cum AB, erunt triangula Cfg, FMP perpetuo ſimilia, & locus geometricus imaginum PM, pm erit recta Fm, e foco radiorum parallelorum F ad gC parallela. Ex indole hujus loci geometrici intelligitur, puncto M incidente in F, imaginem PM abire in punctum,

id,

id, quod continget, dum diſtantia AC $=\infty$, evaneſcente differentia focorum. Pariter intelligitur, objecto in f collocato, imaginem fieri infinitam, evadente FP $=\infty$, quo caſu, ut objectum totum videretur, requireretur diameter lentis pariter infinita. Quod ſi produceretur MF infra axem, exhiberet imagines ſitu contrario, ſcilicet pro caſu radiorum convergentium &c. Verum cum in præſens Geometria tantummodo Dioptricæ ſervire debeat, examen hujus loci geometrici non proſequimur, ſed ſatis nobis eſt, quod intellexerimus, imagines ejusdem objecti vicinioris efformari majores, quam dum objectum remotius eſt.

105. Etſi vero reapſe conſequatur, ut diameter imaginis fiat infinite parva, abeunte objecto finito ad diſtantiam infinitam ex vero talem, attamen in Dioptrica jam cenſetur diſtantia infinita, ſi radiorum divergentia omnino ſentiri nequeat, etſi objecta ut imaginem finitæ diametri habeant, in ſe haud debeant eſſe infinite magna. Hinc ſolem, lunam, ceteraque ſidera ita videmus ſub angulo finito (etſi neque infinita ſint ea corpora, neque infinite diſtent), quaſi radios ex diſtantia infinita emitterent, quippe qui nil a parallelis differunt. Unde illud adhuc nobis indagandum, *quæ ſit ratio differentiæ imaginum duorum objectorum ſub eodem angulo viſorum, quorum alterum hoc ſenſu infinite diſtet, quod radios emittat parallelos, alterum habeat diſtantiam finitam, ſeu per radios divergentes cernatur?*

Ex medio itaque puncto A, & infimo ſemidiametri B incidant radii inter ſe paralleli in lentem MN, tranſeunte BC (fig. 45 Tab. V) irrefracto, altero parallelo BFE per focum F, & ad D refracto ad parallelismum cum axe, DM, erit per ea, quæ de conſtructione graphica diximus, DM $=$ CP focus radiorum parallelorum, & per ſuperius expoſita hoc ipſo Articulo PM ſemidiameter imaginis objecti infinite diſtantis, quæ per hypotheſin apparet ſub angulo finito ACB $=$ AFB $=$ MCP. Ponamus dein objectum ab in diſtantia finita Ca videri ſub eodem angulo aCb, ducatur ex b per F recta occurrens lenti in E, ſitque Em ad CP parallela, determinabit bCm longitudinem foci Em $=$ Cp objecti ab, & mp ſemidiametrum apparentem. Producatur PM, donec in Q occurrat rectæ Em, erit QM differentia imaginum PM objecti habentis diſtantiam finitam Ca, & ſub eodem angulo viſi. Quia vero triangula QMm, CMP, Cmp, ſimilia ſunt, habetur QM : Qm (ſeu Pp) $=$ mp : Cp $=$ MP : CP.

106. Pro uſibus Aſtronomicis valor micrometri poteſt determinari vel per tempus tranſitus alicujus ſtellæ ab uno ad alterum filum verticale, vel per diametrum ſolis, cujus magnitudo ſatis accurate cognita eſt. Sic (fig. 46 N. 2 Tab. V) ſi teleſcopium dirigatur verſus ſtellam (cujus declinatio cognita ſit) & ita vertatur micrometrum, ut ſtella perpetuo videatur filum BE (quod reſpondebit circulo parallelo ad æquatorem) tangere, & notetur tempus, quo ab interſectione G fili mobilis FH, pervenit ad interſectionem C fili fixi AD, idque Fig. 46, N. 1. Tab. V.

 poſtea

poſtea convertatur in minuta & ſecunda arcus circuli, cum fila AD, FH congruant circulis horariis, ex nota illa proportione, quod intra 1'' temporis medii ſolaris tranſeant per eundem horarium 15'' æquatoris, ideoque numerus minutorum, & ſecundorum inventus ducatur in coſinum declinationis (quod nempe, ut diximus ED non congruat cum æquatore, ſed cum aliquo parallelo), ſi inquam, habeatur intervallum CG in arcu circuli maximi, facile jam erit, cujuscunque alterius filorum intervalli valorem invenire. Quippe ſi ponamus ab appulſu ſtellæ ad G uſque ad ejusdem appulſum ad C interceſſiſſe 4' 2'' temporis medii ſolaris, ſive 242'', hoc ductum in 15 dat 3630'' æquatoris, quæ interea per horarium tranſiverunt. Fingamus porro ſtellæ declinationem eſſe 20° 15', erit complementum 69° 45', & hujus ſinus = 0,9381913; ſed commodius adhibentur logarithmi. Eſt enim

log. *ſin.* 69° 45'' = −1,9722914
Log. 3630'' = 3,5599066
Summa = 3,5321980

Logarithmo invento reſpondet proxime numerus 3405,6, quare totidem ſecundis circuli maximi intervallum CG congruit. Moveatur jam filum FH ope cochleæ, & notentur numeri revolutionum integrarum, & partes etiam v. g. centeſimæ (ſi diſcus, quem index percurrit, ſit in centrum partes æquales diviſus) ſupra integras revolutiones, donec filum FH accurate congruat cum AD; ſit exempli cauſa numerus revolutionum repertus 20,48, evidens eſt in hac hypotheſi 20,43 revolutionibus micrometri reſpondere 3405'',6 circuli maximi, ſeu 56'45'',6, ut adeo uni revolutioni competant 117,''46 proxime, ſeu 1'57'',48.

Eodem modo menſurari poteſt ope micrometri diameter ſolis, ita nempe diſpoſitis duobus filis parallelis, ut alterum limbus ſuperior, alterum limbus inferior aliquo tempore quodammodo radere videatur. Si dein vel ex tranſitu per meridianum, vel ex tabulis Aſtronomicis quæratur ſolis diameter pro tempore obſervationis in minutis, & ſecundis, ſcietur, quot revolutionibus micrometri, & partibus centeſimis angulus apparentis diametri reſpondeat.

107. Si adhibeatur diameter ſolis, jam monui, attendendum eſſe ad longitudinem teleſcopii, cum diſcrimen per diverſa teleſcopia obſervatæ diametri mihi non videatur prorſus negligendum, & habere fundamentum ſatis firmum in iride veris objectorum, præcipue lucentium, imaginibus circumfuſa. Certe ipſe D. *de la Lande*, etſi dubitare videatur, an non hæc obſervatarum diametrorum differentia adſcribenda ſit difficultati, quæ occurrit in inveniendo accurato ſitu filorum, ut utrumque limbum diſci tangant, fatetur tamen, a *D. de Caille* per tubum 6 pedum ſolis diametrum (in diſtantia media) ſemper habitam fuiſſe 31' 34'', cum ipſe per heliometrum 18 pedum eandem non invenerit majorem 31' 31'', aut 31' 30'',5. *D. Short* vero uſus micrometro

crometro objectivo achromatico (per quod adeo iris adhuc minui debuit, aut etiam ad sensum penitus tolli) non majorem statuit, quam 31′ 28″.

Illud præterea notandum, quando diameter solis micrometro filari accipitur, ei adjici oportere crassitudinem fili. Censetur enim utervis limbus sub medio filo latere, ideoque interno inter fila spatio, duplex ea filorum medietas, id est, crassitudo unius, addenda est.

108. Quod si hunc in modum micrometri valorem determinare nolis, neque ejus usus admittat, ut mensurentur anguli objectorum remotissimorum, verum etiam propiorum (id, quod evenire potest in mensurationibus geometricis accuratioribus, quando latera triangulorum non sunt prorsus tanta, ut haberi possint pro infinitis), determinandus erit focus radiorum parallelorum (telescopio directo ad Lunæ v. g. maculas, vel ad satellites Jovis), & (fig. 45 Tab. V) accuratissime metienda distantia CP, nempe micrometri a lente objectiva. Debet in hunc finem micrometrum accurate in foco esse collocatum. Cognoscitur vero hoc, si careat parallaxi, & fila distinctissime videantur. Nam si notetur aliquod punctum imaginis, quod apparet secari a filo verticali oculo in axe posito, & filum sit ante imaginem respectu oculi, si oculus ponatur non in axe telescopii, sed versus dexteram aliquantum partem, apparebit punctum notatum in imagine dexterius filo; si oculum colloces ex sinistra parte, punctum imaginis videbitur sinisterius. At si filum sit ultra imaginem respectu oculi, contrarium accidet; quippe oculo prope dexteram partem sito, objecti, aut imaginis potius punctum moveri videbitur sinistram versus respectu fili, & ex opposito versus dexteram, si oculus ex sinistra parte illud spectet. Quare tum censendum erit filum per ipsam imaginem transire, seu esse in foco debite collocatum, quando oculo in utramque partem aliquantum moto eadem pars imaginis per filum secari videtur, neque ab eo recedere.

Fig. 45. Tab. V.

Ut autem accurata longitudo foci radiorum parallelorum CP habeatur, vel inveniendi sunt radii sphæricitatis lentis objectivæ MN, & calculus ex ea formula ineundus, quam crassitudo lentis ingreditur (5), modo ceterum nullum sit vitium lentis, vel saltem distantiæ reticuli a superficie lentis, quæ illud respicit, addenda tertia pars crassitudinis lentis, quod plerumque in usu satis esse putatur. Habita itaque distantia foci radiorum parallelorum in certa, & accurata scala, accipiatur in eadem quodlibet intervallum fili mobilis micrometri a fixo, v. g. PM, & fiat ut CP ad PM in particulis scalæ, ita sinus totus ad tangentem anguli MCP; habito hoc angulo quæratur numerus revolutionum cochleæ angulo invento respondens, ut prius, eritque valor micrometri pro objectis remotissimis definitus.

109. Si dein oporteat metiri aliquem angulum exiguum objecto ad distantiam minorem collocato, quam ut radii censeri possint paralleli, cognita sit, oportet, ea distantia, saltem proxime (in operationibus geometricis etiam accuratioribus inveniuntur eæ distantiæ ex

 primo

primo triangulorum calculo, neque in lateribus intereſt, an una, alterave hexapeda breviora, aut longiora ſint, modo ne triangula ſint, prorſus exigua), & quæratur longitudo foci v. g. C*p* pro objectis *a* & *b* ſub angulo *a*C*b* viſis. Tum fiat, ut longitudo foci radiorum parallelorum ad focum actualem, ita numerus revolutionum micrometri reſpondens cuicunque angulo (poteſt v. g. is adhiberi, qui uſui erat, quando valor micrometri pro radiis parallelis determinatus eſt) ad terminum quartum, qui exhibebit numerum revolutionum metientium eundem angulum in data diſtantia. Ratio hujus clara eſt; cum enim (105) objectum *ab* in diſtantia C*a* viſum habeat imaginem *pm* majorem, quam PM in ratione C*p*: CP, major numerus revolutionum metitur imaginem *mp*, quam MP, etſi idem ſit angulus. Si frequentius occurreret neceſſitas metiendi angulos in diſtantiis diverſis, ex quibus radii non poſſint paralleli venire, non incongruum foret tabellam valoris micrometri pro diverſis objectorum intervallis conſtruere ex allatis principiis, ut dein is ſemper in promptu haberetur.

110. Pro ſequente methodo intelligenda ſatis eſt oculos in eandem fig. 45. conjicere. Menſuretur, ut prius, ſumma accuratione diſtantia foci radiorum parallelorum teleſcopii CP, eo in lunam, aut Jovis ſatellites directo, & notetur in tubulo mobili, cui micrometrum cum vitro oculari inſertum eſt, quantum is immergi debuerit in ampliorem, qui lentem objectivam continet, inciſa eidem ope cultelli lineola. Tum menſuretur accuratiſſime diſtantia horizontalis quæpiam C*a*, aliquot centenorum pedum (major, vel minor, prout longitudo teleſcopii ſuadebit) & in ea conſtituatur ſitu verticali tabula
Fig. 47. Tab. V. alba (fig. 47 Tab. V) aliquot item pedes longa, in qua ſuperne, & inferne deſcripti ſint duo circuli nigri ambientes duos minores albos, tantæ magnitudinis, ut albi a filo horizontali proxime tegantur (quod explorando obtinetur). Accipiatur item accuratione eadem diſtantia centrorum horum circulorum, quæ tanta ſit, ut ſub angulo triginta aliquot minutorum non majore in diſtantia C*a* videatur. Tum collineetur per teleſcopium in hanc tabulam, quam jam in *ab* poſitam fingimus, ita, ut filum fixum tegat circellum album *a*, mobile circellum *b*, filum vero (quod alias in fig. 46 ſitu horizontali EB exhibuimus) ſecet, vel tegat accurate lineam circellos conjungentem. Quoniam diſtantia C*a* tanta non eſt, ut radii cenſeri poſſint paralleli, extrahendus erit tubulus mobilis cum reticulo & vitro oculari ſpatio quopiam P*p*, quod iterum inciſa nota menſuretur, ut objectum diſtinctiſſime cernatur. Quando itaque fila micrometri dictos circellos accurate tegunt, habetur intervallum micrometri competens angulo *a*C*b*, qui ex ſumptis dimenſionibus calculatur, & numerus revolutionum cochleæ indicabit valorem micrometri ejusdem anguli pro diſtantia foci C*p*. Ut porro valor habeatur pro foco radiorum parallelorum CP, liquet, ineundam eſſe hanc proportionem, ut diſtantia foci C*p* ad numerum revo-

revolutionum requisitarum ad intervallum filorum *pm*, quod metitur angulum inventum *aCb* vel *mCp*, ita est quantitas P*p*, qua extrahi debuit vitrum oculare, in eadem scala acceptum, in qua habetur CP, vel C*p*, ad numerum revolutionum subtrahendum, ut habeatur valor ejusdem anguli pro foco radiorum parallelorum. Respondent enim spatia *pm*, QM numeris revolutionum. Hæc methodus frequentius adhibetur, & difficultas unica videtur in foco radiorum parallelorum rite determinando.

111. Ceterum intelligitur, valorem micrometri esse respectivum ad oculum illius, qui eum determinat. Cum enim oculi inæquales sint, nec quivis per radios parallelos distincte videat, fieri nequit, ut eadem vitrorum objectivi & ocularis distantia omnibus congruat. Imo idem observator alio tempore alium valorem micrometri determinabit. Quare conveniet, ut micrometri examen non modo instituatur quam diligentissime, sed etiam sæpius repetatur.

ARTICULUS IV.

De Micrometro Objectivo.

112. Ad dimetiendas planetarum diametros ope duplicis imaginis, usus est *D. Bouguer* (Mon. Acad. Par. A. 1748) duplice vitro objectivo, quorum alterum mobile erat, in eodem tubo communi lenti oculari aptato. Sed Angli aut ejusdem, aut similis inventi authorem produnt *D. Savery*, qui id jam An. 1743 cum societate Reg. scient. communicavit. Certe Anglicanum Micrometrum non modo idem præstat, quod Bouguerianum Heliometrum (ita enim appellabat), sed multo commodiorem habet usum. Unde de hoc tantummodo scitu necessaria adferemus.

Vitrum objectivum foci prælongi (puta triginta aliquot, aut quadraginta pedum) accurate elaboratum per medium axem scinditur in duos velut semicirculos, seu in duas semilentes; utraque lentis medietas ope dimidii annuli *def* (fig. 48 Tab. VI) *abc*, & cochleolarum firmatur Fig. 48. Tab. VI.
super lamina orichalcina HI, ST, quæ crenis MN, QR insertæ circumacta cochlea A moveri possunt. O, P exhibet partem orichalcini operculi, quo tubus, cui aptatur micrometrum, tegitur, & in quo crenæ MN, QR firmatæ sunt. Partes LK, VX utriusque laminæ dentatæ sunt, itaque vel rotulæ Y, vel alteri cuidam parti fixæ super lamina Z aptatæ, ut dum circumagitur cochlea A, dimidia lens *def* deorsum, altera *abc* sursum moveantur, ita quidem, ut si punctum *i* respon-

respondeat axi tubi, centra semilentium n, & o æqualiter in utramque partem ab eo recedant. Ut autem mensura spatii on habeatur, aptatur Nonnius utrique laminæ GF, ED. Quando Nonnii puncta G & E; F & D congruunt, semilentium centra n & o pariter incidunt in i, & habetur unica lens. Apparet præterea ex ipso schemate, cum laminæ HI, ST multo longiores sint, quam spatium, per quod micrometrum diduci oportet, nullam posse lucem pervenire in tubum, nisi per semilentes. Accuratiorem descriptionem qui volet, D. de la Lande Astron. consulere poterit. Nobis satis est, ea, quæ necessaria sunt, attigisse, cum multa in constructione sint arbitraria.

113. Ut jam rationem, ac theoriam hujus instrumenti tirones pervideant, ponamus ab initio Nonnii extrema F, D; G, E congruere, & semisentes constituere unicam, quam (fig. 49 Tab. V) exhibeat mn, cujusque centrum c congruat cum axe tubi sa. In hoc situ si incidant solis verbi causa radii sg, sc, sh inter se paralleli, & e centro ejusdem emissi, unientur ii omnes in axis puncto a; alii vero pariter inter se se paralleli lg, lc, lh, ex extremo diametri venientes, colligentur in puncto b radii principalis lcb, unde tum habebitur unica semidiametri solis imago ab; & quod de una semidiametro dicitur, id pariter de altera dictum quisque putet. Sed fingamus modo circumacta cochlea semilentis alterius MN centrum ex c venisse in C, & alterius semilentis $\mu\nu$ in κ, ita, ut sit $c\text{C} = c\kappa$, facile intelligetur, punctum quodlibet g pari spatio progressum esse in G; h in H: respectu semilentis MN; uti etiam g in γ, h in ϑ respectu alterius semilentis $\mu\nu$. Unde, si reflectamus animum ad ea, quæ in Optica diximus (nempe quod obtecta parte lentis repræsentetur objectum eodem modo, nisi quod imago sit minus clara), facile perspiciemus, idem in hoc situ semilentium debere contingere, quod fieret duabus lentibus eundem situm habentibus, sed in quibus altera medietas esset penitus obtecta. Quare evidens est, radios SG, SC, SH e centro solis, & parallelos advenientes, debere ejus imaginem in A (nempe in axe SCA) depingere; ab iis vero, qui ab extremo diametri pariter inter se paralleli incidunt, LG, LC, LH, efformatum iri in puncto B imaginem, nempe in radio principali LCB. Neque aliter fieri potest in altera semilente $\mu\nu$; nam per radios $\sigma\gamma$, $\sigma\kappa$, $\sigma\vartheta$ e centro digressos habetur imago α; & per $\lambda\gamma$, $\lambda\kappa$, $\lambda\vartheta$ imago β, ubi præterea observandum, fore omnino imaginem utramque AB, $\alpha\beta$ ejusdem magnitudinis, cujus fuerat ab efformata ab integra lente.

Fig. 49. Tab. V.

114. Ex dictis quoque apparet, punctum imaginis A tantum accurate progressum fuisse ab a, quantum centrum C semilentis MN promotum fuit a c; uti etiam punctum α tantum præcise ab a recessisse, quantum κ, centrum semilentis $\mu\nu$, a c seu axe tubi remotum fuit, ut proinde spatium Aa æquale sit cum Cκ. Jam vero ex constructione instrumenti habetur spatii Cκ mensura per Nonnium; quare etiam di-

stantiæ

ſtantiæ imaginum A, α, vel B, β, cum ſit $AB = \alpha\beta$. Si itaque ſemilentes paullo magis diducantur, ut A congruat cum β, ſpatium in Nonnio notatum dat angulum $BCA = SCL$, ſub quo apparet ſemidiameter; aut ſi AB, $\alpha\beta$ (quod in uſu faciendum) ſint imagines ſolis totius, intregra diameter, quæ ſi metienda ſit, tamdiu diducendum erit micrometrum, donec limbi imaginis utriuſque ſe ſe accurate contingant. Et generatim perſpicitur, hac machina accipi poſſe minutos quosvis angulos, modo de valore micrometri conſtet.

115. Ut itaque hic valor definiatur, remoto a tubo, cui aptatur, micrometro objectivo, dirigatur is in objectum remotiſſimum, v. g. in lunæ maculas, aut Jovem, ut vitra conſtitui accurate in foco parallelorum radiorum poſſint, quemadmodum jam N. 75 diximus. Tum aptetur eidem tubo micrometrum ita, ut congruentibus centris ſemilentium conſtituant unicam lentem, nec objectorum imagines duplicent, & ſtatuatur in diſtantia cnmpetente (quæ tentando definienda eſt) aliquod objectum pluribus minuſculis notis diſtinctum, v. g. liber quispiam minutioris characteris, donec quam diſtinctiſſime legi poſſit. Menſuretur ea diſtantia (aucta craſſitudinis parte tertia ſemilentium) quam diligentiſſime, & aſſumatur quælibet pars diviſionis Nonnii in eadem ſcala, fiatque ut diſtantia inventa ad partem aſſumptam Nonnii, ita eſt ſinus totus ad tangentem anguli, qui reſpondet ei Nonnii parti; & ſiquidem ſemel ſciatur, quot minuta & ſecunda competant certo numero particularum Nonnii, facile reperietur, quot alteri cuivis ejusmodi partium numero tribui debeant, ideoque valor micrometri objectivi erit determinatus pro præſentis obſervatoris oculo.

116. Quamvis autem Micrometrum objectivum aptetur teleſcopio (in quod proinde radii per ſemilentes transmiſſi adveniunt convergentes, utpote directi ad focum ipſius micrometri), non tamen per hoc mutatur ulla ratione valor, ſed focus teleſcopii tantummodo contrahetur, & fiet brevior, ideoque lens ocularis, quando micrometro objectivo utimur, magis admovenda eſt lenti objectivæ pro ratione diſtantiæ puncti convergentiæ, quod ipſum non difficile erit determinare. Cum enim jam conſtet de longitudine foci ſemilentium micrometri, & intervallum inter vitrum objectivum tubi, & micrometrum vel detur, vel accurate metiri liceat, dabitur punctum convergentiæ; & ſi focus lentis objectivæ radiorum parallelorum ſit $= f$, ſemilentium micrometri $= F$, intervallum inter micrometrum & objectivum tubi $= \alpha$, diſtantia puncti convergentiæ erit $d = F - \alpha$, & proinde focus tubi, poſtquam aptatum eſt micrometrum, $x = \frac{(F - \alpha)f}{(F - \alpha + f)}$, qui ſubtractus ex f dat decurtationem foci tubi $= \frac{Ff - Ff - \alpha f + ff}{F - \alpha + f} = \frac{ff}{F - \alpha + f}$ v. g. ſi focus tubi ſit 12 pedum, Micrometri 40, diſtan-

tia α duorum digitorum, focus tubi non magis contrahetur, quam $\frac{144}{302}$ $= 0,47 +$ dig. Patet autem ex hoc ſimul, pro micrometris objectivis adhibenda eſſe vitra prælongi foci, cum alias foci tuborum, quibus aptantur, nimium contraherentur.

Verum, uti dicere cœpimus, ut convincamur, per hoc valorem micrometri minime mutari, tantum opus eſt, ut oculos conjiciamus in (fig. 38 Tab. IV). Nam ſi focus lentis MN, quem poſuimus
Fig. 38. Tab. IV. I*a*, per lentem intermediam KL contrahatur, ut imago objecti fiat non *ab*, ſed $\alpha\beta$, evidens eſt, omnia imaginis puncta inter *ab* media eadem proportione contrahi; & ſicut per eam interpoſitionem non mutatur angulus H*a*I, ſub quo objectum videretur oculo libero in I conſtituto, ſed tantummodo imago ad minus ſpatium redigitur, manente, vel etiam creſcente augmento tubi, ita prorſus imago depingenda alias a ſemilentibus micrometri per lentem objectivam contrahitur in aliam minorem, ad quam eadem requiritur diductio micrometri, quæ neceſſaria eſt ad imaginem, quam ſolæ ſemilentes efformarent. Ex quo clarum eſt, manere valorem micrometri ſine ulla variatione, ſeu tubo aptetur, ſeu non; quin immo micrometri valore ſemel determinato, licebit idem micrometrum diverſis tubis aptare.

ARTICULUS V.

De Microſcopiis Dioptricis.

117. Etſi quodvis vitrum convexum objecti diametrum augeat, microſcopium tamen quando dicimus, tale intelligimus, quod objectis valde minutis clare & diſtincte cernendis aptum ſit. Et quoniam id aſſequimur tum per vitra ſimplicia, tum etiam compoſita, alia erunt microſcopia ſimplicia, alia compoſita. Si lenticula brevis admo-
Fig. 50. Tab. V. dum foci BA (fig. 50 Tab. V) ita collocetur, ut objecti medium punctum *a* ſit in axe & foco radiorum parallelorum, alterum *b* prope axem, evidens eſt ex iis, quæ generatim de lentibus dicta ſunt, radios tum ab *a*, tum a *b* emiſſos egreſſuros e lenticula inter ſe parallelos. Quod ſi igitur oculus prope F, ubi ſe ſe interſecant, conſtituatur, & rite diſpoſitus ſit, videbit objectum *ab* diſtincte, & quidem ſub angulo *bca* ſatis magno. Jam vero cum objecta in tam parva diſtantia videre libro oculo nequeamus, referimus objectum ad eam diſtantiam, in qua alias diſtincte percipimus corpora ſub ſimili angulo, itaque de augmento microſcopii ſolemus judicare. Sit v. g. focus lenticulæ trium linearum, ſemidiameter objecti unius lineæ, erit angulus *bca*, ſub quo videtur diameter, proxime 36° 52′. Objecta, quæ ſub tanto angulo diſtinct appa-

apparent, ſolemus conſtituere ad intervallum plurium digitorum, v. g. (ut exemplo utar) 8; unde ſi fiat: $3:2 = 8:\frac{16}{3} = 5{,}33$, judicabimus diametrum objecti non majorem duobus lineis æqualem 5,33 digitis, conſequenter 63,96^{ies} aut 64 majorem. Sed quoniam pro diverſis oculis eadem diſtantia ad diſtincte videndum apta non eſt, hoc microſcopii ſimplicis augmentum eſt tantummodo reſpectivum.

118. Lenticulæ hujusmodi fiunt admodum exiles, ut foci longitudo vix dimidiam lineam ſuperet, quæ ſolent capſis orichalcinis includi ita paratis, ut eidem manubrio majores, minoresve pro objectorum diverſa conditione aptari poſſint. Porro ipſum manubrium inſtructum eſt brachiolo ſtylum præacutum gerente, cui vel glutine, vel cera objectum imponitur, ut dein ope brachioli in foco lentis conſtitui queat. Adhibetur præterea quandoque ſpeculum cavum in medio foramine circulari pertuſum, cui oculus verſus lumen incidens converſus applicatur, ut nempe lumen a ſpecillo in objectum reflexum reddat illud illuſtrius. Quando liquores conſiderandi ſunt, loco ſtyli acuti inſeritur brachiolo manubrii lamella tenuis orichalcina foramine circulari prædita, quæ in eo facile liquoris conſiderandi guttulam recipit foco admovendam.

Alii ſolent ex exilibus fragmentis vitrorum ſpecularium conflare exiles globulos, quorum diametri vix dimidiam lineam æquant. Verum raro acquiruntur ſphærulæ tam parvæ, quæ vitio careant. Hinc e multis meliores ſeligendæ ſunt. Ceterum ſphærulas ejusmodi plures olim mihi fieri curaveram, quanquam paullo majoris diametri, velut $\frac{3}{4}$ lineæ. Quæ ope vitri auctorii meliores videbantur, ſuper lamina plana orichalcina ex medietate abradi curavi adhibita ſmiride, & deinde accurate ſuper eadem poliri, ut loco ſphærularum acquirerem totidem hemiſphæria. Tum laminæ alteri orichalcinæ, tres vel quatuor digitos longæ, & 4 vel 5 lineas latæ prope extremum ferro rotundo cavitatem imprimi curavi ejusdem fere magnitudinis cum hemiſphærio parvo vitreo, ut illud in ea accurate reciperetur. Quod ſupererat craſſitudinis laminæ, acu ſatis craſſa perforavi in centro, ut diameter aperturæ verſus partem convexam hemiſphærii fere $\frac{1}{2}$ lineam æquaret; ſed partem planam, cui oculum applicabam, altera lamina tenui texi, quæ diametrum aperturæ vix 0,3 lineæ habebat. Complura ejusmodi hemiſphæria præſtantium microſcopiorum ſimplicium munus obibant.

Si aliud microſcopium ad manum non ſit, ſatis eſt, laminam quamvis tenuem perforare, eique foramini guttulam aquæ, quæ ſat longo tempore figuram rotundam retinet, immittere.

119. Sed non omni obſervationum generi commoda ſunt microſcopia ſimplicia. Hinc adhibentur etiam compoſita vel e duobus, vel

e tribus vitris (imo etiam fieri possunt e pluribus). Si duo adhibeantur
Fig. 51. Tab. V. (fig. 51 Tab. V), nempe lens objectiva microscopica AB, objectum *bac* paullum extra focum collocandum est, ut ejus imago efformetur in majore distantia *βαx*, cui congruere debet focus lentis ocularis DE, ut radii ex ea egressi inter se se paralleli, se rursus in F intersecent, nempe in foco radiorum ex A, C, B divergentium. Unde apparet, si requiratur magnum augmentum, fieri microscopium nimis longum. Quare congruentius, circa medium distantiæ imaginis efformandæ per
Fig. 52. Tab. V. lentem objectivam ab ipsa lente hac interponitur (fig. 52 Tab. V) aliud vitrum KL, quod imaginem *αβ* contrahat ad *cd*, & ejus distantiam C*c* reddat breviorem. Lentis ocularis focus rursus cum *c* congruere debet, ut radii parallele egressi se in F intersecent, ubi oculus applicatur. Rationem horum non exponimus, neque methodum calculandi augmentum, cum hæc ex superioribus facile deducantur. Id unum monemus, quod postquam ratio angulorum DF*α*, *a*C*b* inventa est eo modo, quem N. N. 91 & 92 præscripsimus, etiam illud addi debeat augmentum, quod resultat ex ratione distantiæ C*a* ad intervallum, ad quod quisque libero oculo objecta sub angulo *a*C*b* distincte videre consuevit.

Porro artifices machinarum opticarum plerumque pro lente KL talem seligunt, ut focum habeat fere 18 linearum, diametrum unius digiti. Oculari DE congruit focus circiter unius digiti, diameter 9 linearum. Pro diversitate objectorum lenticulæ plures objectivæ parantur, quarum focus sit 1, 2, 3, 4 imo & 6 linearum. Tubus vitra continens ita firmatur super pede suo, ut ope cochleæ attolli (quando objectum nimis vicinum est), & deprimi, quando scilicet objectum remotius est, possit; adhibitis etiam specillis cavis, & lentibus, quibus objectum collustrari debite queat.

Fig. 54. Tab. VI. Ut judicium ferri possit de vera diametro objecti, solent aliqui proxime ad imaginem *cd* collocare micrometrum, quod nil aliud est, quam vitrum planum, in minima quadratula divisum, quorum latera determinatam particulam diametri vitri continent. Debent autem lineæ parallelæ describi adamante, aut silicis durissimi acie, ut libero oculo vix percipi possint, nihilque pelluciditati vitri adimant. Vitrum ejusmodi, non in quadratula, sed in parallelas simplices, & æquidistantes divisum adhiberi etiam potest pro micrometro in telescopio Astronomico, quando metiendæ sunt diametri planetarum, modo ope alterius micrometri accurati valor intervallorum parallelarum determinetur; imo vicem etiam quælibet harum parallelarum obire potest fili fixi, & si semel limbus planetæ eam accurate tengere pergat, poterit filum mobile adduci ad limbum oppositum, itaque diameter accipi.

120. Non modo jucundum spectaculum præbet microscopium solare, verum etiam examinandis corporibus semiopacis, observando motui peristaltico, circulationi humorum, & sanguinis plurium minu-

torum

torum animalium, in membranis, aliisque tenuioribus partibus aptissimum videtur. Plerumque (fig. 53 Tab. V) sumitur tubus PRSQ, qui prope focum x lentis majoris EF verticale brachiolum habet lamella perforata, aut craticula instructum, super qua corpus examinandum expandi possit, ipsum vero brachiolum ope cochleæ externe applicatæ mobile est, ut in debita distantia a lente microscopica *tu* collocari queat. Inseritur tubus aperturæ circulari valvæ fenestræ, cujus partem exhibet XY. Extra valvam collocatur speculum planum ABCD super tabella GH, fulcro KLI innitens, quod ope cochleæ OM ita dirigi possit, ut radii solis *sr*, *sr*, *sr* &c in speculum incidentes semper reflectantur ad lentem EF, atque in ea refracti collustrent objectum ad x positum. Si conclave sit probe obscuratum, & collocetur tabula charta alba, & nitida obducta TV in aliquot pedum distantia a lente objectiva *tu*, exhibebitur super ea imago objecti *yz* ingens, ac suis coloribus depicta, ut etiam globuli sanguinis per mininas venulas euntis distincte cernantur. Quando partes majores examini subjiciendæ sunt, adhiberi potest tubus interruptus, ut quæ campum microscopii excedunt, undique extra tubi ambitum promineant. Fig. 53. Tab. V.

ARTICULUS VI.

De nonnullis aliis Machinis Dioptricis.

121. II. De *camera obscura*. Varii generis cameræ obscuræ in usu sunt. Parvæ aliæ, & portatiles, quæ cistula lignea tubo ductili instructa constant, cui (tubo) unum, alterumve vitrum convexum inseritur, ut objecti imago radiis e speculo ad angulum 45° inclinato reflexis in vitro plano depingatur, cujus altera tantum superficies polita est, altera smiride asperata. Quodvis conclave obscuratum, si foramini circulari valvæ fenestræ lens foci plurium pedum includatur, camera obscura est. Fiunt etiam domunculæ portatiles, aut ex asseribus tenuibus compactæ, aut panno crassiore lucem excludente, papilionis instar. Partes necessariæ sunt (fig. 55 Tab. VI) in majoribus, quæ in edito ædificii loco construi, vel in turricula quapiam fieri possunt, capsa quadrangularis ABCD ad BC aperta, continens speculum planum DE ad angulum 45° inclinatum; fundo DC circulari foramine prædito conseritur tubus verticalis FGLK, ut eo circa axem, qua lubet, verso, itidem capsa ABCD cum speculo circumagatur, atque versus quodvis objectum dirigatur. Tubus FG continet lentem amplam objectivam HI. Tum constituitur tabula lignea TV, seu mensula charta munda, & nitida obducta, quæ ope cochleæ attolli, ac deprimi possit. Evidens est, luce omni alia e camera exclusa Fig. 55. Tab. VI.

clusa, radios *or*, *or* &c ab objecto in speculum DE incidentes, sub æquali angulo reflecti in lentem HI, quæ proinde si planum TV in foco constituatur, efformabit imaginem objecti MN. Et quoniam objecta viciniora longiorem focum habent, quam remotiora, ratio patet, cur tabula lenti vel propius admoveri, vel ab eadem removeri debeat, nisi motum tabulæ velis ope duplicis lentis, quarum altera sit tubo ductili inserta, supplere, quod qui effici possit, ex iis, quæ de lentibus, & tubis opticis diximus, quisque facile intelliget.

122. II. *Laterna Magica.* Notissima hæc, & rudium rerum dioptricarum oblectamento nata machina, procul dubio inventioni Microscopii solaris occasionem dedit. Fit plerumque ipsa Lucerna (fig. 56 Tab. VI) μλπνϑηφ ex lamina alba. Anteriori parti apertili conferruminatur tubus ABDC, cujus aperturæ AB opponitur speculum sphæricum cavum metallicum ST, intra cujus focum constitutæ lampadis LV radii magnam partem reflectuntur in lentem EF, qua aliquantum colliguntur magis, ut objectum *b* fortiter illuminetur, quod cum semidiaphanum sit, emittit radios divergentes in lentem GH, ita collocatam, ut habeat focum negativum v. g. Q; unde ita incidunt in aliam lentem IK, velut e Q, paullum extra ejus focum, sito venirent, & acquirunt novum focum in plurium pedum distantia a KI, ubi proinde imago objecti maxime aucta depingitur. Plerumque objecta exhibenda in muro vel tabula alba, sunt icunculæ variæ super vitris planis circularibus, velut *a*, *b*, *c*, *d* succis coloratis depictæ, quarum plures in eodem laterculo ligneo, & circularibus foraminibus prædito insertæ sunt, ut altera post alteram per crenas quadrangulares MN, quibus tubus instructus est, transmitti possit.

Fig. 56. Tab. VI.

Vitia, quibus tum Laterna Magica, tum microscopium solare laborat, plures jam notarunt, ut quod non nisi objectis aliquantum diaphanis repræsentandis apta sint; quod illa imaginum limbos faciat admodum confusos; quod radii, qui illuminando objecto tantummodo servire deberent, una cum aliis imaginem efformaturis transmittantur usque ad imaginem, illicque irregulariter immisti confusionem pariant; quod in microscopiis solaribus, quando majores imagines fiunt, omnia sint tincta coloribus iridum ex heterogeneitate lucis ortarum. Aliqua per moderatam aperturam lentium, per diaphragma superfluos radios coercens, per debite constitutos focos, quemadmodum magnam partem tolli possint, *Eulerus* ostendit. (Tom. III. Nov. comment. Acad. Petrop. 1751). *Æpinus* etiam de emendando microscopio solari cogitavit (Tom. IX. Nov. Comment. Acad. Petr. 1762 & 1763) ubi illud maxime agit, ut ea exhibendis objectis penitus opacis apta reddat. Quod in hoc negotio maximam difficultatem parit, est exilitas objecti opaci, e quo, utcunque fortissime illuminetur, vix tantum lucis reflecti posse videtur, ut imago tam magna, qualem hæc microscopia exhibent, satis clara fiat.

123.

123. III. *De vitris polyedris.* Vitra polyedra fiunt, si lentes plano-convexæ crassiores ita atterantur laminis planis in superficie convexa, ut ea tota abeat in areolas planas velut quadrangulares, pentagonas, aut triangulares, velut ABC (fig. 57 Tab. VI). Polyedra, si oculus basi planæ AD (fig. 58 Tab. VI) applicetur, multiplicant imagines objectorum. Nam radii ex objecto *ab* in superficiem areolæ AB incidentes, post duplicem refractionem, velut in duobus prismatis planis factam veniunt ad oculum directione *md*, *me*; unde referetur objectum *ab* ad locum *de*. Dein qui incidunt in areolam CD, post totidem refractiones directione *fn*, *gn* oculum subeunt, quapropter etiam idem objectum repræsentant in *fg*. Idem fiet in omnibus areolis, quarum plana ad basin polyedri inclinata sunt. At si una ex iis sit basi parallela, ea unica indicabit objectum in loco vero, quod cognoscetur, si polyedro circa axem suum converso aliqua ex imaginibus perstet immota, ea enim erit verum objectum, reliquæ omnes imagines una cum polyedro movebuntur. Fig. 57. Tab. VI. & 58.

Quia anguli, seu acies binarum quarumlibet areolarum, sunt in superficie sphærica, polyedrum habet quandam speciem foci. Fig. 59 Tab. VI exhibet areolarum intersectiones vel arcubus circuli AC, DE, EB &c subtensas chordas, quæ quo minores sunt, eo minus recedunt a superficie sphærica, aut ab arcubus circuli. Quemadmodum igitur segmentum sphæricum BACDF habet focum proprie sumptum v. g. in O, sic etiam prope eundem se se intersecare debent radii ex *a*, *b*, *c*, *d* &c in areolas DE, FB, AC, CD &c incidentes. Fig. 59. Tab. VI.

124. Ex hoc evidens fit, quod si oculus prope *o* constituatur, videre debeat omnia spatia in aliis locis, nempe *c* supremum, dein *d*, tum *a*, & denique *b*. Et quia ex intermediis spatiis nihil radiorum ad oculum refringitur, ea constituere videbuntur aliquod spatium continuum. Quare si alicujus figuræ partes in illis spatiis depingantur, v. g. in *c* frons, in *d* oculi, vel nasus; os in *a*, & in *b* mentum, idemque fiat in areolis, quæ respondent aliis sectionibus polyedri, hæ partes vultus humani ita in tabula separatæ, per polyedrum contiguæ, ac debito ordine dispositæ apparebunt. Tabula, in qua pictura fit, magis adhuc deformabitur, si in spatiis intermediis, quæ per polyedrum non videntur, depingantur varia alia objecta, quæ cum illo nullam habent connexionem, quod repræsentandum est.

Etsi vero hæc spatia ex datis polyedri dimensionibus, inclinatione areolarum, & distantia tabulæ determinari calculo possint, haud tamen operæ pretium videtur eum laborem subire. In usu satis est, si polyedrum NO includatur tubo MO (fig. 60 Tab. VI.), in ejus anteriore parte MD relicto exiguo foramine circulari I. Debet vero distantia polyedri ab I fere æquare focum. Pone foramen statuatur lampas vel candela ardens L in conclavi obscurato. Tum etiam ad intervallum, quod aptum fuerit, tabula TV charta obducta: apparebunt Fig. 60. Tab. VI.

in

in ea areolæ lucidæ similes areolis polyedri, sed ordine contrario, ut nempe v. g. *g* respondeat infimæ, *h* supremæ, *c* dextimæ, *d* sinistimæ &c. Quod si dubium oriatur, quænam vitri areola respondeat alicui lucidæ in charta v. g. *i*, tantum opus est, ut stylus quispiam, aut exiguum chartæ frustillum admoveatur successive areolis polyedri diversis. Ubi quæsitam tetigeris, areola in tabula ei respondens umbrosa fiet. Notatis itaque cerussa limbis areolarum illustratarum in tabula, atque ordine etiam, quota quæque in figura esse debeat, numeris adjectis extra areolas, eæ partibus imaginis repræsentandæ repleantur; quidquid extra areolarum ambitum fuerit, cum videri nequeat oculo ad I admoto, quibus libuerit, figuris depingendis] destinetur.

Notandum autem præprimis, postquam hunc in modum determinatus fuerit situs, & magnitudo areolarum, debere deinceps semper & eandem accurate esse distantiam foraminis I a polyedro, & polyedri a tabula, & situm etiam polyedri; si quid mutetur, nulla figura regularis apparere potest. Hinc convenit jam prius paratum habere fulcrum, in quo tubus cum polyedro firmetur in eadem a tabula distantia semper deinceps retinendus.

125. IV. *De vitris conicis.* Fiunt etiam coni recti e vitro solido, qui non modo radiis solaribus expositi efformant irides circulares coloribus prismaticis pulcherrime distinctos, sed etiam non injucundo spectaculo adhiberi possunt ad imagines debite repræsentandas, quæ longe aliter depictæ sunt. Intelligatur talis conus vitreus ABCD (fig. 61 Tab. VI) tubo MNPQ inclusus ejus axe cum axe tubi congruente. Si radius ex puncto quopiam G lateris tubi incidat in basin coni ad D, refringetur ad DH, tum egressus in aerem nova refractione intersecabit alicubi axem in K. Eodem modo vicinus radius FE refringetur ad EI, & IK; quare oculo in K posito objectum videtur, ac si in basi coni esset ita, ut sit G supra F. Et quoniam omnia puncta circulorum concentricorum, in quibus sunt D, E, habent eundem situm respectu punctorum similium in fascia cylindrica tubi FRSG positorum, evidens est, quidquid in ea fascia depictum fuerit, apparitururn in annulo basis correspondente. Ut autem imagines hæ annulares debitum situm habeant, ita depingendæ sunt in fascia, ut partes centro viciniores repræsentandæ sint basi propiores, v. g. F apparet centro baseos vicinius, quam G. Præterea situs inversus est, utpote cum ea, quæ in fascia cylindrica infimum locum occupant, fiant suprema; quæ a dextris sunt posita, exhibentur ex parte sinistra.

Fig. 61. Tab. VI.

Verum si velis exhibere figuram, quæ appareat situ horizontali, v. g. inscribere versum, vel sententiam, quæ ordinate legi possit, tum vero literæ inversæ inscribendæ erunt lineis curvis; quæ ad ellipses fere accedunt. In usu satis est, si in charta (fig. 62 Tab VI) TVXY describantur arcus semicirculis paullo minores concentrici, & iis eo situ & ordine inscribatur figura, vel versus, quem exhibent literæ

Fig. 62. Tab. VI.

teræ alphabeti ABCD &c hujus figuræ. Chartam hunc in modum paratam si ita agglutines cavitati inferiori tubi, ut ABCD sint aperturæ, reliquæ basi cylindri propiores, poteris in superiore baseos coni segmento literas situ debito, & linea recta dispositas legere. Pro inferiore baseos segmento, idem quidem situs inversus est, attamen quæ centro propiora apparere debent, sint basi viciniora, necesse est.

Possunt etiam figuræ inscribi in parte altera tubi prope coni verticem, ut radii *fe*, *gd* in latere coni CB refringantur, deinad *i* & O in latere opposito reflectantur versus basin, ex qua denuo refracti ad *n* exeant versus *h*. Sed operæ pretium non est, hæc accuratius disquirere. Innumeræ aliæ machinæ partim excogitatæ jam sunt, quemadmodum apud varios rerum opticarum scriptores videre est, partim adhuc excogitari possunt, quæ spectantium oculis illudant. Voluimus pauca hæc speciminis loco adferre; plura persequi non vacat, cum alia magis utilia, & necessaria etiam, nobis tractanda restent.

CAPUT IV.

ARTICULUS UNICUS.

Resolvuntur non nulla Problemata.

Problema I.

126. Dato puncto lucido L (fig. 63 Tab. VII) & curva AIB, nec non ratione constante sinus anguli incidentiæ ad sinum refractionis, determinare quodvis punctum causticæ F per refractionem. Fig. 63. Tab. VII.

Resolutio. Caustica per refractionem nil aliud est, quam continua series focorum duorum quorumlibet radiorum infinite propinquorum, qui adeo curvam EF perpetuo tangunt. Determinatur igitur punctum causticæ F, si inveniatur focus radiorum LI, L*i* infinite propinquorum, qui in curva AIB refringuntur, & in F rursus se se intersecant.

Quoniam datur Curva refringens AIB, ponitur quoque datus radius curvaturæ IC in puncto incidentiæ I. Demittantur ex C in radios incidentes (productos scilicet) perpendicula CM, C*p*; uti etiam in refractos CN, C*n*. Sit ratio sinus incidentiæ ad sinum refractionis $m : n$; erit $CM : CN = m : n$, & $Cp : Cn = m : n$; & hinc etiam $CM - Cp : CN - Cn = m : n$. Quia ponuntur radii infinite propinqui, est $Cp = CQ$, & $Cn = Cq$, consequenter $CM - Cp = MQ$, & $CN - Cn = Nq$, adeoque $MQ : Nq = m : n$. Centro L describatur arcus infi-

infinite parvus IR, uti etiam centro F arcus IO. Ob rectos iIC, FOI, ablato communi angulo OIC, manet iIO = CIN, & quia iOI, INC pariter recti sunt, triangula iIO, INC similia sunt. Eodem modo anguli iIC, RIM recti sunt, & ablato utrinque RIC relinquuntur æquales iIR, CIM, ideoque etiam triangula iIR, CIM ad R & M rectangula similia sunt; habetur adeo IR : IO = IM : IN. Tandem patet, similia quoque esse triangula LMQ, LIR; nec non FIO, FNq.

Dicatur jam LI $= y$, IM $= a$, IN $= b$, IR $= dx$; erit LI (y) : IR (dx) = LM $(y + a)$: MQ $= \frac{(y+a)\,dx}{y}$. Dein $m : n$ = MQ $\left(\frac{(y+a)\,dx}{y}\right)$: Nq $= \frac{n(y+a)\,dx}{my}$. IM (a) : IN (b) = IR (dx) : IO $= \frac{bdx}{a}$; tandem IO : Nq = IF : NF, & IO − Nq : IO = IF − NF seu IN : NF. Substitutis valoribus adhuc inventis $\frac{bdx}{a} - \frac{n(y+a)\,dx}{my} : \frac{bdx}{a} = b :$ IF $= \frac{b^2my}{bmy - any - a^2n}$.

127. Evidens est, quando $\frac{bdx}{a} - \frac{n(a+y)\,dx}{my}$ est quantitas negativa, fore IF pariter negativam, adeoque focus tum erit virtualis. Sed quoniam pro constructione quantitates differentiales IO, Nq adhiberi nequeunt; intelligatur super IC tanquam diametro descriptus circulus, & agatur ex L per C indefinita LCP. Cum IR sit ad LI perpendicularis, producta occurret circulo in V, ut sit VIM rectus, ideoque IV ad MC parallela. Conjungatur M cum N; evidens est, si ducatur NV, fore pariter MNV rectum, utpote angulum in altero semicirculo æqualem cum VIM. Secabit NV rectam MC in r, per r ducatur ex I recta IrP, quæ occurrat LCP in P. Si ex P fiat PF ad VN parallela, hæc secabit radium refractum IN in foco F. Nam quia IV, MC parallelæ, uti etiam NV, PF est IN : FI Ir : IP = TC : TP. Dicatur LC $= x$, erit LM $(y + a)$: IM (a) = LC (x) : TC $= \frac{ay}{y+a}$. Præterea si radius curvaturæ IC dicatur $= r$, est MC = $(\sqrt{r^2 - a^2})$, & LM $(y + a)$: MC $(\sqrt{r^2 - a^2})$ = LI (y) : IT $= \frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a}$. Porro cum MNV, INC sint recti, ablato communi angulo INV manet INM = VNC. Anguli etiam rCN, MIN eidem arcui insistentes æquantur; igitur triangula MIN, rNC similia sunt, & IN (b) : IM (a) = NC : rC $= \frac{a \times \text{NC}}{b}$. Sed quia $m : n$ = MC $(\sqrt{r^2 - a^2})$:

NC

NC, fit $NC = \frac{n\sqrt{r^2 - a^2}}{m}$, & $rC = \frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm}$. Tandem eſt IT $\left(\frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a}\right)$: rC $\left(\frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm}\right)$ = TP : CP, vel IT - rC : IT = TP — CP (= TC) : TP, id eſt $\left(\frac{bmy - an(y + a)}{(x + a)bm}\right)\sqrt{r^2 - a^2}$: $\frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a} = \frac{ax}{y + a} : \frac{axy \times bm}{(a + y)(bmy - an(y + a))}$ = TP = $\frac{abmxy}{(a + y)(bmy - any - a^2n)}$).

128. Clarum eſt, quando fit rC = TI, ſeu $\frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm} = \frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a}$, vel $any + a^2n = bmy$, fore IP ad LP parallelam, hoc eſt, radios habere focum infinitum. At ſi fuerit $\frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm} < \frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a}$, focus ſemper eſt poſitivus, & finitus. Si (fig. 64. Tab. VII.) fit $rC >$ IT, vel $\frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm} > \frac{y\sqrt{r^2 - a^2}}{y + a}$, aut $any + a^2n > bmy$, focus negativus eſt, & punctum P cadit ad eandem partem cum L. Fig. 64. Tab. VII.

Eodem modo quando eſt $n > m$, ſeu radii refringuntur a perpendiculo (Fig. 65 Tab. VII), ut nempe ſit IM radius incidens, IN refractus, ſerveturque conſtructio prior, NV ad NM perpendicularis occurret CM productæ extra circulum in r, & hinc erit ſemper $rC >$ NC. Triangula INM, NrC manent etiam in hoc caſu ſimilia: nam quia INC, VNM recti, eſt INV = MNC, ideoque additis æqualibus hiſce ad rectos VNM, rNM fit INM = rNC, anguli vero NIM, NCM inſiſtunt eidem arcui. Liquet igitur, etiam in hoc caſu punctum P cadere verſus L, & haberi focum negativum. Fig. 65. Tab. VII.

129. Quando curva (fig. 66 Tab. VII) AIB obvertit puncto lucido L cavitatem, ut determinetur focus F, transferatur radius curvaturæ Ic in partem oppoſitam IC, & fiat eadem conſtructio, in qua eædem analogiæ locum habebunt, eritque focus infinitus, quando rC = IT, poſitivus, dum $rC <$ IT, & negativus, ſi $rC >$ IT, uti etiam ſi foret $n > m$, ſeu CN > CM. Fig. 66. Tab. VII.

Si punctum L ponatur ad distantiam infinitam, sive si radii incidant paralleli, recta ex L per C ducta fit parallela cum LM. Et quia in omnibus figuris est IV æqualis, & parallela cum MC, eadem LC transit per V, & punctum T incidit in V, adeoque fit $VC = IM = a$

Fig. 67. Tab. VII. (fig. 67 Tab. VII), & $IV = MC = \sqrt{r^2 - a^2}$. Analogia itaque prior abit in $IV - rC \left(\sqrt{r^2 - a^2} - \frac{an\sqrt{r^2 - a^2}}{bm} = \frac{(bm - an)\sqrt{r^2 - a^2}}{bm}\right)$:

$IV (\sqrt{r^2 - a^2}) = VP - CP (a): VP = \frac{abm}{bm - an}$. Focus igitur semper est positivus, præterquam dum $n > m$, quia tunc fit $rC >$ MC vel IV.

Fig. 63. Tab. VII. Si radius LI incurrat perpendiculariter in curvam AIB (fig. 63 Tab. VII), IM, IN congruunt, & utraque fit æqualis cum $IC = r$. Quare formula $IF = \frac{b^2my}{bmy - any - a^2n}$ mutatur in $\frac{r^2my}{ry(m - n) - r^2n} = \frac{rmy}{y(m-n) - rn}$, quæ est eadem cum formula N. 4 $z = \frac{dmr}{d(m - n) - nr}$, nisi quod isthic sit y loco d. Itaque refringitur ita lux, velut incideret in superficiem circularem radii $= r$. Et quando $y = \infty$, pro radiis parallelis, est $IF = \frac{rm}{m - n}$. Ceterum liquet, focum $\frac{rmy}{y(m - n) - rn}$ posse esse positivum, negativum, & infinitum, prout diximus Articulo I. Cap. I.

Denique si radius incidens tangat curvam, fit IM & $IN = \frac{1}{\infty}$, NV congruit cum IC, evanescente pariter VC vel TC, P incidit in V, & F in I vel M. Quare tunc caustica terminabitur in ipso puncto contactus.

Fig. 68. Tab. VII. 130. Exemplum I. Incidant radii paralleli in quadrantem circuli AIB (fig. 68 Tab. VII). Quoniam radius curvaturæ in puncto incidentiæ I est ipse radius quadrantis CI, describatur super eo semicirculus IMNC. Ex data ratione $m: n$, fiat $m: n = MC: NC$, & ducatur NV, secans MC in r. Ex I per r agatur IrP, quæ AC productæ occurret in P, tum fiat Pμ ad VN parallela, quæ secet radium refractum IN in μ, eritque μ in Caustica.

Radii in A incidentes habent focum $\frac{rm}{m-n}$. Unde si ratio $m: n$ v. g. in vitro numeris rotundis sumatur 3 : 2, erit $AF = \frac{mr}{m - n} = \frac{3\,AC}{3 - 2} = 3AC$, atque adeo tangetur in F ab axe AC producto. Et quia

aliquis

aliquis radius ad AC parallelus tanget quadrantem in B, erit illic focus $= \frac{1}{\infty}$, consequenter causticæ ramus FμB desinet in B. Liquet autem, per quadrantem alterum infra axem AF efformari alterum ramum causticæ æqualem, & similem priori.

Caustica per refractionem semper est curva Algebraica, si curva refringens AIB talis fuerit, & potest semper inveniri æquatio per coordinatas orthogonales. V. g. in præsente exemplo si radius AC ponatur $= r$, VC $= z$, erit IV $=$ MC $= \sqrt{r^2 - z^2}$. Non faciemus isthic ipsum calculum, sed tantummodo viam ostendemus. Ex quadrilineo VINC, cujus omnia latera exprimi possunt per r, z, m, n, invenitur VN, cum sit IN $\times$ VC $+$ IV $\times$ CN $=$ IC $\times$ VN. Dein similia sunt triangula rectangula ICN, VrC, consequenter reperitur Vr, quæ subtracta ex VN relinquit rN. Et cum sit rN : Pμ $=$ Ir : IP $=$ VC : VP, invenitur quoque Pμ. Tandem ex similitudine triangulorum VNQ, P$\mu\pi$ habebitur Pπ, & $\mu\pi$. In omnibus autem istis valoribus patet, nullam fore variabilem præter z, cujus proinde valor per C$\pi = x$, & $\pi\mu = y$ haberi potest, ut obtineatur æquatio ad hasce coordinatas.

131. Exemplum secundum. Incidant radii ex puncto L divergentes (fig. 69 Tab. VII) in superficiem planam AIB. Quia radius curvaturæ $= \infty$, etiam fiet IM $= a$, IN $= b = \infty$. Unde formula Fig. 69. Tab. VII.
$\frac{b^2my}{bmy - any - a^2n}$ mutatur in $\frac{\infty^2 my}{-\infty^2 n} = \frac{-my}{n}$. Si rursus ponamus $m = 3$, $n = 2$, fit pro radiis perpendicularibus in A incidentibus AS $= \frac{-3\text{AL}}{2}$, & caustica tangit axem in S. Ut reliqua puncta determinentur, cum maneat ratio $m : n$ constans, super IC diametro ad arbitrium assumpta descripto circulo IMCV, erit IM situs radii incidentis LIM, & IN refracti. Facta IV æquali & parallela cum MC, determinabitur punctum r. Sed quia centrum C infinite distat, loco rectæ per L & C transeuntis, ducenda est ad AIB perpendicularis, seu parallela ad IC, nempe PLA, cui in P occurret recta ex r per I ducta. Producto radio refracto NI versus P, fiat Pμ ad NV parallela, erit μ in caustica.

Ex hac constructione patet *primo*, ramum causticæ, in quo sint foci negativi radiorum ex L in partem superficiei AB incidentium, esse infra axem SLP, & alterum pro radiis incurrentibus in partem rectæ AD, supra eundem, æqualem, & similem priori. *Secundo*, cum recta AB, AD in utramque partem in infinitum excurrat, ejus tangens non alia censeri potest, quam recta ex L ad AD parallela; & dum angulus ILA fit rectus, evanescunt IM, IN; punctum V incidit in C,

rectæque CM, CN congruunt cum IC, puncto r itidem in I incidente. Quare tunc rI congruit cum CI, seu fit ad AL parallela, hoc est, punctum P recedit ab A ad distantiam infinitam, & caustica habet duos ramos infinitos.

Fig. 68. Tab. VII. 132. Ceterum observa, si radii paralleli incidant perpendiculariter in BC, (fig. 68 Tab. VII) & exeant per BIA refracti a perpendiculo (cum in BC nullam patiantur refractionem), construi hac ratione poterit caustica pro radiis parallelis incidentibus in superficiem planam vitri plano-convexi, quæ jacebit ex parte axis CA versus A producti. Punctum F, in quo axem tangit, distabit ab A quantitate $\frac{nr}{n-m}$ (quia in hac hypothesi est $n > m$) $= 3$AC. At quoniam hæc disquisitio exercendæ Geometriæ aptior, quam utilior Dioptricæ, (in qua satis est, ut videbimus, si proxime sciatur, cum qua curva pars causticæ exigua inde ab F versus vitrum congruat), postquam viam indicavimus, nil ultra prosequimur.

Problema II.

Fig. 70. Tab. VII. 133. Ex dato puncto lucido L (fig. 70 Tab. VII) debet radius refractus in superficie plana AB venire ad punctum datum N (positis L & N in plano ad AB perpendiculari); quæritur punctum incidentiæ I.

Resolutio. Sit LA $= b$, AQ $=$ BN $= c$, NQ $= a$, AI $= x$. Ponatur problema solutum, esseque I punctum quæsitum, & describatur radio NI centro I arcus; occurret LI ita arcui in M, si ratio sinus refractionis ad sinum incidentiæ sit $n : m$, ut sit $n : m =$ NP : MR hoc est $n : m = a - x$: MR $= \frac{ma - mx}{n}$. Præterea est IN $=$ IM $= \sqrt{IP^2 + NP^2} = \sqrt{c^2 + (a-x)^2}$, & ob triangula IMR, LIA similia habetur RM $\left(\frac{ma - mx}{n}\right)$: IM $(\sqrt{c^2 + (a-x)^2})$ $=$ IA (x) : IL $(\sqrt{b^2 + x^2})$, & $\frac{m}{n}(a - x)\sqrt{b^2 + x^2} = x\sqrt{c^2 + (a-x)^2}$, vel $a^2b^2m^2 - 2ab^2m^2x + b^2m^2x^2 + a^2m^2x^2 - 2am^2x^3 + x^4 = c^2n^2x^2 + a^2n^2x^2 - 2an^2x^3 + n^2x^4$, omnibus per $m^2 - n^2$ divisis, & transpositione obtinetur $x^4 - 2ax^3 + \left(\frac{m^2(a^2 + b^2) - n^2(a^2 + c^2)}{m^2 - n^2}\right)x^2 - \frac{2ab^2m^2x}{m^2 - n^2} + \frac{a^2b^2m^2}{m^2 - n^2} = 0$.

Fig. 69. Tab. VII. Hæc æquatio construi poterit; aut si lubet, construatur (fig. 69 Tab. VII) causticæ ramus Sμ, cui si applicetur regula, quæ eum tangat,

gat, & tamdiu moveatur, donec tranſeat per datum punctum N, determinabitur punctum I.

Problema III.

134. Sit arcus ellipſeos ASB (fig, 71 Tab. VIII.), in qua ſit axis major Ss ad diſtantiam focorum fF in ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum refractionis, quando lux venit ex aere in vitrum, ſeu ut m ad n. Deſcribatur radio quovis e centro F arcus circuli AOB, & concipiatur lunula BAS rotari circa axem Ss, ac vitrum figura ſolidi hac rotatione geniti parari. Quæritur, quorſum refringantur radii axi paralleli in ſuperficiem convexam incidentes? Fig. 71. Tab. VIII.

Reſolutio. Sit radius incidens ad Ss parallelus LM, NMQ ad M normalis ſuperficiei elliptoidicæ, TM tangens. Conjungatur f cum M, fiatque fR ad NM parallela, quæ ita occurret FM productæ in R, ut ſit $MR = fM$, ut conſtat e ſectionibus conicis. Erit $LMQ = fNM$ angulus incidentiæ, & in triangulo NMF eſt $MF : NF = \mathit{ſin.}\ MNF$ vel $\mathit{ſin.}\ MNf : \mathit{ſin.}\ NMF$; eſt vero ob parallelas MN, Rf, etiam $MF : NF = RF : fF$; quare eſt RF, ſeu axis Ss, ad fF, ut ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis, ſeu ut m ad n, conſequenter angulus refractionis debet eſſe NMF, & radii refringentur ad focum ellipſeos F.

135. Conſimili ratione, ſi (fig. 72 Tab. VIII) vitrum ASB ſit ſegmentum hyperboloidis terminatum ſuperficie plana AB ad axem Ss normali, & radii ad eundem axem paralleli incidant in ſuperficiem planam, refringentur ad F, focum hyperboloidis oppoſiti, ſi in hyperbola genitrice ſit $fF : Ss = m : n$. Nam ſi intelligatur normalis MN producta occurrere Sf pariter productæ in N, fiet angulus $MNF = LMN =$ angulo incidentiæ, & $FN : FM = fF : FR = \mathit{ſin.}\ FMN$ vel $\mathit{ſin.}\ FMQ : \mathit{ſin.}\ RfF$. Eſt autem $RfF = LMN$, ob Ff ad ML, & Rf ad MN parallelas, nec non $FR = Ss$; quare eſt ſinus refractionis FMQ in exitu e vitro in aerem, ad ſinum incidentiæ LMN, ut $Ff : Ss = m : n$. Fig. 72. Tab. VIII.

In utroque caſu per ſe patet, haberi unicam refractionem, cum in fig. 71 ſit MO ad AOB, & in fig. 72 LO ad AOB perpendicularis.

136. Si vitris tam accurate poſſet induci figura elliptoidica, aut hyperbolica, quam ſphærica, hæ lentium ſpecies viderentur aliquid commodi præ ſphæricis, ſaltem quando radii paralleli incidunt, habere, utpote cum evitaretur aberratio oriunda ex figura ſphærica. Verum præter difficultatem indicatam, quæ vix ſuperari poteſt, manet adhuc aberratio ex heterogeneitate lucis, quæ multo major eſt. Deinde collectio radiorum ad unicum punctum in hiſce figuris vera tantum eſt, quando objectum eſt in ipſo axe producto poſitum. Imagines punctorum extra eum ſitorum multo magis deformarentur, quam

in

in vitris ſphæricis. Unde nihil ex his ſubſidii Dioptricæ eſt ſperandum.

Problema IV.

137. Si medium quoddam commune, v. g. aer, circumdet plura alia ſuperficiebus planis & parallelis terminata, & radius lucis ex aere ſub dato angulo incidens ſucceſſive tranſeat per omnia media, e quibus rurſus in aerem emergat, invenire viam, & directionem radii egredientis.

Fig. 73. Tab. VIII. Reſolutio. Sit in ſpatio BA*ab* (fig. 73 Tab. VIII) aer, tum in ſpatiis *c*B*bd*, *ecdf*, *gefh* &c quæcunque alia media diverſam habentia vim refringendi; ac tandem ſpatium *ighk* iterum contineat aerem æque denſum, ac ille eſt, qui continetur in BA*ab*. Sumamus, ut ſchema ſit ſimplicius, omnia hæc diverſorum mediorum ſtrata æque alta, ut ſit AB = B*c* = *ce* &c. Sitque ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ex aere in medio B*d*, M: N; ex medio B*d* in *cf*, *m*: *n*; ex *cf* in *eh* $\mu : \nu$, ex *eh* in *gk* denique ν: M. Si fuerit CD ad ſuperficiem B*b* perpendicularis, ACO radius incidens, & CE refractus, & ad eos DO, DP normales, eademque in ſingulis fiat constructio, habebitur

$$\begin{aligned} DO : DP &= M : N \\ FQ \text{ vel } DP : FR &= m : n \\ HS \text{ vel } FR : HT &= \mu : \nu \\ KV \text{ vel } HT : KX &= \nu : M \end{aligned}$$

& fiet compoſitis rationibus $DO : KX = Mm\mu\nu : Nn\nu M = m\mu : Nn$. At cum triangula CDP, EFQ; item FER, HGS æqualia & ſimilia ſint, eſt $N = m$, & $n = \mu$; ergo etiam DO = KX, angulique DCO, KIX æquantur, & IX eſt parallela ad AO.

Si ſtrata non forent æque alta, nil aliud ſequeretur incommodi, quam quod ſumptis in omnibus majoribus altitudinibus, aliis minimæ æqualibus, conſtruenda forent æqualia triangula. Uti ſi unius altitudo foret A*c*, aſſumi deberet loco A*c* alia CD, & loco majorum conſtruenda forent duo minora triangula CDO, CDP.

138. Evidens eſt, totam refractionem contineri angulo VIX, cum IX ſit parallela ad radium incidentem. Foret autem eadem refractio, ſi radius ex aere immediate incideret in medium *efhg*. Poſita hac veritate, liquet, quomodo poſſit inveniri ratio ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis in tranſitu ex uno in alterum medium, ſi detur hæc ratio reſpectu tertii medii utrique alteri contigui. Verbi gratia ſi ſciatur, rationem dictorum ſinuum in tranſitu ex aere in aquam eſſe *m* : *n*, in tranſitu ex vitro in aerem eſſe $\nu : \mu$, invenitur ratio, quæ eſt in tranſitu ex aqua in vitrum. Sit B*d* aqua, *cf* vitrum, A*b*, *eh* aer. Erit per dicta

$$\begin{aligned} DO : DP &= m : n \\ FQ : FR &= x : y \\ HS : DO &= \nu : \mu \end{aligned}$$

com.

compoſitis rationibus, ob DP = FQ, & FR = HS, DO: DO = $mx\nu : ny\mu$, hoc eſt $mx\nu = ny\mu$. Sit $m : n = 4 : 3$; $\nu : \mu = 11 : 17$, habebitur $4 \times 11 \times x = 3 \times 17 \times y$, ſeu $51 : 44 = x : y$, eſt igitur in tranſitu ex aqua in vitrum ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ut 51 : 44.

Si ponantur media A*b*, B*d*, *cf* &c ſemper creſcere denſitate, & ſinum incidentiæ ex uno medio eſſe ad ſinum refractionis in altero in ratione reciproca denſitatum, ſitque denſitas in AB*ba* ad denſitatem in B*bdc* ut *d* ad. D; item denſitas in B*d* ad denſitatem in *cdfe*, ut D ad δ, ac denique denſitas in *cf* ad denſitatem in *eh*, ut δ ad Δ erit DO : DP = D : d;
F Q vel DP : FR = δ : D
HS vel FR : HT = Δ : δ,
& compoſitis rationibus DO : HT = Δ : d, hoc eſt, ſinus incidentiæ eſt ad ſinum refractionis in medio ultimo, ut reciproce denſitas medii ultimi ad denſitatem medii primi, ex qua lux incidit. Jam vero hanc hypotheſin perpendenti facile patebit, imprimis non poſſe radium incidere ex vacuo in medium cujuſcunque denſitatis finitæ; utpote cum vi hypotheſeos prima mox refractio deberet fieri ad perpendiculum, cum poſita $d = \frac{1}{\infty}$, & D = quantitati finitæ, foret DP reſpectu DO infinite parva. Si vero mediorum denſitates tranſirent ab $\frac{1}{\infty}$ ad denſitatem finitam, per ſe intelligitur, aut requiri ſpatium infinitum, aut debere concipi ſtrata infinita numero, & infinite parvæ altitudinis, quo caſu via radii abiret in curvam continuam. Præterea ſemper ſequeretur, radium debere ad ultimum ſtratum *gh* venire perpendicularem, ſiquidem ejus ſtrati denſitas foret finita, ob $d = \frac{1}{\infty}$, & proinde etiam HT reſpectu DO evaneſcens. Verum de refractione in medio, cujus denſitas certa lege mutatur, agemus ſequente Problemate.

Problema V.

139. Si radius lucis VB (fig. 74 Tab. VIII) incidat oblique in medium conſtans e ſtratis parallelis infinite tenuibus ABMP, PM*mp* &c, quorum denſitas certa lege mutatur, invenire curvam refractionis BMR. Fig. 74. Tab. VIII.

Reſolutio. Exponant ordinatæ HA, LP, SN curvæ HLS denſitates in ſingulis ſtratis, ſitque BMR curva quæſita, quam in BM tanget VB. Sumatur in BV recta BF = HA, ſeu denſitati ſtrati primi = a, & demiſſa ad AB perpendiculari FC, ſit BC = b, cum detur angulus obliquitatis VBA. Ductis TBQ, KM*q* ad FC parallelis, acceptiſque BM, M*m* conſtantibus, ſit LP = z, PM = y, adeo-

que $qm = dy$, $BM = Mm = ds$, habebitur FB (a): CB (b) = BM (ds): QM $= \frac{bds}{a}$. Quod ſi jam ponatur ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ in ratione reciproca denſitatum mediorum, fiet QM $\left(\frac{bds}{a}\right)$: $qm\ (dy) = z : a$, & $bds = zdy$, aut ſi fuerit $Pp = Mq = dx$, $b\sqrt{dx^2 + dy^2} = zdy$, vel $b^2dx^2 + b^2dy^2 = z^2dy^2$, $bdx = dy \times \sqrt{z^2 - b^2}$, $\frac{bdx}{\sqrt{z^2 - b^2}} = dy$. Data itaque curva denſitatum HLS, poterit conſtrui curva BMR.

140. Si curva denſitatum ſit logiſtica, ad quam æquatio $\frac{adz}{z} = dx$, hoc valore ſubſtituto fit $\frac{abdz}{z\sqrt{z^2 - b^2}} = dy$. Ponatur $\sqrt{z^2 - b^2} = v$, $z^2 = v^2 + b^2$, $z = \sqrt{v^2 + b^2}$, $dz = \frac{vdv}{\sqrt{v^2 + b^2}}$, his valoribus ſubſtitutis fiet $\frac{abdz}{z\sqrt{z^2 - b^2}} = \frac{abvdv}{v\sqrt{v^2 + b^2} \times \sqrt{v^2 + b^2}} = \frac{abdv}{v^2 + b^2} = dy$. Jam vero eſt $\frac{b^2dv}{v^2 + b^2}$ elementum ſectoris circuli, cujus tangens $= v$, adeoque $\frac{bdv}{v^2 + b^2}$ erit dimidius arcus ejusdem tangentis. Unde ſi fiat $a = 1$, habebitur y.

Si ponatur HLS recta, ad quam æquatio $\frac{ax}{c} = z$, fiet $\frac{cabd}{\sqrt{a^2x^2 - b^2c^2}} = \frac{cbdx}{\sqrt{x^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}}} = dy$. Eſt autem $\frac{\frac{b^2c^2dx}{a^2}}{2\sqrt{x^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}}}$ elementum ſectoris hyperbolæ æquilateræ, cujus ſemiaxis eſt $\frac{bc}{a}$, conſequenter ejus ope conſtruitur. Mech. Part. I. N. 229 æquationem ad curvam catenariam invenimus $y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, igitur etiam in præſente hypotheſi curva refractionis erit eadem, uti manifeſtum eſt, ſi ponatur $\frac{bc}{a}$ loco a, & a aſſumatur $= 1$.

Si

Si curva densitatum sit parabola Apolloniana, ad quam æquatio $z^2 = cx$, facta substitutione habetur $dy = \frac{bdx}{\sqrt{cx - b^2}}$: est autem $\frac{bdx}{\sqrt{cx-b^2}}$ differentiale de $\frac{2b}{c}\sqrt{cx - b^2}$, adeoque $y = \frac{2b}{c}\sqrt{cx - b^2}$. Posuimus in A densitatem esse $= a$, consequenter $z^2 = a^2 = cx$, & $x = \frac{a^2}{c}$, $y = \frac{2b}{c}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{FC \times 2b}{c}$; in vertice parabolæ est $x = o$, adeoque $y = \frac{2b}{c}\sqrt{-b^2} = \frac{2b^2}{c}\sqrt{-1}$; nequit ergo curva BMR habere eandem originem. Porro æquatio $y = \frac{2b}{c}\sqrt{cx - b^2}$, seu $y^2 = \frac{4b^2c^2x}{c^2} - \frac{4b^4}{c^2}$ est ipsa ad parabolam, in qua parameter $= \frac{4b^2}{c}$, sed vertex distat ab origine abscissarum x quantitate constante $\frac{b^2}{c}$. Posita quippe $y = o$, obtinetur $x = \frac{b^2}{c}$. Denique cum FB directio radii incidentis, debeat esse tangens curvæ BMR in B, debet etiam esse ex natura parabolæ, ordinata AB ad duplam distantiam verticis ab ordinata AB, ut est CB ad CF, seu ut b ad $\sqrt{a^2 - b^2}$. Ordinatam AB invenimus $= \frac{2b}{c}\sqrt{a^2 - b^2}$; distantiam ordinatæ a vertice $= \frac{a^2 - b^2}{c}$; quare est $b : \sqrt{a^2 - b^2} = 2b\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{c}} : \frac{2(a^2 - b^2)}{c}$. In hac itaque hypothesi fit (fig. 75 Tab. VIII) DHS parabola parametro c, axe DP descripta; DA $= \frac{a^2}{c}$, eritque HA $= a$. Dein sumatur AE $= \frac{a^2 - b^2}{c}$, & vertice E describatur parametro $\frac{4b^2}{c}$ parabola EBR; fiet ED $= \frac{a^2 - a^2 + b^2}{c} = \frac{b^2}{c}$, quo casu habuimus $y = o$. $AB^2 = \frac{4b^2}{c} \times AE = \frac{4b^2}{c}\,\frac{(a^2 - b^2)}{c} = \frac{4b^2}{c^2}(a^2 - b^2)$, & AB $= \frac{2b^2}{c}\sqrt{a^2 - b^2}$, uti prius invenimus. Denique habetur $b : \sqrt{a^2 - b^2} = AB \left(\frac{2b\sqrt{a^2 - b^2}}{c}\right)$ ad 2AE vel AF $\left(\frac{2(a^2 - b^2)}{c}\right)$: quippe multipli- Fig. 75. Tab. VIII.

catis mediis & extremis fit $\frac{2b(a^2 - b^2)}{c} = \frac{2b(a^2 - b^2)}{c}$, ideoque tangens BF habet directionem radii incidentis.

141. Quoniam Tellus undique atmoſphæra cingitur, cujus denſitas perpetuo inde a ſuperficie Telluris decreſcit, nullus ex ſideribus lucis radius ad nos ſine refractione pervenit, niſi qui ex ipſo vertice, ſeu zenith, incidit. Refractio cum locum mutet, in quo ſine ea corpora cœleſtia viderentur, ſummi momenti eſt in Aſtronomia. Quare de hac ſequente Problemate non nihil diffuſius agemus, & quidem ea methodo, quæ Aſtronomorum uſui conveniat, prorſus *D. de la Lande* ſecuti. Debet hic omnino quælibet elegantia Geometrica experientiæ cedere, eaque demum ſumi hypotheſis, quæ propius ad verum nos ducit, etſi fortaſſis Algebraicis rationibus minus congruere videatur, cum plura in natura nobis perſpecta non ſatis ſint, & Algebra Phyſicæ applicata ſæpe in errores conjiciat, ubi ſufficientia data deſunt.

Problema VI.

Fig. 76. Tab. VIII.

142. Invenire curvam VNA (fig. 76 Tab. VIII), quam particula lucis directione VT incidens deſcribit, uſque ad oculum obſervatoris in A conſtituti.

Reſolutio. Oſtendimus in Optica, dum lux ex medio rariore in denſius incidit, augeri ejus celeritatem perpendicularem ad ſuperficiem medii denſioris, & quia ſpectata refractione tam Tellus, quam atmoſphæra pro ſphærica haberi poteſt, hæc vis accelerans inſtar centripetæ conſiderari debet. Eſt autem hæc vis proportionalis denſitati medii attrahentis, & variatio proinde ipſi variationi denſitatum. Sit itaque BA axis, BD, KP, AS ordinatæ ſcalæ denſitatum DPS; ſit radius Telluris AO $= a$, celeritas, qua lux in atmoſphæram incidit, exponatur recta AQ $= v$, qua vero ad oculum ſpectatoris allabitur, recta AM $= g$; BD $= q$, OV $= x$, deſcripto circulo concentrico priori VB infinite propinquo, CV $= dx$, elementum curvæ VN $= dz$, area ABDS $= s$, ſit VT tangens in V, NR tangens in N, AF tangens in A. Evidens eſt, angulum diſtantiæ a vertice, ſeu zenith obſervatoris eſſe OAF, cujus ſinus ſit $= b$, ſumpto radio $= 1$. Denique ſint OT, OR, OF perpendicula e centro O ad tangentes demiſſa.

Quia vis acceleratricis q directio eſt verſus centrum, & motus VN obliquus, erit ea in directione VN ut $\frac{qdx}{dz}$. Eſt autem ex principiis Mechanicæ vis ducta in elementum temporis æqualis incremento celeritatis, & elementum temporis eſt ut elementum ſpatii VN divi-

divisum per celeritatem AQ, sive $= \frac{dz}{u}$, igitur incrementum celeritatis, erit $= \frac{qdx}{u}$; sed quia crescente u decrescit x, sumendum est $\frac{-qdx}{u} = du$, vel $\frac{qdx}{u} = -du$, & hinc $-qdx = udu$. Notum est ex scala virium, si ordinatæ sint ut vires, abscissæ ut spatia, esse aream $= s$ ut quadratum celeritatis, consequenter, $udu = -qdx = -ds$, & integrando $\frac{u^2}{2} = Q - s$.

Ut constans Q determinetur, posuimus in A fieri celeritatem AM $= g$, seu $\frac{u^2}{2} = \frac{g^2}{2}$, quo subtracto habetur $\frac{u^2}{2} = \frac{g^2}{2} - s$, vel $u^2 = g^2 - 2s$, ac $u = \sqrt{g^2 - 2s} =$ AQ.

143. Cum vis acceleratrix æquivaleat vi centripetæ versus O, etiam in hac curva locum habet principium Mechanicæ, quod celeritates corporis describentis curvam sint in singulis ejus punctis in ratione reciproca perpendiculorum ad tangentes ex centro virium, seu O, demissorum. Unde habetur AQ (celeritas in V): AM (celeritatem in A) $=$ OF : OT. Sed quia posuimus angulum OAF habere sinum $= b$ pro radio $= 1$, erit $1 : b =$ AO (a): OF $= ab$, & AQ $(\sqrt{g^2 - 2s})$: AM $(g) =$ OF (ab): OT $= \frac{abg}{\sqrt{g^2 - 2s}}$; $VT^2 = OV^2 - OT^2 = x^2 - \frac{a^2b^2g^2}{g^2 - 2s} = \frac{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}{g^2 - 2s}$, VT $= \sqrt{\frac{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}{g^2 - 2s}}$.

Porro VT : OT $=$ VC : CN, substitutisque valoribus inventis $\frac{\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}}{\sqrt{g^2 - 2s}} : \frac{abg}{\sqrt{g^2 - 2s}} = dx : \text{CN} = \frac{abgdx}{\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}}$.

Notum est, angulum esse æqualem arcui diviso per radium, adeoque erit angulus VON, seu CON $= \frac{\text{CN}}{\text{CO}}$, vel ob VC evanescens, $= \frac{\text{CN}}{\text{VO}} = \frac{abdgx}{x\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}}$, habemus adeo differentiale anguli VOA, sub quo e centro O videretur curva VNA.

144. Ut autem differentiale refractionis reperiamus, evidens est, quærendam esse expressionem analyticam anguli TVR, quem, cum sit infinite parvus, metitur Tr, differentia de TO. Habuimus TO =

$= \frac{abg}{\sqrt{g^2 - 2s}}$, adeoque $Tr = \frac{bagds}{(g^2 - 2s)\sqrt{g^2 - 2s}}$, & $TVr =$ $\frac{Tr}{TV} = \frac{abgds}{(g^2 - 2s)\sqrt{g^2 - 2s}} \times \frac{\sqrt{g^2 - 2s}}{\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}} =$ $\frac{abgds}{(g^2 - 2s)\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}} = \frac{abg}{\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}} \times \frac{ds}{g^2 - 2s}$ $= \frac{OT}{TV} \times \frac{ds}{g^2 - 2s}$. Ex quo patet, data curva BPS, cujus area $= s$, inveniri refractionem.

Ex hac expreſſione, poſita refractione valde parva, animadvertere licet, refractionem totalem eſſe fere ut tangentem anguli incidentiæ ductam in denſitatem medii. Eſt enim angulus obliquitatis VNC, adeoque angulus incidentiæ CVN, & ſumpto radio $= 1$, eſt $VT : TO = 1 : tang. TVO$, & s eſt ſumma omnium virium acceleratricium, quæ ſunt ut denſitates. Jam vero refractio reapſe exigua eſt, & celeritas g ſpectata vi s, & exigua mutatione, quam in via radii efficit, ingens, ut adeo angulus incidentiæ, ejusque tangens $\frac{OT}{VT}$ fere pro conſtante haberi poſſit, uti non minus $g^2 - 2s$. Unde differentia refractionis $\frac{OT}{TV} \times \frac{ds}{g^2 - 2s}$, erit quam proxime ut ds, & refractio tota proportionalis tangenti anguli incidentiæ (qui eſt idem cum diſtantia a zenith), & quantitati s.

145. Et vero unica ratio, cur radius lucis deflectat a prima ſua via, eſt diverſa denſitas medii $=$ BK, dum ex V ad N pervenit, hoc eſt, differentia inter KP & BD; jam cum ad A usque pertingit, ſi athmoſphæræ totius altitudo ponatur AB, eſt in B denſitas $= o$, & in A $= s$, adeoque differentia eſt tota vis refractiva, ſeu denſitas atmoſphæræ. Hypotheſis hæc conſentit experientiæ in omnibus refractionibus Aſtronomicis, quando altitudo ſiderum excedit viginti gradus. Unde etiam cel. Aſtronomus *de la Caille* ſtatuit refractionem in ratione tangentium diſtantiarum a zenith, & denſitatum. (Mon. Acad. Par. 1755). Præterea notatum eſt, refractiones ſenſibiliter augeri, quando altitudo hydrargyri in barometro augetur.

146. Verum pro refractionibus in altitudinibus minoribus ex præcedente formula haud poteſt regula tam ſimplex deduci. Phyſicorum plurimorum exprimentis conſtat, aeris denſitatem in locis ſuperficiei Telluris vicinioribus creſcere in progreſſione geometrica, ideoque ſi unica denſitas eſſet cauſa refractionis, longe alia lege fieret. Unde dicendum, ſubeſſe iſthic adhuc cauſas nobis minus perſpectas, quæ

funden-

fundentur in natura vaporum diſperſorum per aerem, quamdiu altitudo ultra 20° non aſſurgit, maxime cum alia experimenta, & potiſſimum inſtituta cum corporibus propius ad ſulphuream naturam accedentibus, manifeſte evincant, refractionem non ſemper fieri juxta legem denſitatis.

Quidquid vero ſit, hypotheſis, quod atmoſphæræ denſitas in deſcenſu creſcat uniformiter, præbet refractionem, quæ cum obſervata ſatis accurate congruit, in qua proinde (etſi cum altitudinibus barometri conciliari haud poſſe videatur) quæremus rationem differentialis refractionis ad differentiale anguli VOA.

147. Eſto igitur h altitudo atmoſphæræ in partibus radii Telluris, ſeu AB $= h$, & k valor maximus de s, ſive areæ totius ABDS; erit ob uniforme augmentum de s, & x, $ds : dx = k : h$, & differentiale ſuperius inventum $\frac{Tr}{VT}$ mutabitur in $\frac{abgkdx}{h(g^2 - 2s)\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2b^2g^2}}$.

Differentiale VON anguli AOV habuimus (143) $= \frac{abgdx}{x\sqrt{g^2x^2 - 2sx^2 - a^2g^2b^2}}$;

eſt autem illud ad hoc, ut $\frac{k}{h(g^2 - 2s)}$ ad $\frac{1}{x}$. Poſito radio Telluris $a = 1$, & celeritate lucis in A, ſeu g itidem $= 1$, erit differentiale refractionis ad differeniale anguli AOV, ut k ad $h(1 - 2s)$. Quia vero OV inde ab V uſque ad Telluris ſuperficiem nequidem $\frac{1}{30}$ parte mutatur, poteſt $x =$ OV cenſeri conſtans, uti etiam $1 - 2s$ etiam in caſu refractionum majorum; unde ratio differentiæ refractionis ad differentiam illius anguli erit proxime $k : h$.

Porro angulus VHB, æquatur angulorum OVH, HOV ſummæ, & differentiale anguli VHB eſt idem cum differentiali refractionis, cum ejus mutatio ſit TVr; quare etiam differentiale refractionis æquatur ſummæ differentialium angulorum OVH, & HOV; eſt autem differentiale refractionis ad differentiale auguli HOV ut $k : h$; igitur erit idem differentiale ad differentiale anguli HOV minus refractione, ut $k : h - k$. Atqui angulus HOV ſubtracta refractione eſt angulus OAF — OVH, utpote cum ſit VHB = HVO + HOV, & angulus OAF ſit differentia inter ſummam horum angulorum, & refractionem. Quare angulus HOV minus refractione æquatur angulo OAF − OVH, eritque differentiale refractionis, ad differentiale anguli OAF − OVH, ut $k : h - k$, neque ut habeatur differentiale refractionis, aliud requiretur, quam ut differentiale anguli OAF − OVH ducatur in $\frac{k}{h - k}$. Hoc autem ſi verum ſit de differentialibus, verum quoque eſſe debet de integralibus: quippe ſi ſit $\frac{kdx}{h - k} = dy$, erit quoque $\frac{kx}{k - k} = y$. Unde ſequitur, ad

obti-

obtinendam refractionem, debere differentiam inter angulos OAF & OVH multiplicari per $\frac{k}{h-k}$. Illud igitur superest, ut inveniatur angulus OVH.

148. Invenimus OT $= \frac{bag}{\sqrt{g^2-2s}}$, sive positis $a = 1$, $g = 1$, & s in ratione k, OT $= \frac{b}{\sqrt{1-2k}}$; OV vero $=$ OA $+$ AB $= 1 + h$. Est ergo sinus anguli OVH $= \frac{OT}{OV} = \frac{b}{(1+h)\sqrt{1-2s}}$. Eruetur valor hujus fractionis divisione actuali; sed satis est adhibere priores terminos, quod fractiones per h & k repræsentatæ admodum exiguæ sint, fietque $\frac{OT}{OV}$, seu sinus anguli OVH $= b(1-h+k)$, adeoque si fiat $1 : 1-h+k = b : \frac{OT}{OV}$, sive sinus distantiæ apparentis a zenith ad sinum anguli OVH, differentia inter angulum OVH, & distantiam apparentem a zenith, seu OAF, ducta in $\frac{k}{h-k}$ dabit refractionem quæsitam, modo constantes h & k ope duarum observationum determinentur.

149. Etsi hypothesis assumpta densitatum uniformiter in descensu crescentium combinari nequeat cum observatis altitudinibus barometri, magis tamen cum observationibus refractionum congruit, ita quidem ut, si retineatur, refractio horizontalis inveniatur 32′, cum tamen ex lege, quam exhibet altitudo barometri, eadem evadat 52′, excessu supra observatam 20′. Si ex observatione refractionis facta in altitudine 7 gradibus majore calculentur reliquæ, seu hanc, seu aliam sequaris hypothesin, discrimen 2″ majus non erit. Unde *Simpsonius* existimat, quod cum lex uniformis incrementi densitatum det refractionem horizontalem observationibus congruentem, ex ea una possit accurata tabula refractionum construi, modo semel refractiones majores ex observationibus determinentur.

Idem *Simpsonius* statuit $k = 0{,}000253$, $\frac{k}{h-k} = \frac{253}{1390}$, aut fere $\frac{2}{11}$ (cujus loco *Bradleyus* sumit $\frac{1}{6}$); $\frac{1}{1-h+k} = \frac{1}{0{,}9986}$; ex quibus sequentem deducit regulam. I° *Radius est ad sinum anguli* 86° 58′½, *ut sinus distantiæ a zenith ad sinum alicujus arcus.* II° *Differentia inter hunc arcum, & distantiam a zenith ducta in* $\frac{2}{11}$ *dabit refractionem pro distantia a zenith data.* Quod

Quod pertinet ad variationes refractionum, quando Mercurius certo graduum numero ſupra mediam altidudinem aſcendit, vel deſcendit, & in Thermometro Reaumuriano ſupra, vel infra gradum aeris temperati, ſeu 10, hæret, ad præſens inſtitutum minus facit, & conſulendæ erunt in uſu Aſtronomico tabulæ a *D. de la Caille* conſtructæ. Nos hiſce finem præſenti capiti imponimus.

CAPUT V.

De Emendatione Dioptrices.

Exponitur Argumentum.

150. In illis, quæ ſuperius de focis lentium ſuperficiebus ſphæricis præditarum attulimus, ſemper poſuimus, lucis radios adeo vicinos axi incidere, ut tota amplitudo baſeos coni lucidi rationem inſenſibilem habeat, ideoque radii axi infinite propinqui cenſeri poſſint. Atqui cum objecti imago per ſat magnum ſpatium diffuſa clare videri nequeat, niſi tantum luminis, quantum afficiendo oculo ſatis ſit, in lentem admittatur, nequit tam exilis apertura vitris relinqui, ut radii non ad majus etiam intervallum ab axe remoti in illa incurrant, ideoque haud poſſit ea accuratione definiri focus, quam prior hypotheſis ſpondebat. Jam vero vel ex paucis illis, quæ in ſuperioribus (Cap. IV. Probl. I) de Cauſticis per refractionem in unica ſuperficie ſpeciminis loco dedimus, (duplex enim ſuperficies id tantum inducet diſcriminis, ſi de lentibus utrinque convexis agatur, ut foci binorum quorumvis radiorum infinite propinquorum magis contrahantur) ſatis perſpicitur, id genus curvas axi ſuo ſemper obvertere convexitatem, ac propterea tangentes (quæ ſunt ipſi radii refracti cauſticam efformantes) eo citius ſecare axem, quo propius ad ſuperficiem refringentem puncta contactus ſumuntur, id eſt, quo radii incidentes ab axe remotiores ſunt.

151. Fiet igitur neceſſario, ut, licet eadem ponatur in omnibus radiis in lentem incidentibus ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis, a diverſis tamen radiis diverſi etiam foci, ſeu interſectiones cum axe, oriantur, prout alii magis, minus alii ab axe recedunt. Quare etiam in luce homogenea focus duplicem aberrationem patitur; alteram in longitudinem (quæ eſt intervallum interſectionum radiorum cum axe, quorum alii ſunt remotiſſimi, ſive per ipſum aperturæ am-

bitum ingrediuntur, alii axi infinite propinqui); in latitudinem alteram, id est, circellum illum lucidum, qui si radii per lentem transmissi plano ad axem normali excipiantur, in eodem plano depingitur.

152. At enim sat bene haberet res dioptrica, si id unum incommodum, quod secum fert figura lentium sphærica, tolerandum esset. Est aliud, a diversa radiorum lucis indole pendens (quod jam Cap. III. Art. II. sect. I. indicavimus), quod aberrationem tam in longitudinem, quam in latitudinem tantopere auget, ut mirum visum sit *Newtono*, *conspicilla tubulata* (sic opticos tubos appellat) *res objectas tam distincte exhibere posse, quam eas revera exhibent.* Opt. l. I. Part. I. Prop. 7. Exper. 16.

153. Emendationem hujus vitii dudum in desperatis post *Newtonum* (*) habuere Optici, qui plerique omnes id vel quærere temerarium putarunt, cujus reperiundi viam tantus vir non perspexisset. Duplex autem erat hac in re *Newtoni* hallucinatio: imprimis quod cuivis vitri generi eandem & refringendi, & radios heterogeneos consimili ratione dispergendi vim tribuerit; tum quod experimentis minus certis inductus statuerit, lumen per diversa media transmissum, si emergat directione ad radios incidentes parallela, semper manere album; & semper dispergi in diversos colores, si directione ad incidentes radios inclinata emergat. Ita enim Opt. I. lib. Part. II. Prop. 3 Exper. 8 habet: *Observavi præterea, cum lumen ex aere per diversa refringentia media inter se contigua, ut aquam, & vitrum, transmittatur, indeque iterum in aerem transeat, id lumen, sive superficies, quibus id refringatur, parallelæ sint inter se, sive inclinatæ, tamen quotiescunque contrariis refractionibus ita correctum sit, ut emergat tandem in lineis parallelis ad eas, in quibus inciderit, deinceps semper album permanere; sin radii tandem emergentes sint incidentibus inclinati, tum luminis incidentis albitudinem pro eo, ut id a loco emersionis ulterius progrediatur, paulatim se ab extremis sui partibus in colores induere.*

154. Demonstravit autem cel. *Klingenstierna* (*Mem. de l' Ac. de scien.* A. 1756. *Mem. par M. Clairaut Art.* II.), si ponatur ea lex refractionis, ut radius per alteram prismatis superficiem ad incidentem parallele egrediens conservet colorem album, sequi necessario, ut idem eveniat in altero prismate ex eadem vitri specie elaborato, cujus facies sub alio angulo inclinatæ sint, quod alia requiratur refractionis lex, ut adeo lex refractionis non constans, sed pro diversis prismatum angulis diversa haberi debeat, si quidem *Newtoni* experimenta certa, & nulli exceptioni obnoxia sint.

155.

(*) Quandoquidem igitur refractionibus perficere conspicilla tubulata, quæ sint datarum longitudinum in negotiis desperatis est. . , Opt. Lib. I. Part. I. Prop. 7. Exper. 16.

155. Argumenti hujus vi excitatus Dollandus, celebris Opticus, rem per nova experimenta ulteriori disquisitioni subjicere constituit. Et cum duplicis generis vitri refractionem examinasset (quorum alterum vulgari nostro respondet, & Anglis *Crownglass* dicitur, alterum *Flintglass*, quod minii admistione magis dispergit lucis radios) ex utrovis quidem exigui, & æqualis anguli efformata prismata ita conjunxit, ut acies in oppositas partes dirigerentur; tum vero objectum per eadem conspectum loco suo perstare, verum circa limbos coloribus iridis tinctum apparebat. Addidit denique prisma tertium ex *Crownglass*, cujus angulus dimidius erat prioris, & aciem in eandem partem obvertit, quam spectabat acies prioris ex eadem materia. Objectum illico situm mutare videbatur, sed nullo ad sensum ambiebatur colore. Argumento id erat Dollondo, posse per diversæ speciei conjuncta vitra & haberi refractionem (quod ad efformandum focum, in quo imago objecti depingatur, necessum est), & simul tolli incommodum ex heterogeneitate luminis oriundum. Unde illico operi manum admovit, & primus emendatiora telescopia dioptrica perfecit.

156. Mox, ut fit in recens inventis, non Angli modo, verum & alii aliarum nationum docti viri theoriam emendationis tuborum opticorum magnis accessionibus auxerunt, quos inter eminent *Clairaut*, *Klingenstierna*, *d' Alembert*, & maxime *Leonh. Eulerus*, qui universam Dioptricam emendatam tribus justis voluminibus complexus est, aliaque multa in Academiarum monumentis dedit. *Clairautii* binas lucubrationes, quæ in Monum. Acad. Paris A. 1756 & A. 1757 prostant, tironibus magis accommodavit *Boscovichius*, qui etiam alteram dissertationem Actis Institut. Bonon. inseruit, in qua experimentis ostendit, diffractionis coloratorum radiorum legem non esse eandem in diversis vitri speciebus, ideoque si v. g. per lentem e *Flintglass*, & *Crownglass* compositam colligantur radii rubri & violacei, non ideo etiam colligi aurantios, & cæruleos; flavos, & virides &c, sed remanere aliquam iridem, quæ non tollatur, nisi plures, quam binæ vitrorum species adhibeantur. Sed quoniam argumenti amplitudo tanta est, ut non nisi scitu magis necessaria persequi nobis liceat, præcipua, quæ *Boscovichius* dedit, ita adferemus, ut a tirone facile intelligi possint, contenti scilicet viam commonstrasse, ut per se dein quisque, cui otium, & vires suppetunt, reliqua apud laudatos scriptores disquirere possit.

157. Duplex itaque aberrationis causa poscit, ut materiam, quam in præsens tractamus, ita dividamus, ut ab initio exponamus, qua ratione aberratio luminis a figura superficiei sphæricæ oriunda calculo subjici possit; dein qui dispersio radiorum heterogeneorum computanda sit; ac denique videamus, quid remedii adhibendum sit, ut utriusque generis errores si non penitus tollantur, saltem magnam partem minuantur.

ARTICULUS I.

De erroribus focorum dioptricorum pendentibus a figura ſphærica.

158. Ut, quæ dicturi ſumus, expeditam habeant demonſtrationem, ex elementari Geometria ſequente utemur lemmate: ſi fuerit (fig. 77 Tab. IX) MPC triangulum rectangulum ad P, & latus MP exiguum reſpectu aliorum MC, PC, erit differentia inter MC & PC $= AP$, proxime $= \frac{MP^2}{2MC} = \frac{MP^2}{2PC}$.

Fig. 77. Tab. IX.

Deſcripto enim radio MC ſemicirculo, eſt PB ($= PC + CB = PC + MC$): $MP = MP : AP = \frac{MP^2}{PC + MC}$. Atqui ſi MP eſt exiguum reſpectu MC, & PC, erit multo magis AP exiguum reſpectu ſummæ PC + CM, & hinc ſeu addatur, ſeu dematur, ea ſumma notabiliter non mutatur, conſequenter quotus ex MP^2 per ſummam diviſo ad ſenſum idem manet. Jam vero ſi addatur AP, ſumma fit $AP + PC + MC = AC + MC = 2MC$; ſi autem dematur, habebitur $PC + MC = PC + AC - AP = PC + PC = 2PC$. Igitur erit proxime $AP = \frac{MP^2}{2MC} = \frac{MP^2}{2PC}$.

259. Problema I. Dato radio AC ſuperficiei ſphæricæ refringentis (fig. 78 Tab. IX), diſtantia AG puncti G in axe producto a ſuperficie eadem, ad quod tendit radius lucis incidens LM, nec non ratione ſinus anguli incidentiæ CMG ad ſinum anguli refractionis CMH $= m : 1$, invenire diſtantiam puncti H, in quo radius refractus occurrit axi, a ſuperficie refringente AM.

Fig. 78. Tab. IX.

Reſolutio. In triangulo MCG eſt *ſin.* MCG : *ſin.* CMG $=$ MG : GC; & quia CMG angulus incidentiæ, MCH vero refractionis, eſt quoque

ſin. MCG : *ſin.* CMH $= m : 1$;

& compoſitis rationibus . . . . *ſin.* MCG : *ſin.* CMH $= m \times$ MG : CG.

Porro in triangulo CMH habetur *ſin.* MCH ($=$ *ſin.* MCG) : *ſin.* CMH $=$ MH : CH. Unde fiet

$$MH : CH = m \times MG : CG.$$

Ut analogiam hanc analytice exprimamus, ſit $AC = MC = a$, $AH = x$, $AG = p$, $MP = e$; fiet $HC = x - a$, $GC = p - a$, & per Lemma $AP = \frac{e^2}{2a}$, proinde $PH = x - \frac{e^2}{2a}$, $PG = p - \frac{e^2}{2a}$. Quia per lemma PH exceditur ab MH quantitate $\frac{MP^2}{2PH} = \frac{e^2}{2x}$ (cum

AH

AH loco PH tuto ſumi queat), erit MH proxime $= x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x}$. Eodem modo cum PG excedatur ab MG quantitate $\frac{MP^2}{2AG}$, aut etiam $\frac{MP^2}{2PG} = \frac{e^2}{2p}$, habebitur MG $= p - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2p}$. Sumatur $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, fiet MG $= p - \frac{1}{2} ke^2$. Hi valores ſubſtituti in poſtrema analogia, eam mutant in $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x} : x - a = mp - \frac{1}{2} mke^2 : p - a$.

Evidens eſt, ut inveniatur x, ex analogia faciendam eſſe æquationem, quæ ob partem $\frac{-e^2}{2x}$ termini primi evadet quadratica. Eſt autem hæc pars per ſe ſe exigua, cum ſit e radius aperturæ lentis, & x focus, notumque eſt, valorem fractionis exiguæ non mutari ſenſibiliter, ſi denominator tantillo augeatur, & ſcimus totam aberrationem foci in longitudinem, quæ ab apertura lentis pendet, perexiguam eſſe; unde ſi focus radiorum axi infinite propinquorum dicatur $= q$, hic parum admodum excedet quantitatem x.

Habuimus (N. 4) z ſeu $q = \frac{dmr}{d(m-n)-nr}$, ſeu cum apud nos ſit $a = r$, $-d = p$, $n = 1$, $q = \frac{-amp}{-p(m-1)-a} = \frac{amp}{p(m-1)+a}$, & $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{am} - \frac{1}{mp} = \frac{1}{a} - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{a} - \frac{k}{m} = \frac{m-ak}{am}$. Igitur ſi loco $\frac{1}{2x}$ adhibeatur in tertia parte primi termini ſuperioris analogiæ $\frac{1}{2a} - \frac{k}{2m}$, eadem abit in $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2a} - \frac{ke^2}{2m} = x - \frac{ke^2}{2m}$, & proportio erit $x - \frac{ke^2}{2m} : x - a = mp - \frac{1}{2} mke^2 : p - a$, ſeu (cum $\frac{1}{a} - \frac{1}{p} = k$, conſequenter $\frac{p-a}{ap} = k$, vel $p - a = apk$ poſuerimus), $x - \frac{ke^2}{2m} : x - a = mp - \frac{1}{2} mke^2 : apk$, quæ præbet æquationem $mpx - \frac{1}{2} mke^2 x - apm + \frac{1}{2} amke^2 = apkx - \frac{apk^2e^2}{2m}$, &

$(mp - apk - \frac{1}{2} mke^2) x = amp - \frac{1}{2} amke^2 - \frac{apk^2e^2}{2m}$, & denique

$$x = \frac{amp - \frac{1}{2} amke^2 - \frac{apk^2e^2}{2m}}{mp - apk - \frac{1}{2} mke^2}.$$

160. Ut valor de x inventus ſimplicior reddatur, obſervabit tiro, eſſe e fractionem reſpectu a admodum parvam, uti etiam reſpectu p. Hinc numeratoris duo termini negativi, & tertius denominatoris terminus, exiles admodum habendi ſunt. Jam vero notum eſt, ſi fractio $\frac{A - dx}{B - dy} = \frac{A}{B - dy} - \frac{dx}{B - dy}$ (in qua dx, dy exprimunt quantitates perexiguas) evolvatur actuali diviſione, ſumendum tantummodo eſſe $\frac{A}{B} + \frac{Ady}{B^2} - \frac{dx}{B} = \frac{A}{B} + \frac{Ady - Bdx}{B^2}$, omiſſis potentiis altioribus, & terminis, in quibus eſt $dxdy$. Quare ſi modo ponatur $A = map$, $dx = \frac{1}{2} amke^2 + \frac{apk^2e^2}{2m}$, $B = ma - apk$; $dy = \frac{1}{2} mke^2$, valor de x mutabitur in $\frac{mpa}{mp - apk} + \frac{(mpa)\frac{1}{2} mke^2 - (mp - apk)(\frac{1}{2} make^2 + \frac{apk^2e^2}{2m})}{p^2 (m - ak)^2}$, aut ſi fiat actualis multiplicatio, & ſecundus terminus in ſuos factores debite diſpeſcatur, $x = \frac{ma}{m - ak} + \frac{m^2a^2}{(m - ak)^2} \left(\frac{k^2}{mp} - \frac{k^2}{m^2a} + \frac{k^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2$, aut ſi intra ſignum parentheſis addatur, & dematur $\frac{k^2}{m^2p}$, fiet $x = \frac{ma}{m - ak} + \frac{m^2a^2}{(m - ak)^2} \left(\frac{k^2}{mp} + \frac{k^2}{m^2p} - \frac{k^2}{m^2p} - \frac{k^2}{m^2a} + \frac{k^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2$. Eſt per hypotheſin $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, & $-k = -\frac{1}{a} + \frac{1}{p}$; & $-\frac{k^2}{m^2a} + \frac{k^2}{m^2p} = \frac{k^2}{m^2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{p}\right)$; hinc $-\frac{k^2}{m^2a} + \frac{k^2}{m^2p} = -\frac{k^3}{m^2}$. Id ſi ſubſtituatur, obtinetur $x = \frac{ma}{m - ak} + \frac{m^2a^2}{(m - ak)^2} \left(\frac{k^2}{mp} - \frac{k^3}{m^2} - \frac{k^2}{m^2p} + \frac{k^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2$ Atqui habuimus $q = \frac{ma}{m - ak}$, & $\frac{k^2}{mp} - \frac{k^3}{m^2} - \frac{k^2}{m^2p} + \frac{k^3}{m^3} = -\frac{m - 1}{m^3} \times \left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)$; quare diſtantia quæſita etiam ita exprimetur

$x =$

$x = q - q^2 \left(\frac{m-1}{m^3}\right)\left(k^2 - \frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$. Si ponatur $\varphi = \left(\frac{m-1}{m^3}\right)\left(k^2 - \frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, fiet tandem $x = q - q^2\varphi$.

Ex hac poſtrema expreſſione apparet, focum radiorum axi infinite propinquorum decurtandum eſſe quantitate $q^2\varphi$, hoc eſt, aberrationem in longitudinem eſſe ipſum $q^2\varphi$. At ſi radii ad axem paralleli incidant, aut fuerit $p = \infty$, fiet $q = \frac{ma}{m-ak} = \frac{ma}{m - a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right)} = \frac{ma}{m-1}$, evaneſcente $\frac{a}{p}$; item $\frac{mk^2}{p} = o$, & $k = \frac{1}{a}$, proinde $\varphi = \left(\frac{m-1}{m^3}\right)\frac{e^2}{2a^2}$, $x = \frac{ma}{m-1} - \frac{m^2a^2}{(m-1)^2} \times \frac{m-1}{m^3} \times \frac{e^2}{2a^2} = \frac{ma}{m-1} - \frac{e^2}{2am(m-1)}$.

Cum habuerimus $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, ſi fingamus in p fieri mutationem perexiguam, ob $\frac{m-1}{ma}$ conſtantem, fiet $-\frac{dq}{q^2} = -\frac{dp}{mp^2}$, & $dp : dq = mp^2 : q^2$. Atqui ob exilitatem correctionis $-q^2\varphi$ in foco radiorum faciendam, cenſeri poteſt, eſſe q, ſeu focum radiorum axi infinite propinquorum, ipſum AH, in quo tantilla fiat mutatio; & proinde erit quam proxime AH^2 ad $m \times AG^2$, ut mutatio in AG ad mutationem conſequentem in AH.

161. Problema II. Si radii incidentes LM (fig. 79 Tab. IX) verſus G tendant, & in prima ſuperficie AM refringantur ad H, quæritur punctum I, ad quod in ſecunda ſuperficie BN refracti diriguntur, datis BH, & ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti $1 : m$. Fig. 79. Tab. IX.

Reſolutio. Evidens eſt, datis BH, $\frac{1}{m}$, radio ſuperficiei BN, & radio aperturæ ejusdem, poſſe eadem methodo definiri diſtantiam BI, quo priore Problemate ex AG $= p$, ratione ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis $\frac{m}{1}$, radio ſuperficiei AM, ejusque apertura, determinata fuit diſtantia AH.

Dicatur radius ſuperficiei BN $= b$; radius aperturæ ob viciniam punctorum M, N citra ſenſibilen errorem manere poteſt $= e$, vitri craſſitudo ſit $= \alpha$. Si foret BH accurate $= q$, non alia re opus eſſet

esset ad inveniendam distantiam BI, quam ut 1mo sumeretur $\frac{1}{b} - \frac{1}{q}$ loco $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$; dein $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml$ loco $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$, ac denique $\pi = \left(\frac{1}{m} - 1\right) m^3 \left(l^3 - \frac{l^2}{mq}\right) \frac{1}{2} e^2 = -\frac{(m-1)}{m} \left(m^3 l^3 - \frac{m^2 l^2}{q}\right) \times \frac{1}{2} e^2$ loco $\varphi = \frac{m-1}{m^3} \left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right) \frac{1}{2} e^2$, & obveniret BI $= r - r^2\pi$. At enim cum BH non sit $= q$, sed $q - q^2\varphi - \alpha$, etiam in valore BI discrimen esse debet, idque duplice ex causa: imprimis, quia in $\frac{1}{b} - \frac{1}{q}$ non q, sed $q - q^2\varphi - \alpha$ poni debuit, uti etiam $\frac{m^2 l^2}{q} \times \frac{1}{2} e^2$ valoris π; dein quia mutato BH (cujus loco q acceptum fuit) in $q - q^2\varphi - \alpha$, etiam BI decrescere debet per ea, quæ N. 5 dicta sunt.

Et discrimen quidem ex prima causa inductum, tuto contemni potest, quippe efficiente e^2 fractionem perexiguam, cujus valor sensibiliter non mutatur tantillo aucto denominatore. Verum quod ex altero capite oritur, ita corrigi poterit juxta N. 5, ut a BI hactenus determinato auferatur differentia ipsius BH ducta in $\frac{m \times BI^2}{BH^2}$, vel proxime in $\frac{mr^2}{q^2}$, id est, $mr^2\varphi - \frac{mr^2\alpha}{q^2}$. Quapropter obtinetur distantia quæsita BI $= r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2 (m\varphi + \pi)$, in qua expressione est r focus radiorum axi infinite propinquorum neglecta lentis crassitie; $\frac{r^2 m\alpha}{q^2}$ correctio debita crassitiei vitri; & $r^2 (m\varphi + \pi)$ correctio aperturæ e competens.

162. Non est difficile, ex allata formula quantitates k, q, l eliminare, earumque valores per a, b, p, & m exhibere. Est enim

$$k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$$

$$q = \frac{amp}{p(m-1) + a}$$

$$l = \frac{1}{b} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ma} - \frac{1}{mp}$$

$$r = \frac{abp}{p(m-1)(b-a) + ab}$$

Quod

Quod si radii incidant paralleli, evadit $p = \infty$, &

$$k = \frac{1}{a}$$

$$q = \frac{am}{m - 1}$$

$$l = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ma} = \frac{1}{b} - \frac{(m - 1)}{ma}$$

$$r = \frac{ab}{(m - 1)(b - a)}.$$

Dicatur $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, seu $f = \frac{b - a}{ab}$, fiet $l = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{f}$, & $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml = \frac{m - 1}{f} + \frac{1}{p}$.

163. Si in valore de $m\varphi = \frac{(m - 1)}{m}\left(\frac{k^3}{m} - \frac{k^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$ valor de $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, & in $\pi = -\left(\frac{m - 1}{m}\right) \times \left(m^3l^3 - \frac{m^2l^2}{q}\right)\frac{1}{2}e^2$ valor de $l = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{f}$ substituatur, obtinebuntur loco $\frac{k^3}{m} - \frac{k^2}{p}$ quatuor termini, loco $m^3l^3 - \frac{m^2l^2}{q}$ vero decem alii, quorum primi quatuor ob contrarietatem signorum a totidem aliis pertinentibus ad $m\varphi$ elidentur. Porro si reliqui ita colligantur, ut ii censeantur homogenei, in quibus facta ex a, p, f sunt eadem, habebitur valor de $m\varphi + \pi = \frac{m - 1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2 + m}{af^2} + \frac{m + 2}{a^2f} + \frac{3m^2 + m}{pf^2} - \frac{4m + 4}{apf} + \frac{3m + 2}{p^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$. Dicatur brevitatis gratia $m\varphi + \pi = \varrho$, fiet quæsita distantia $BI = r - \frac{r^2m\alpha}{q^2} - r^2\varrho$.

164. Locum hic habet eadem animadversio, quam N. 5 fecimus; scilicet ob exilitatem correctionis $m\varphi + \pi$, posse r censeri idem cum BI, ideoque $d.\frac{1}{r} = d.\left(\frac{(m - 1)}{f} + \frac{1}{p}\right)$, seu $\frac{-dr}{r^2} = \frac{-dp}{p^2}$, quia $\frac{m - 1}{f}$ est quantitas constans, ac $dr : dp = r^2 : p^2$, hoc est, mutationem in distantia quæsita BI esse ad mutationem in distantia BH, proxime ut BI^2 ad BH^2.

165. Problema III. Si radii in prima lente superficiebus AM, BN terminata (fig. 80 Tab. IX) refringantur ad I, & interponatur lens alia, cujus superficies sint CO, DP, data ratione sinus anguli inci- Tab. 80. Fig. IX.

dentiæ ad ſinum anguli refractionis, luce ex aere in lentem ingrediente M : 1, & 1 : M, dum e vitro in aerem exit, diſtantia item lentium BC, nec non BI, ac radiis ſphæricitatum ſuperficierum CO, DP, invenire DL, ſeu focum.

Reſolutio. Diſtantia lentium BC ſit $= \beta$, craſſities ſecundæ lentis CD $= \gamma$; radius ſuperficiei CO $= c$, ſuperficiei ſecundæ DP $= d$, focus radiorum axi infinite propinquorum $=$ R, radius aperturæ ſumi poterit $= e$, quod lentes admodum vicinæ ſumi ſoleant. Manifeſtum eſt, e radiis ſuperficierum c, d, ex M, & radio aperturæ e, & data diſtantia CI, eadem prorſus methodo determinari poſſe diſtantiam DL quæſitam, qua ſuperius BI invenimus, ex datis a, b, m, e, & p. Eſt autem BI in præſente caſu $= r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2\varrho$; & ſiquidem foret CI præciſe æqualis cum r, valores Q, R, σ homologi cum q, r, ϱ ex c, d, M, g, r prorſus eruerentur, uti q, r, ϱ ex a, b, m, f, p, & obveniret DL $= \mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}^2 \mathrm{M}\gamma}{\mathrm{Q}^2} - \mathrm{R}^2\sigma$. At enim cum CI deficiat a BI quantitate $\frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2\varrho + \beta$, hæc ipſa in $\frac{\mathrm{DL}^2}{\mathrm{BI}^2}$ (cujus loco $\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$ tuto ſumi poteſt) ducta ſubtrahi debet, ut adeo quæſita diſtantia fiat $\mathrm{DL} = \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 \left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\mathrm{M}\gamma}{\mathrm{Q}^2}\right) - (\varrho + \sigma)$.

166. Liquet, primam partem eſſe focum radiorum axi infinite propinquorum neglecta craſſitie lentium, earumque intervallo CB; ſecundam correctionem utrivis debitam; tertiam denique correctionem competentem aberrationi ex figura ſphærica oriundæ.

167. Exigua attentione adhibita quisque facile videt, ſi adhiberetur lens tertia, darenturque quantitates homologæ cum c, d, M, Q, R, β, γ &c, eadem methodo determinari poſſe focum, ſive diſtantiam puncti interſectionis radiorum ex tertia lente emergentium cum axe producto. Attamen ſi lentium numerus magis augeatur, & foci radiorum axi proximorum parvi ſint, ut correctio tum ratione craſſitiei, tum etiam ratione figuræ facienda non ſit tam exigua reſpectu longitudinis foci, hæc approximatio non amplius adhiberi poterit, ſed calculis magis intricatis opus erit, quamvis pro tribus lentibus ſatis tuta ſit, maxime ſi agatur de vitris objectivis compoſitis pro teleſcopiis, in quibus radii ſphæricitatum ſat magni ſunt.

168. Quoniam tam multiplices denominationes variarum quantitatum in præcedentibus calculis occurentium fecimus, memoriæ cauſa eas modo ſub uno obtutu ponemus.

Radii

Radii quatuor superficierum duarum lentium.......... $a, b; c, d.$
Radius aperturæ.. $e.$
Crassities vitri primi, intervalli utriusque, & crassities lentis secundæ.................................. $\alpha, \beta, \gamma.$
Ratio sinus anguli incidentiæ, & refractionis, dum lux ex aere vitrum ingreditur.................... $m : 1$, & $M : 1.$
Distantia puncti, ad quod tendunt radii in primam lentem incidentes, a prima superficie......................... $p.$
Focorum fractiones quatuor ordine superficierum pro radiis axi infinite propinquis......................... $\frac{1}{q}, \frac{1}{r}; \frac{1}{Q}, \frac{1}{R}.$

Pro majore formularum compendio assumtum est $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b};$ $\frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$

Formulæ

$$\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{M-1}{Mc} + \frac{1}{Mr} = \frac{M-1}{Mr} + \frac{M-1}{Mf} + \frac{1}{Mp}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{1}{r} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}.$$

$$\varrho = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}\right)\tfrac{1}{2}e^2.$$

$$\sigma = \frac{M-1}{M}\left(\frac{M^3}{g^3} - \frac{2M^2+M}{cg^2} + \frac{M+2}{c^2g} + \frac{3M^2+M}{rg^2} - \frac{4M+4}{crg} + \frac{3M+2}{r^2g}\right)\tfrac{1}{2}e^2.$$

Focus primæ lentis tantum $= r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2\varrho.$

Focus communis lentis utriusque $= R - R^2\left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M\gamma}{Q^2}\right) - R^2(\varrho + \sigma).$

Quando radii incidunt paralleli, ob $p = \infty$, omittendi sunt termini per p divisi, & pro $\frac{1}{r}$ ponendum $\frac{m-1}{f}$. Hinc fiet pro casu radiorum parallelorum, ac proxime talium,

$$\sigma = \frac{M-1}{M}\left(\frac{M^3}{g^3} - \frac{2M^2+M}{cg^2} + \frac{M+2}{c^2g} + \frac{(m-1)(3M^2+M)}{fg^2} - \frac{(m-1)(4M+4)}{cfg} + \frac{(m-1)^2(3M+2)}{f^2g}\right)\tfrac{1}{2}e^2.$$

ARTICULUS II.

De Comparatione erroris pendentis a figura ſphærica cum eo, qui e diverſa refrangibilitate radiorum oritur.

169. Art. II. Cap. III. oſtendimus, erroris magnitudinem, qui ex diſcrimine refrangibilitatis radiorum extremorum oritur, eſſe in vitro ordinario fere $\frac{1}{28}$ vel $\frac{1}{27}$ totius longitudinis foci; & ſiquidem nil officeret vitri figura ſphærica, eademque in omni maſſa
Fig. 42. Tab. V. maneret ratio $m:1$, hæc quantitas conſtans maneret, nulloque modo per diverſam lentium aperturam mutaretur. Et quoniam reapſe (fig. 42 Tab. V) BR eſt quantitas exigua reſpectu IR, vel IB, ſi ponatur radiorum mediæ refrangibilitatis focus $= r$, & per dm indicetur diſcrimen refrangibilitatis inter radios rubros & violaceos, ſi differentietur formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$ pro foco radiorum parallele incidentium, fiet $\frac{-dr}{r^2} = \frac{dm}{f}$, vel (neglecto ſigno) $\frac{dr}{r} = \frac{rdm}{f}$. Porro ob $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f}$, fit $\frac{r}{f} = \frac{1}{1-m}$; hinc $\frac{dr}{r} = \frac{dm}{m-1}$.

170. Haud ita res habet cum errore in latitudinem, quem per OC indicavimus, ſeu per radium circelli minimi, per quem radii tranſeunt. Ut OC determinaretur, adhibuimus analogiam AI : OC = IR + IB : BR, ſive $\frac{AI}{2}$: OC $= \frac{IR + IB}{2}$: BR. Quodſi modo ponatur $AI = e$, $\frac{IR+IB}{2} = r$, $BR = dr$, hæc mutatur in $\frac{1}{2}e : OC = r : dr = m-1 : dm$, & obtinetur $OC = \frac{dm}{m-1} \times \frac{1}{2}e$. Evidens igitur eſt, errorem ex diverſa refrangibilitate, qua latitudinem foci afficit, ob $\frac{dm}{2(m-1)}$ conſtantem in eadem lente, mutari in ratione radii aperturæ.

171. E ſuperiore Articulo conſtat, errorem e figura ſphærica provenientem, ſi unica lens adhibeatur, eſſe $r^2\varrho$, in qua expreſſione ϱ conſtat terminis compoſitis e meris conſtantibus m, f, a, ductis in $\frac{1}{2}e^2$, denotante e rurſus radium aperturæ. Si modo omnes conſtantes repræſententur per 2δ, hæc aberratio redigetur ad $r^2\delta e^2$. Ut porro ſemidiameter circelli OC (fig. 81 Tab. IX), ſive latitudo erroris proxime de-
Fig. 81. Tab. IX. finiatur, conſideretur ramus cauſticæ D'CI prope ipſam cuſpidem I tanquam

tanquam originem, & examinetur, quanam cum notiore curva illic congruat. Patet, fore DB tangentem, quæ producta occurrit in C ramo alteri, cui puncto C competit ordinata OC. Sit IE $= z$, ED $= y$, erit fubtangens EB $= \frac{ydz}{dy}$; AF radius aperturæ $= e$. Ob BI refpectu AI vel AB partem contemnendæ magnitudinis eft AF: AB (vel AI) = DE: EB; feu $e : r = y : \frac{ry}{e}$. Igitur $\frac{ydz}{dy} = \frac{ry}{e}$ & $dz = \frac{rdy}{e}$ Eft autem EI = EB + BI, five $z = \frac{ry}{e} + r^2\delta e^2$, & $dz = \frac{rdy}{e} - \frac{ryde}{e^2} + 2r^2\delta ede$, & hinc $\frac{rdy}{e} = \frac{rdy}{e} - \frac{ryde}{e^2} + 2r^2\delta ede$, aut $2r^2\delta ede = \frac{ryde}{e^2}$, vel $2r^2\delta e^3 = ry$, vel $2r\delta e^3 = y$. Unde $dy = 6r\delta e^2 de$, qui valor fubftitutus in æquatione $dz = \frac{rdy}{e}$, dat $dz = 6r^2\delta ede$, cujus integrali $z = 3r^2\delta e^2$ nihil addendum, quod z, & e fimul evanefcant.

172. Ex valore $y = 2r\delta e^3$, ob conftantes $2r\delta$, patet crefcere y^2 ut e^6; & valor $z = 3r^2\delta e^2$ oftendit itidem, crefcere z^3 ut e^6, ideoque crefcere debere y^2 ut z^3, hoc eft, curvam proxime ad verticem accedere ultra quosvis limites ad parabolam gradus tertii, cum fit y ut $z^{\frac{3}{2}}$. In valore EB $= \frac{ry}{e}$ fubftituatur $y = 2r\delta e^3$; fietque $2r^2\delta e^2$. Et quoniam habuimus EI $= z = 3r^2\delta e^2$, erit EI: EB = 3 : 2. Ut obtineatur IO abfciffa, cui refpondet ordinata OC, efto ejus coefficiens $= h$, & IO $= hz$, erit BE $= \frac{2}{3} z$, BO $= (\frac{1}{3} - h) z$. Ob triangula EDB, BOC fimilia, eft BO²: BE² = OC²: ED²; & ex natura curvæ eft OC²: ED² = IO³: EI³; hinc BO²: BE² = IO³: IE³, feu $\frac{1}{9} z^2 - \frac{2}{3} hz^2 + h^2 z^2 : \frac{4}{9} z^2 = h^3 z^3 : z^3$; prima ratione per z^2, fecunda per z^3 divifa, $\frac{1}{9} - \frac{2}{3} h + h^2 : \frac{4}{9} = h^3 : 1$, mult. med. & extrem. $\frac{4}{9} h^3 = h^2 - \frac{2}{3} h + \frac{1}{9}$; facta reductione $h^3 - \frac{9}{4} h^2 + \frac{3}{2} h - \frac{1}{4} = 0$. Pofita $h = 1$, obtinetur $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$. Divifa æquatione cubica per $h - 1 = 0$, fit quadratica $h^2 - \frac{5}{4} h + \frac{1}{4} = 0$, quæ præbet duas radices reales $h - 1 = 0$, & $h - \frac{1}{4} = 0$. Sunt igitur binæ radices æquales, ideoque ad punctum contactus in D vel D′ pertinent; tertia quæfita IO $= \frac{1}{4}$ IE indicat interfectionem in C.

Cum fit IB $= r^2\delta e^2$, erit IE $= 3r^2\delta e^2$, ideoque BO $= \frac{1}{12}$ IE $= \frac{1}{4} r^2\delta e^2$, & AB (r): BO $(\frac{1}{4} r^2\delta e^2)$ = AF (e): OC $= \frac{1}{4} r\delta e^3$. Hæc quantitas ob $\varrho = \delta e^2$, erit etiam $= \frac{1}{4} r\varrho e$.

 173.

173. Intelligimus ex his, errorem ex refrangibilitatis discrimine mutata apertura, mutari in ratione e (fuit enim ut $\frac{dm}{m-1} \times \frac{1}{2} e$ (15)); errorem vero ex sphærica figura in ratione triplicata ejusdem e, quippe cum habuerimus eundem $\frac{1}{4} r\delta e^3$.

Pro vitro objectivo telescopii plano-convexo, formulam erroris circularis hunc in modum Newtonus Opt. l. 1 part. 1 exper. 8 proponit: *Si vitrum objectivum telescopii sit plano-convexum, & plana ipsius facies ad rem objectam obvertatur, diameter autem sphæræ, cujus id vitrum segmentum sit, appelletur* D; *item semidiameter aperturæ vitri vocetur* S, *& sinus incidentiæ e vitro in aerem sit ad sinum refractionis, ut* I *ad* R; *radii, qui incidunt paralleli ad axem vitri, diffusi erunt in eo loco, ubi objecti imago distinctissima exhibetur, in parvum circellum, cujus diameter erit* $\frac{R^2}{I^2} \times \frac{S^3}{D^2}$. Hæc ex nostra citra negotium deducitur. Nam in casu, quem expendit Newtonus, in valore ϱ (N. 8) fit $p = \infty$, $a = \infty$, & tota formula signis parentheseos inclusa reducitur ad primum terminum, in quo ipso $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ abit in $\frac{1}{b}$ mutato signo secundæ superficiei, cujus radius b. Hinc fit $\frac{1}{4} r\varrho e = r \times \frac{m-1}{8} \times \frac{m^2}{b^3} \times e^3$; vel ob $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} = \frac{m-1}{b}$, ideoque $r(m-1) = b$, $\frac{1}{4} r\varrho e = \frac{m^2 e^3}{8b^2}$, cujus duplum $\frac{m^2 e^3}{4b^2}$, exhibet diametrum eandem: est enim nobis m idem, quod Newtono $\frac{I}{R}$, & $2b$ idem cum illius D. Apparet igitur, errorem circularem e figura sphærica oriundum apud Newtonum rite determinatum esse.

174. Quod si idem demus contigisse errori ex diversa refrangibilitate pendenti (quem superius Cap. III. Art. II. cum Newtono definivimus, nempe ut sit radius circelli errorem exhibentis ad radium aperturæ, ut 1 ad 55, pro vulgari vitro), facilis jam erit horum errorum inter se comparatio. Erit quippe hic ad eum, quem inducit sphærica figura, ut $\frac{dm}{m-1} \times \frac{1}{2} e$ ad $\frac{1}{4} r\varrho e$, seu ut $\frac{dm}{m-1}$ ad $\frac{1}{2} r\varrho$, sive (uti diximus) $\frac{dm}{m-1}$ ad $\frac{m^2 e^2}{4b^2}$. Est autem $\frac{dm}{m-1} = \frac{2}{55}$, $m = \frac{31}{20}$, $\frac{e}{2b} = \frac{1}{300}$ (fuit namque in experim. cit. Newtono $2b = 100$ ped. diameter aperturæ 4 digitorum, adeoque $e = \frac{1}{6}$ ped.); his ita habentibus ratio quæsita evadit $\frac{2}{55}$ ad $\frac{1 \times 31 \times 31}{360000 \times 400}$, sive $\frac{28000000}{55 \times 31 \times 31} =$ 5449 ad 1.

175. Illud hoc loco animadverſione dignum, rationem hanc in particulari caſu Newtoni omnino ita magnam eſſe, ut error figuræ tribuendus omnino negligi poſſe videatur reſpectu alterius, quem refractio diverſa gignit. At enim eſt $e = \frac{1}{6}$, reſpectu $2b = 100$ exigua; quodſi e paullo major evaderet, obveniret ratio multo minor. Ponamus enim eſſe $e = \frac{3}{12}$ ſeu $= \frac{1}{4}$ ped., fiet ratio $\frac{2}{55} : \frac{1}{160000} \times \frac{961}{400}$, ſive paullo minor, quam $2422 : 1$, quæ jam multum deficit ab illa, quæ obtingit poſita $e = \frac{1}{6}$. Unde cum tubi achromatici multo breviores ſint, quam focus vitri objectivi, quod Newtonus adhibuit, & nihilominus magnas poſcant aperturas, videndum erit, ut, quantum licet, uterque error corrigatur.

ARTICULUS III.

De emendatione errorum adhuc expoſitorum.

176. Triplicis erroris in foci dioptrici longitudine adhuc mentionem fecimus. Primus pendet e craſſitie vitrorum, eorundemque a ſe ſe intervallo. Et quoniam nil aliud incommodi ex eo naſcitur, niſi quod objecti imaginem tantillo vitro objectivo propiorem reddat, facile tolerari poteſt. Alter error e diverſa refrangibilitate originem habet, eumque, quem tertio figura ſphærica inducit, multum ſuperat. Secundum hunc errorem per unicum vitrum tolli non poſſe, manifeſtum eſt. Etenim ſi conſideretur fractio foci (N. 168) $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, evidens eſt, ſubſtituta pro m quantitate $m + dm$ (quæ competit aliis radiis extremis) debere differentiam inter $\frac{m + dm - 1}{f} + \frac{1}{p}$, & $\frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ evaneſcere, ſi error corrigi poſſit, ideoque $\frac{dm}{f}$ fieri $= o$, aut quia $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $dm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = o$; id ſi ponatur, fit quoque $dm\,(b-a) = o$, quod fieri nequit, cum dm non evaneſcat, niſi ſit $a = b$, id eſt, niſi ſuperficies ſint concentricæ, quo caſu focus nullus habetur, ut diximus Cap. I. Art. I. N. 7 V°.

177.

177. At si duplex adhibeatur vitrum e diversis massis elaboratum, ut ratio M : 1, & m : 1 diversa sit, error refrangibilitatis tolli potest, modo certæ adsint conditiones, quas e formula $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ facile eruemus. Rursus enim pro M & m substitutis M + dM, & $m + dm$, & posita differentia æquali nihilo, obtinetur $\frac{dM}{g} = -\frac{dm}{f}$. Si modo ponamus adhiberi lentes isosceles, ut in $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ sit $b = -a$, & in $\frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$, sit $d = -c$, fiet $\frac{1}{g} = \frac{2}{c}$, & $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, adeoque habebitur $\frac{dM}{c} = \frac{-dm}{a}$, ac $a : c = dm : d$M, hoc est, *errorem ex refrangibilitate tolli, si adhibitis lentibus isosceliis earum radii sphæricitatum sint in ratione dispersionis colorum, ita tamen, ut altera lentium sit convexa, cava altera.*

Æquatio $\frac{dM}{g} + \frac{dm}{f} = o$ præbet $\frac{1}{g} = -\frac{dm}{dM} \times \frac{1}{f}$, hic valor in $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$ adhibeatur; fiet fractio foci $\frac{1}{R} = -\frac{(M-1)dm}{fdM} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{dm}{f}\left(\frac{m-1}{dm} - \frac{M-1}{dM}\right) + \frac{1}{p}$. Evidens est, si fuerit $\frac{m-1}{dm} = \frac{M-1}{dM}$, evanescere primum terminum æquationis, & manere $\frac{1}{R} = \frac{1}{p}$, ideoque fieri non posse, ut tollatur error, nisi sublata tota refractione. Existimaverat Newtonus, in omni genere vitri esse discrimen hoc in ratione ipsius refractionis, quod si reapse foret, nihil subsidii in diversis vitrorum massis foret Dioptricæ. At enim Dollandus resumptis experimentis deprehendit, refractionem in *Flintglass* parum admodum discrepare ab ea, quæ habetur in *Crownglass*, cum tamen distractio colorum in illo (sive dM), sit ad distractionem in hoc (id est ad dm) proxime ut 3 ad 2.

178. Quod ad tertium errorem, quam figura sphærica gignit, pertinet, quæri imprimis potest, utrum is per unicam lentem tolli possit, siquidem ei competentes sphæricitatum radii tribuantur. Si res successum habere possit, evidens est, debere quantitatem ϱ (13) evanescere. At enim id fieri nequit propterea, quod vel $m - 1$, vel e fiat $= o$. In primo enim casu nulla foret refractio; in altero nulla apertura. Ut igitur evanescat ϱ, necesse est, ut quantitates omnes

signis

ſignis parentheſis incluſæ ſe ſe mutuo tollant. Ut porro determinatio facilior reddatur, ſit $\frac{n}{f} = \frac{1}{p}$ (id, quod ponere licet), dividanturque omnia per $\frac{1}{f}$; habebitur $\frac{m^3}{f^2} - \frac{2m^2 + m}{af} + \frac{m + 2}{a^2} + \frac{(3m^2 + m)n}{f^2} - \frac{(4m + 3)n}{af} + \frac{(3m + 2)n^2}{f^2} = o$, & $f^2 - \frac{(2m^2 + m + 4mn + 4n)af}{m + 2} + \frac{(m^2 + 3m^2n + mn + 3mn^2 + 2n^2)a^2}{m + 2} = o$. Eruitur hinc $f = \frac{a(2m^2 + m + 4mn + 4n \pm \sqrt{(-4m^3 + m^2 + 4m^3n - 4m^2n + 4m^2n^2)}}{2m + 4}$, adeoque habetur ratio de f ad a, & conſequenter etiam de a ad b, cum ſit $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. At enim apparet illico, non poſſe hunc errorem tolli, ſi radii incidant paralleli, quippe cum tunc ſit $p = \infty$, & $\frac{1}{p} = \frac{n}{f}$, atque f quantitas finita, æquationi locus non eſt, niſi ſumatur $n = o$, in qua hypotheſi evaneſcunt omnes termini affecti n, habeturque $f = \frac{a(2m^2 + m \pm \sqrt{-4m^3 + m^2})}{2m + 4}$. Et quia m debet eſſe major unitate, erit $m^3 > m^2$, & multo magis $4m^3 > m^2$, conſequenter radicale fit imaginarium.

179. Si p ſit quantitas finita, ut valor de f ſit realis, oportet, ut termini poſitivi ſub ſigno radicali ſint majores negativis, hoc eſt, ut ſit $m^2 + 4m^3n + 4m^2n^2 > 4m^3 + 4m^2n$, aut omnibus per $4m^2$ diviſis, $\frac{1}{4} + mn + n^2 > m + n$, ſeu $\frac{1}{4} + n(m - 1) + n^2 > m$; $n^2 + n(m - 1) > m - \frac{1}{4}$ completoque quadrato $n^2 + n(m - 1) + \frac{m^2 - 2m + 1}{4} > \frac{m^2 + 2m}{4}$, adeoque & $n + \frac{m - 1}{2} > \pm \frac{\sqrt{m^2 + 2m}}{2}$ ſeu $n > \frac{-m + 1 \pm \sqrt{m^2 + 2m}}{2}$. Si ſtatuatur cum Newtono $m = \frac{31}{20}$, obtinetur $\frac{-m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m}}{2}$ fere $0{,}897$; & $\frac{-m + 1 - \sqrt{m^2 + 2m}}{2} = -1{,}425$. Itaque ſi fuerit (fig. 82 Tab. IX) $AF = f$, & accipiatur $AM = \frac{f}{0{,}897}$, radiique convergant (vitro in A collocato) ad punctum intra A & M poſitum, error figuræ tolletur, quod radicale non ma-

maneat imaginarium; eodem modo facta Am negativa $= -\frac{f}{1,425}$ (in figura enim 3 Tab. IX p positivum exigit situm AG), ex nullo intra m & A puncto divergentibus radiis obtingit radicale imaginarium, & error figuræ tollitur. Porro ipsa puncta M & m sunt quidam limites, definientes loca extima, ex quibus, vel ad quæ si divergant aut convergant radii, radicale evanescit. Ceterum satis liquet, cum hi limites sint tam vicini puncto A, sive vitro, non posse tum haberi focum positivum, sive realem, in quo imago objecti depingatur.

Ratio hujus facile perspicitur. Nam ex positione $\frac{n}{f} = \frac{1}{p}$ fit $p = \frac{f}{n}$, ideoque quando m majus est quam $\frac{-m+1 \pm \sqrt{m^2 + 2m}}{2}$, distantia puncti convergentiæ, vel divergentiæ a vitro minuitur, & limites, intra quos radicale habet valorem realem, sunt AM, & Am.

180. Etsi vero in casu radiorum parallele incidentium (quo diximus fieri $n = o$) lens nulla haberi possit, in quo error ex sphæricitate oriundus corrigatur; quæri tamen potest ratio radiorum sphæricitatis a & b, ut idem error sit minimus. Nam satis est in æquatione $\frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$ ponere a variabilem, & differentiam $= o$; fiet autem $\frac{(2m^2+m)\,da}{a^2f^2} - \frac{(2m+4)\,da}{a^3f} = o$, e quo eruitur $f = \frac{(2m^2+m)a}{2m+4}$; & quia $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2m+4}{(2m^2+m)a}$, fit $\frac{1}{b} = \frac{2m^2-m-4}{(2m^2+m)a}$, & $b = \frac{(2m^2+m)a}{2m^2-m-4}$; & si iterum ponamus $m = \frac{31}{20}$, sumamusque $a = 1$, erit $b = -8,53$ proxime. Signum − denotat situm contrarium radii b illi, quem habuit in constructione formulæ ϱ, adeoque lens debet esse utrinque convexa, & superficies, cujus radius est $= a$, obverti lumini incidenti.

181. Multo magis tollendo duplici errori, & qui ex refractionis differentia, & qui ex figura vitrorum nascitur, accommodata est duplex lens, si in formula (168) ponatur $\varrho + \sigma = o$. Equidem facile apparet, quantitates f, g, a, c, vel a, b, c, d in præsente problemate varios in usus indeterminatas relinqui posse. Et cum usus hujus theoriæ potissimum telescopia spectet, formulas quoque simpliciores, in quibus $p = \infty$, adeoque termini per p divisi evanescunt, adhibebimus. Imprimis quidem ad corrigendum refractionis discrimen loco $\frac{1}{g}$ ejus valorem $= \frac{dm}{dM} \times \frac{1}{f}$ (177) in σ substituemus, posita item

$f = 1$,

$f = 1$, ut formulæ magis contrahantur; præterea singulas parenthesi inclusas partes per communem denominatorem m & M, & utrasque simul per $(M-1)^{\frac{1}{2}} e^2$ dividemus; fietque $\frac{1}{g} = -\frac{dm}{dM}$, & æquatio

$$\frac{m-1}{M-1}\left(m^2 - \frac{2m+1}{a} + \frac{1+\frac{2}{m}}{a^2}\right) - \frac{dm^2}{dM^2} \times M^2 - \frac{dm^2}{dM^2} \times \frac{2M+1}{c}$$

$$-\frac{dm}{dM} \times \frac{1+\frac{2}{M}}{c^2} + \frac{dm^2}{dM^2} \times (m-1)(3M+1) + \frac{dm}{dM} \times$$

$$\frac{(m-1)\left(4+\frac{4}{M}\right)}{c} - \frac{dm}{M} \times (m-1)^2 \left(3+\frac{2}{M}\right) = o.$$ Est hæc formula calculis numericis perquam commoda; & siquidem omnia rite ordinentur, obtinetur terminus affectus quantitate $\frac{1}{a^2}$, duo termini continentes $\frac{1}{a}$; unus item, in quo sit $\frac{1}{c^2}$, & duo alii cum $\frac{1}{c}$, reliqui quantitatibus datis constabunt.

182. Opus igitur tantummodo est, ut pro $\frac{dm}{dM}$ substituantur numeri exprimentes rationem distractionis colorum in utroque vitri genere; pro m, & M item illi, qui respondent refractioni certæ radiorum speciei, uti mediæ. Dabitur tum æquatio indeterminata ad a, & c; alterutra harum assumpta, v. g. c, ad arbitrium, æquatio determinata pro a habebitur, & quidem secundi gradus. At si pro m, & M semel substituantur valores refractionis radiorum extremorum, uti rubrorum; semel vero illi, qui pertinent ad refractionem violaceorum, duplex æquatio secundi gradus habebitur, ex quibus alterutra a vel c eliminata, devenitur ad unicam æquationem gradus quarti, in qua aut a sola, aut sola c supererit.

183 Quamvis autem hac ratione errores expositi per duplex vitrum si non penitus tollantur, attamen multum minuantur, cogitandum tamen est, ad construendos tubos opticos adhibendas etiam esse lentes oculares, quæ si non etiam ipsæ compositæ sint e diversis vitris, iterum errorem per lentes objectivas correctum reddunt aliquantum sensibilem, non secus, ac si ex eodem puncto egressi radii vitro exciperentur, qui ob diversam indolem diversos focos efformant, uti ex iis abunde perspicitur, quæ de constructione tuborum vulgo usitatorum attulimus. Duplex huic malo est remedium; imprimis ipsa compositio lentium ocularium e duplice vitri genere; dein si id efficiatur,

ut radii rubri per objectivas lentes transmissi citius colligantur in focum, quam violacei, & quidem eo intervallo, quod respondet errori in longitudinem, qui per lentem ocularem induceretur.

Quod primo loco adduximus, operosius est, quam ut in usu locum habeat. Alterum satis fuerit uni lenti oculari applicari. Quæratur, quodnam discrimen focorum foret radiis parallele in lentem ocularem incurrentibus (quæ res difficultate caret); dicatur id y; & si fractio foci illius fuerit $\frac{1}{r}$, habebitur (176) $-\frac{dr}{rr} = \frac{dm}{f}$, sive $dr = -\frac{rrdm}{f}$. Dein (177) cum sit $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{g}$, & $-\frac{dR}{RR} = \frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}$, & $dR = -RR\left(\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}\right)$, oportet, ut sit $RR \times \left(\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g}\right) = -y$, sive $\frac{dm}{f} + \frac{dM}{g} = -y\left(\frac{m-1}{f} + \frac{M-1}{f}\right)$, ubi ope æquationis secundi gradus obtinetur g per f datis m, M, dm, dM, & y. Etsi vero de unica lente hic mentionem fecerimus, facile tamen erit, y pro quotcunque lentium ocularium systemate determinare, si animo repetantur, quæ inde a N. 91 diximus. Cum nulla alia re opus sit, quam ut m pro extremis radiis substituatur.

184. Opportune manet hoc loco clariss. *Boscovichius*, cum error ex figura sphærica oriundus tanto minor sit eo, quem diversa refrangibilitas parit, vix operæ pretium eum facturum, qui laborem æquationis quarti gradus resolvendæ in se suscipiat (de qua N. 182 diximus). Satis fuerit errorem figuræ corrigere pro radiis mediis, & reservare determinationem valoris c per a ad alios usus, qui scilicet exhibeant systema quatuor superficierum, & lentium constructionem magis idoneam, in qua illud caveatur necesse est, ne quis radius sphæricitatis justo minor obtingat, utpote cum is obesset, ne apertura major relinqui posset.

Porro complures sunt arbitrariæ positiones, per quas vel b, vel a, vel c, vel d definitur, uti si prima, vel tertia superficies plana sumatur, evanescunt omnes termini per a, vel c divisi. Si secunda sit plana, ob $\frac{1}{b} = o$, erit $\frac{1}{a} = \frac{1}{f} = 1$; si denique quarta superficies plana petatur, habetur $\frac{1}{d} = o$, $\frac{1}{c} = \frac{1}{g} = -\frac{dm}{dM}$. Si prima lens sit data, habebitur a, & b in numeris, quorum quidem unitas diversa est ab f (quam assumpsimus), attamen facile ad eam reducitur, uti tironibus Arithmetices notum est. Idem fere est, si detur lens secunda. In utroque hoc posteriore casu æquatio continebit vel a, vel c tantum

tum determinandum. Si lens prima sit isoscelia, fit $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b}$, & $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{a} = 1$, adeoque $a = 2$; si vero altera talis esse debeat, erit pariter $\frac{2}{c} = \frac{-dm}{dM}$ valoris dati.

185. Præ ceteris attentionem videtur mereri hypothesis, in qua secunda & tertia superficies sit æqualis radii sphæricitatis, ut binæ lentes unius instar arcte conjungi possint. Hoc posito est $b = c$; & quoniam $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = 1$; erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{c}$. Hic valor in formula N. 183 adhibitus, pro singulis terminis continentibus $\frac{1}{c}$ suppeditat duos, pro eo autem, in quo est $\frac{1}{c^2}$, tres, ut adeo universe obtineantur tredecim, e quibus duo affecti sunt $\frac{1}{a^2}$, quatuor $\frac{1}{a}$, septem denique ab a liberi. Facta reductione terminorum homologorum, evidens est, obtineri æquationem gradus secundi.

Ex hac æquatione invento valore a, ceteri citra difficultatem eruuntur. Quippe erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{c}$; tum $\frac{1}{d} = -\frac{1}{c} - \frac{dm}{dM}$; demum $\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} = -\frac{dm}{dM}(M-1) + (m-1)$, juxta N. 177, modo ponatur $\frac{1}{p} = o$.

186. Correctio errorum, quos adhuc consideravimus, accurata satis haberi posset per binas vitrorum species, siquidem verum foret, quod dispersio colorum tota in uno vitri genere sit ad dispersionem totam in altero, sicut dispersio cujuslibet coloris in particulari, v. g. rubri in primo ad dispersionem rubri in secundo vitro. Id enim si esset, correcto quovis binario colorum per lentem objectivam compositam e duplice ejusmodi materia, quodlibet alterum binarium æque corrigeretur, & omnes heterogenei radii in foco lentis objectivæ unirentur. Verum rem aliter habere jam suspicatus erat *Clairautius*, & ope sui *vitrometri* ostendit Cl. *Boscovichius* saltem in pluribus materiis. Intelligit autem per vitrometrum machinulam, quæ in re prisma exhibet angulo ad arbitrium mutabili instructum, cui infusa aqua alia præterea prismata vitrea ita inseri possunt, ut oppositis eorum angulis refractio omnis tolli, minui, augeri possit, prout aquei prismatis angulus minuitur, augeturve. Variis prismatis hunc in modum examini

ſubjectis, deprehendit, nunquam omnes colores perfecte uniri, ſed ſemper aliquid coloris ſupereſſe tam ante ſpectri inverſionem, quam in ipſa, ac poſtquam jam colorum ordo mutatus eſt. (Vide ejus Diſſertat. II. dioptricam, Actis Inſtit. Bonon. inſertam, quæ etiam recuſa eſt Viennæ apud Nob. de Trattner 1767 de unione colorum aliorum poſt alios per binas ſubſtantias &c).

187. Ut adeo accuratior colorum unio obtineatur, non modo *Boſcovichius* tres diverſas adhibendas eſſe ſubſtantias ſuadet, ut ex iis lens objectiva componatur, verum etiam calculum ſuppeditat in Prima Diſſert. Dioptrica pro radiis ſphæricitatum, ſi inter bina vitra aquam interponere lubeat. Angli autem artifices jam tres objectivas lentes adhibent. Sed quoniam Theoria ſatis ex iis clare perſpicitur, quæ de duabus diximus, neque nos hoc in argumento diutius morari fas eſt, ad Catoptricam gradum facimus, tironibusque authores eſſe cupimus, ut, ubi vacaverit, *Euleri* Dioptricam, omnesque hoc in genere diſſertationes *Boſcovichianas* pervolvant diligenter.

INDEX

INDEX CAPITUM
ET
ARTICULORUM.

Pag.

CAPUT I. 3

ARTICULUS I. De refractione in lente radiorum lucis axi infinite propinquorum. 3

ARTICULUS II. De punctis extra axem sitis, & præcisione imaginum. 13

ARTICULUS III. De objectis visis per unicam lentem. 20

ARTICULUS IV. De constructione graphica formulæ $x = \frac{df}{d - f}$. 25

CAPUT II. 28

ARTICULUS I. De invenienda refractione media, & discrimine refractionis radiorum extremorum. 28

ARTICULUS II, De inveniendis radiis spæricitatis lentium. 36

ARTICULUS III. De centrandis lentibus, & exploranda earum figura sphærica. 42

CAPUT III. 45

ARTICULUS I. De magis usitatis Telescopiorum dioptricorum speciebus. 45

ARTICULUS II. Animadversiones generales de Telescopiis dioptricis. 55

ARTICULUS III. De determinatione valoris partium micrometri filaris. 64

ARTICULUS IV. De micrometro objectivo. 71

ARTICULUS V. De Microscopiis dioptricis. 74

ARTICULUS VI. De nonnullis aliis machinis dioptricis. 77

CAPUT IV. 81

ARTICULUS UNICUS. Resolvuntur nonnulla problemata. 81

CAPUT V. 97

De emendatione dioptrices. 97

Exponitur Argumentum. 97

ARTICULUS I. De erroribus focorum pendentibus a figura spærica.

AVTICULUS II. De comparatione erroris pendentis a figura sphærica cum eo, qui e diversa refrangibilitate radiorum oritur. 108

ARTICULUS III. De emendatione errorum adhuc expositorum. 111

Errata.

Errata.

Pag.	lin.	Errata	Corrige
3	15	connexa	convexa
4	antepenul.	MAB	MAN
5	7	hujus	ſinus
9	13	$\frac{2}{R+r}$	$\frac{R+r}{2}$
—	14	*In* denominatore loco $\frac{-nRr}{R+r}$ lege $\frac{-2nRr}{R+r}$	
22	21	DE	OE
29	19	irrefractum in N	irrefractum IN
30	2	egreſſu	ingreſſu
32	31	circumſtantiis	circumſtantias
36	2	hac	huic
40	1	focornm	focorum
41	20	diſtantia	diſtantis
43	3	poſſint	poſſit
48	35	*nc*	*n*C
64	2	oppoſita MAN	oppoſita MBN
65	34	MN	NO
67	23	MN	NO
—	24	BFE	BFD
68	21	centrum	centum
—	25	117″,46 proxime, ſeu 1′57″,48	166″,28 proxime, ſeu 2′46″,28
73	15	cnmpetente	competente
74	33	libro	libero
76	5 *a fine*	tengere	tangere
81	9	O	*h*
—	10	*h*	O
82	1	FOI	FIO
—	27	$\frac{ay}{y+a}$	$\frac{ax}{y+a}$
83	3	*in denominatore loco* $(x+a)bm$ *lege*	$(y+a)bm$
—	5	*Adde* $=\frac{abmy\sqrt{y^2+2ay+r^2}}{(a+y)(bmy-any-a^2n)}$, ſubſtituto pro x ejus valore $\sqrt{LM^2+MC^2}=\sqrt{(y+a)^2+r^2-a^2}$.	
94	4	BPS	DPS
100	24	MCH	CMH
—	25	MCG	CMG

INSTITUTIONUM OPTICARUM PARS III

SIVE

CATOPTRICA,

DE

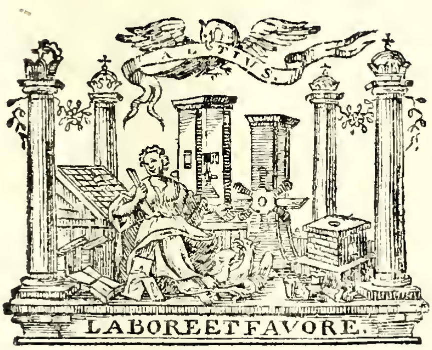
VISIONE PER RADIOS REFLEXOS;

CONSCRIPTA IN USUM TIRONUM

A

CAROLO SCHERFFER

PRESBYTERO, PHILOS. DOCT. ET MATHES. SUBLIM. PROF. CÆS. REG.



VINDOBONÆ,

TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

MDCCLXXV.

INSTITUTIONUM
OPTICARUM
PARS TERTIA,
SIVE
CATOPTRICA
DE
VISIONE PER RADIOS REFLEXOS.

Explicat *Catoptrica*, quæ ad viſionem per radios reflexos pertinent. Quando Parte I Cap. I Artic. V de reflexione, & corporibus ſpecularibus egimus, non modo conſtantem experientiam de æqualitate angulorum incidentiæ, & reflexionis adduximus, verum etiam admiſſis viribus ſeu repellentibus, ſeu minus attrahentibus, qua ratione id contingere & poſſit, & debeat, ſatis luculente oſtendimus. In præſente igitur argumento idem nobis dari omnino poſtulamus. Quoniam autem inſtrumenta catoptrica, quibus tantopere brevitati, & debilitati viſus noſtri conſulitur, potiſſimum ſpeculis ſphæricis conſtant, de his præ ceteris agendum nobis erit, quamvis nec alia ſilentio præteribimus, quantum & præfixa brevitas ſinet, & utilitas poſcet.

CAPUT I.

ARTICULUS I.

DE
FOCIS SPECULORUM SPHÆRICORUM, ET IMAGINIBUS IN IIS EFFORMATIS.

I.

Problema I. Invenire formulam foci, ſi radii ex objecti puncto propagati incidant axi ſpeculi infinite propinqui in ſpeculum ſphæricum.

Reſolutio. Poſita æqualitate anguli incidentiæ & reflexionis, ſolutio ex Dioptrica facile derivatur, modo cogitetur eſſe (Diopt. Cap. I. Art. I. N. 4) $m = n = 1$, atque ob reditum radii in plagam oppoſitam illi, ex qua propagatur, ſumendum eſſe -1. Itaque opus tantummodo eſt, ut figura 1 Tab. I. Diopt. paucis mutatis transformetur in eam, quam Tab. I. Catopt. 1 & 2 exhibet. Sit MAN ſuperficies ſphærici ſpeculi; O objecti punctum, ex quo radii incidunt, Fig. 1 & 2. Tab. I. quod connectatur cum centro ſpeculi K, erit OA axis ſpeculi, I punctum incidentiæ ſumatur ad A infinite propinquum, atque ducatur ad illud radius ſpeculi KI*k*; erit *k*IO (fig. 1), vel KIO (fig. 2) angulus incidentiæ, & ſi fiat *hIk*, vel HIK illi æqualis, erit I*h*, vel IH radius reflexus, & punctum F, in quo axem ſpeculi ſecat, focus, ejusque a ſpeculo diſtantia AF. Producatur in fig. 1 tam radius incidens OI,

quam reflexus hI ultra ſpeculum; erit etiam GIK angulus incidentiæ æqualis cum KIH, adeoque ſi KG ad IG, & KH ad IH ſint perpendiculares, erit KG = KH.

Ex his patet, quod in formula Dioptrica foci ex refractione in unica ſuperficie (Diopt. N. 4) $\frac{dmr}{d(m-n)-nr} = z$ (ubi r eſt radius ſphæricitatis, d diſtantia objecti a ſpeculo, $\frac{m}{n}$ ratio ſinus incidentiæ, & refractionis), quod, inquam, in hac formula tantummodo -1 pro n, & $+1$ pro m ſubſtituendum ſit, fietque $\frac{dr}{d(1+1)+r} = \frac{dr}{2d+r}$ pro figura 1 exhibente ſpeculum convexum.

In figura 2, quæ ſpeculum cavum repræſentat, radius ſphæricitatis ſitum habet contrarium; & cum in priori ei ſignum + tributum ſit, nunc − adhibendum erit; fietque loco $\frac{dr}{2d+r} = z$, $\frac{-dr}{2d-r} = z$. Attendendum autem, in figura prima focum AF = z eſſe virtualem, & poſt ſpeculum; in altera vero realem & ante ſpeculum; idque indicatur per diverſitatem ſignorum + & −. At quoniam naturæ conformius eſt, ſumere focum realem poſitivum non habita ratione ſitus, licebit generaliter formulam pro utrovis ſpeculo ita proponere $\frac{dr}{2d \pm r} = z$, ita, ut ſignum + in denominatore pertineat ad convexum ſpeculum, & − ad concavum.

2. Coroll. I. Intelliget ex his tiro, qua ratione imago alicujus objecti habentis extenſionem aliquam ope ſpeculi ſphærici repræſentari poſſit. Satis autem erit, ſi explicetur repræſentatio duorum extremorum, & medii puncti. Sit tale objectum ABC (fig. 3 Tab. I). Ex A
Fig. 3. Tab. I. ducatur recta AK ad centrum ſpeculi convexi DEF, quod ſecet in D. Radius lucis AD (utpote directus ad centrum K) cum perpendicularis ſit ad ſuperficiem ſpeculi, in ſe ipſum reflecti debet; ſed alter Ad priori infinite propinquus reflectetur in de, ut ſit angulus incidentiæ æqualis angulo reflexionis: proinde productus ultra ſpeculum, ſecabit axem ADK in a. Eodem modo radius Af cum eadem conditione æqualitatis angulorum incidentiæ & reflexionis, redibit via fg, & productus ſecabit axem ADK in eodem puncto a, ſi modo arcus indefinite parvi Dd, Df æquales cenſeri poſſint. Hinc ſi oculus ita applicetur, ut ſufficientem copiam radiorum per reflexionem divergentium excipiat, referet objecti punctum A ad punctum a.

Quodſi eodem modo e medio puncto objecti B ducatur BK, ſecans ſpeculum in E, fiantque arcus Eh, Ek æquales, radii incidentes

Bh,

Bh, Bk reflectentur in hi, & kl, ita, ut ob æqualem diſtantiam BE cum AD (quam talem interea ſumimus) in puncto b axis BK ad æqualem a ſuperficie ſpeculi diſtantiam concurrant, ſiquidem producti intelligantur ultra ſpeculum. Unde pariter ſequitur, ab oculo ſufficientem radiorum divergentium copiam excipiente, & rite diſpoſito, referri debere objecti punctum B ad punctum b.

Denique quod de punctis A & B dictum eſt, ducto axe CFK, etiam de puncto C intelligi debet. Nam rurſus radii reflexi mn, op, producti in c concurrent cum axe CK, ubi oculus debite diſpoſitus per radios divergentes objecti punctum C videbit.

3. Coroll. II. Ex hac conſtructione manifeſtum eſt, radios reflexos a ſuperficie ſpeculi ſemper divergere per reflexionem, & longius diſcedere a ſuo axe. Unde neceſſe eſt, ut productorum ultra ſuperficiem ſpeculi concurſus ſit intra ſpeculum, atque imago ſitu erecto videatur, eodem punctorum ordine, quo ſunt in objecto.

4. Coroll. III. Si objectum ſit ſuperficies ſphærica concentrica ſpeculo, etiam imago talis erit. Quippe in hac hypotheſi ab æqualibus radiis AK, BK, CK demptis æqualibus radiis ſpeculi KD, KE, KF manent diſtantiæ punctorum A, B, C (nempe AD, BE, CF æquales; unde etiam ex formula $\frac{dr}{2d+r} = z$ omnium foci æquales erunt, & Ka = Kb = Kc, hoc eſt, imago ipſa erit ſuperficies ſphærica concentrica.

5. Coroll. IV. Ex oppoſito igitur fieri debet, ut ſi objectum ſit alterius ſuperficiei, ejus imago diſtorta, & objecto difformis apparere debeat (niſi forte tam parvum ſit, ut diſcrimen diſtantiarum evadat inſenſibile). Fit hoc evidens ex formula; nam manente radio ſpeculi invariato, & mutatis diſtantiis d pro diverſis objecti punctis, mutabitur etiam z. Si dividatur actu dr per $2d+r$, quotus obtinetur $\frac{1}{2}r - \frac{r^2}{4d+2r} = z$. Sequitur hinc, creſcente d decreſcere $\frac{r^2}{4d+2r}$; adeoque $\frac{r}{2} - \frac{r^2}{4d+2r}$ eſſe majus, quam dum d minor eſt, hoc eſt, *puncta objecti remotiora focum habere itidem a ſuperficie ſpeculi remotiorem*, conſequenter imaginem non poſſe eſſe objecto conformem.

6. Coroll. V. In hypotheſi ſuperficiei concentricæ evidens eſt, eſſe arcum ABC ad arcum abc, ut BK ad bK. Et cum idem de omnibus objecti ſectionibus circularibus verum ſit, eſt ſemper in ſpeculis convexis *amplitudo objecti ad amplitudinem imaginis, ut diſtantia centri ſpeculi ab objecto, ad ejusdem diſtantiam ab imagine.* Ergo objecta ſemper apparent in ſpeculis ſphæricis imminuta, cum exiſtente imagine intra centrum & ſuperficiem ſpeculi, objecto vero extra ſpeculum, neceſſario ſit BK > bK.

7. Coroll.

7. Coroll. VI. Non dissimilis est repræsentatio objectorum in speculis concavis. Sit (Fig. 4 Tab. I) objectum ABC, centrum speculi K. Ducto axe AKD, sumptisque arcubus D*d*, D*f* infinite parvis, & æqualibus, radii A*d*, A*f* ita (Per Probl. I) reflectentur, ut axi AD occurrant in *a*, ibique puncti A imaginem depingant. Consimilis erit reflexio radiorum B*h*, B*k* in *hb*, *kb*, & efformatio imaginis *b* puncti B in axe BKE. Denique sic etiam ad punctum *c* axis CKF reflectentur radii C*m*, C*o*, ut adeo imago futura sit *abc* situ inverso (nempe quoties objectum est ex altera parte centri, ut inferius dicemus).

Fig. 4. Tab. I.

8. Coroll. VII. In speculis cavis obtinet etiam, quod imago futura sit superficies concentrica speculo, si talis fuerit superficies objecti. Si enim fuerit AK + KD = BK + KE, ex formula $\frac{dr}{2d-r} = z$, erit etiam D*a* = E*b*, & proinde K*a* = K*b* = K*c* &c, & puncta *a*, *b*, *c* æqualiter distabunt a K. In hoc uno casu objectum conforme erit imagini; secus ob $z = \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4d-2r}$ crescet distantia foci a speculo pro punctis vicinoribus, dum *d* minor est, & minuetur pro remotioribus.

Fig. 5. Tab. I.

9. Coroll. VIII. Si (fig. 5 Tab. I) objectum ABC sit ita vicinum speculo concavo DEF (cujus centrum sit K) ut radii incidentes A*d*, A*f* servata lege æqualitatis angulorum incidentiæ, & reflexionis reflectantur in *de*, *fg*, ut producti ultra speculum concurrant in axis KD itidem producti puncto *a*, manifestum est, fore tum situm imaginis *abc*, erectum, & conformem objecto ABC, si hoc fuerit superficies concentrica speculo. In utraque autem figura (4ta & 5ta) est *distantia objecti* KB *a centro speculi* K, *ad distantiam imaginis ab eodem centro* K*b*, *ut amplitudo objecti* ABC *ad amplitudinem imaginis abc.* Unde in speculis concavis imago potest esse major, vel minor objecto; situ erecto, vel inverso.

Fig. 4. Tab. I.

10. Coroll. IX. Si fingamus (fig. 4 Tab. I) objectum esse *abc*, radiosque incidentes *ad*, *af*; *bh*, *bk*; *cm*, *co*, facile intelligitur, eos concursuros in axium punctis A, B, C, foreque A, B, C, imagines punctorum *a*, *b*, *c*, & quidem situ rursus inverso. Ex casibus propositis schemate 4to & 5to perspicitur, *quotiescunque objectum, & ejus imago est ex eadem parte respectu centri speculi, imaginem habere situm erectum; at quando objectum & imago sunt ex diversis partibus respectu centri, imaginem habere situm inversum.* Quando autem objectum & imago futura sit ex eadem, vel diversa parte centri speculi, sequente Problemate ex ipsa formula eruemus.

11. Problema II. Ex motu objecti definire motum, & situm imaginis.

Reso-

Resolutio I *pro speculo convexo.* Formula (1) pro distantia foci a superficie speculi convexi est $\frac{dr}{2d+r} = z$, in qua sumitur focus positive versus centrum speculi, sive ex parte radii convexitatis. Ponamus ab initio $d = \frac{1}{\infty}$, sive objectam in ipsa speculi superficie;

fiet $z = \frac{\frac{r}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+r} = \frac{\frac{\infty}{r}}{r} = \frac{1}{\infty}$; cum maneat signum $+$, erit imago infinite parum remota a superficie speculi versus centrum, atque (per coroll. V. Probl. I) æqualis objecto, & situ erecto. Porro cum denominatoris formulæ uterque terminus sit affectus signo $+$, quidquid fuerit d, semper manet focus intra centrum, & superficiem speculi, & idem imaginis erectæ situs. Esto $d = \infty$, fiet $z = \frac{\infty r}{2\infty + r} = \frac{\infty r}{2\infty} = \frac{1}{2}r$. Igitur *dum radii parallele incidunt, foci distantia maxima a superficie versus centrum speculi est dimidius radius speculi;* in omnibus aliis casibus minor est, ob $\frac{dr}{2d+r} = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4d+2r}$.

12. Etsi distantia objecti a speculo sphærico convexo nequeat sumi negative (cum objectum necessario ante speculum collocari debeat); attamen possunt radii ita convergentes incidere in speculum convexum, ut punctum convergentiæ sit ex parte centri, & hujus puncti distantia exprimi debebit per $-d$, quo casu fiet $\frac{-dr}{-2d+r} = z$. Apparet quando $r > 2d$, fore z negativum, hoc est, focum sumendum esse ante speculum, velut si in figura 3*tia* radii incidentes sint *ed*, *gh*; reflectentur hi in A, ibique focum habebunt manente imaginis Fig. 3. Tab. I. situ erecto (10). Quando est $2d = r$, fit $\frac{-dr}{0} = \infty = z$. In hoc igitur casu focus ad distantiam infinitam abit versus K, & radii parallele ad axem reflectuntur. Denique si fuerit $r < 2d$, focus manet intra speculum versus centrum. Sed hic casus paullo magis evolvendus est. Cum sit $\frac{-dr}{-2d+r} = \frac{r}{2} \; \frac{-r^2}{-4d+2r}$, & ponatur $-4d > 2r$, evidens est, fractionem $\frac{-r^2}{-4d+2r}$ esse positivam (utpote cum quantitas negativam per negativam dividatur, consequenter focus reapse erit $\frac{1}{2}r + \frac{r^2}{4d-2r}$, hoc

hoc eſt, focus propior erit centro, quam ſuperficiei ſpeculi. Ut veniat focus ad ipſum centrum, requiritur, ut ſit $d = r$; ſive ut radii incidentes convergant ad centrum ſpeculi, & incidant in ejus ſuperficiem perpendiculariter. In hac hypotheſi imago abit in punctum, & nihil repræſentabitur. At quando $d > r$, erit $4d - 2r > 4r - 2r$ ſeu $> 2r$, & fractio $\frac{r^2}{4d - 2r}$ erit minor, quam $\frac{1}{2}r$, focusque erit intra centrum, & ſuperficiem ſpeculi, ſitu imaginis erecto. Poſita autem $4d > 2r$, attamen $d < r$, erit $4d - 2r < 4r - 2r$, & fractio $\frac{r^2}{4d - 2r}$ major quam $\frac{1}{2}r$; hinc $\frac{r}{2} + \frac{r^2}{4d - 2r} > r$, hoc eſt, focus erit ultra centrum, & imaginis ſitus inverſus juxta N. 10. Dum objectum abit ad diſtantiam infinitam a ſpeculo, ſive dum $d = \infty$, & radii incidunt paralleli, formula fit $\frac{\infty r}{2\infty + r} = \frac{r}{2} = z$.

13. Atque hi ſunt præcipui caſus, qui poſſunt emergere in ſpeculis convexis. Illud per ſe tiro pervidet, poſſe citra negotium determinari diſtantiam objecti, ſi quidem deſideretur, ut focus ſit in data a ſpeculo diſtantia. Petatur v. g. ut focus ſit ante ſpeculum in diſtantia $2r$ ab ejus ſuperficie, ponendum erit $-2r = \frac{dr}{2d + r}$, ſeu $-4d - 2r = d$, aut $-5d = 2r$, vel $-d = \frac{2}{5}r$, hoc eſt, punctum convergentiæ debet diſtare a ſuperficie verſus centrum ſpeculi $\frac{2}{5}$ radii. Si petatur, ut focus ſit ultra centrum ſpeculi, ex. cauſa intervallo $= 2r$, ponatur $2r = \frac{dr}{2d + r}$; fiet $4d + 2r = d$, ſeu $\frac{2}{3}r = -d$: debebuntque radii convergere ad diſtantiam $\frac{2}{3}r$ ultra ſpeculi ſuperficiem.

14. Reſolutio II *pro ſpeculo concavo.* Si in formula $\frac{dr}{2d - r} = z$ (in qua z ponitur jacere ex eadem parte cum radio ſphæricitatis ſpeculi) ponatur $d = \frac{1}{\infty}$, fit $\frac{\frac{r}{\infty}}{\frac{2}{\infty} - r} = -\frac{1}{\infty} = z$, eritque focus infinite parum ultra ſuperficiem ſpeculi, & imago ſitu erecto (10). Quamdiu $2d < r$, focus ſemper eſt negativus, & ultra ſpeculum, manente imagine erecta; at dum $2d = r$, fit focus infinitus, ſeu radii reflectuntur paralleli ad axem, & nulla imago depingitur: quam primum autem fit $2d > r$, focus efformatur ante ſpeculum, & quidem ſi $d < r$, attamen $d > \frac{1}{2}r$, focus erit ſemper in majore diſtantia ante ſpeculum, quam ſit r, & proinde imago inverſa (10). Sed ubi $d = r$, fit

r, fit $\frac{r^2}{r} = r = z$, & radii in ſuperficiem ſpeculi perpendiculariter incidentes reflectentur ad ipſum centrum. Ex quo apparet, objecto a diſtantia $\frac{1}{2}r$ verſus centrum accedente, accedere focum ex diſtantia infinita pariter ad centrum. Quando $d > r$, eſt $2d - r > r$, adeoque $\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2d - r} < r$, ſeu imago erit ſitu inverſo intra centrum, & ſuperficiem ſpeculi, attamen ab hac magis diſtabit, quam $\frac{1}{2}r$. Idem continget objecto recedente a ſpeculo, donec fiat $d = \infty$, quo caſu fit $z = \frac{1}{2}r$. Igitur imago (cujus ſitus manet inverſus) non poteſt propius ad ſuperficiem ſpeculi accedere, quam $\frac{1}{2}r$, quando objectum eſt extra ſpeculi centrum.

15. Intelligenda hæc ſunt in hypotheſi, quod radii divergentes incidant. Si radii convergant ad aliquod punctum ultra ſpeculum ſitum in diſtantia d, formula exhibebit $z = \frac{-dr}{-2d - r} = \frac{dr}{2d + r}$. Colligitur hinc, focum manere perpetuo realem, & ante ſpeculum, utpote cum ſignum non mutetur, quidquid fuerit d: & quidem abeunte puncto convergentiæ a ſuperficie ſpeculi ad diſtantiam infinitam, focus itidem a ſuperficie ſpeculi accedet verſus centrum intervallo $\frac{1}{2}r$.

16. Quod N. 13 de convexis ſpeculis diximus, citra negotium concavis applicatur. Unde hoc tironis induſtriæ relinquimus. Ceterum formula $\frac{dr}{2d \pm r} = z$ in ſequentem analogiam ſolvitur $2d \pm r : r = d : z$; & diviſa prima ratione per 2, fiet $d \pm \frac{1}{2}r : \frac{1}{2}r = d : z$. Ex NN. 12 & 14 patet, eſſe $\frac{1}{2}r$ focum radiorum parallelorum, qui ſi dicatur $= f$, analogia habetur $d \pm f : f = d : z$, adeoque $\frac{df}{d \pm f} = z$, quæ eſt omnino ſimilis formulæ dioptricæ, adeoque eandem fere habet conſtructionem graphicam, quam mox ſubjiciemus.

ARTICULUS II.

Conſtructio graphica formluæ $\frac{df}{d \pm f} = z$.

17. Sumpſimus in præcedente Articulo, radios lucis in ſpeculum incidentes eſſe axi ſpeculi infinite propinquos. Unde iſthic ponimus radium aperturæ ſpeculi tam parvum, ut ejus ſectio, licet ſit arcus circularis, poſſit nihilominus pro recta citra errorem ſenſibilem hbe-

haberi. Ex superioribus autem facile distinguuntur tres casus radiorum lucis in speculum convexum incidentium. Horum est

Casus I. *Si radii incidant in speculum convexum divergentes.*

Fig. 6. Tab. I. Sit (fig. 6 Tab. I) superficies speculi CD, centrum K, & KF $= FC = \frac{1}{2}r = f$; radius aperturæ sit CD. Erigatur ex A (est CA distantia objecti a speculo) perpendicularis ad axem KA, & indefinita AB. Ex F ducatur per D FDB occurrens perpendiculari AB in B; agatur item ex D ad axem parallela DG: si conjungatur punctum B cum centro speculi K, secabit recta BK parallelam DG alicubi in G. Denique demissum ex G in axem perpendiculum GL determinabit distantiam foci a speculo CL $= z$.

Triangula similia BGD, BKF; item FBA, FDC (cum DC pro recta ad AB parallela haberi debeat) dant BF: BD = KF: GD vel LC. Est autem BF : BD = FA : CA; igitur etiam KF: LC = FA : CA, vel FA : CA = KF (vel CF): CL, id est (ob CA $= d$, FC $= f$) $d + f : d = f : \frac{df}{d+f} = z$. Est ergo CL $= z$ ex constructione. Q. E. F.

18. Coroll. Quando CA $= \infty$, etiam FB, KB fiunt infinitæ, & GD = KF = FC $= \frac{1}{2}r = f$. Si CA $= \frac{1}{\infty}$, B incidit in D, & GD evadit $= \frac{1}{\infty}$, attamen ex constructione ultra C versus F. Ex hoc patet, etiam ex constructione posse omnia ea derivari, quæ Probl. II. Art. I. dicta sunt.

19. Casus II. *Si punctum convergentiæ* A *situm sit intra centrum* K, *& focum radiorum* F (fig. 7 Tab. I).

Fig. 7. Tab. I. Erigatur rursus ex A perpendiculum ad axem speculi AB, & ex extremo D radii aperturæ ducatur per F recta DFB occurrens perpendiculo AB in B. Facta DG ad axem parallela, recta ex B per K ducta occurret eidem in G, ita, ut perpendiculum GL in axem demissum cadat in L ultra centrum K, in quo erit focus quæsitus.

Nam ob triangula AFB, FDC similia, uti etiam triangula BFK, BDG, est AF: AC = BF: BD = KF: DG vel CL, ideoque etiam AF: AC = KF: LC, id est $-d + f : -d = f : z =$ CL $= \frac{-df}{-d+f}$, & quia $d > f$, focus L jacet ex parte radii.

20. Si A foret extra K versus L, evidens est, rectam BK ita secare parallelam in G, ut GL cadat intra K & C. Et si A incidat in K, etiam L cum K congruet, uti Probl. II. observavimus.

Fig. 8. Tab. I. 21. Casus III. *Si punctum convergentiæ A situm sit intra superficiem speculi, & focum* F *radiorum parallelorum* (fig. 8 Tab. I).

Duca-

Ducatur ex F, foco radiorum parallelorum, recta FD ad D extremum radii aperturæ CD punctum, quæ secet in B perpendiculum ad axem ex A erectum. Facta DG ad axem parallela secabitur in G per rectam KB productam; erit CL distantia foci quæsita ante speculum, definito puncto L per perpendiculum ex G in axem productum demissum.

Quia triangula KBF, GBD; item FBA, FDC similia sunt, est FA: AC = FB: BD = KF: DG vel CL, id est $= -d + f : -d = f$: CL $= \frac{-df}{-d+f} = z$; sed quia $d < f$, focus L est negativus, sive jacet ex parte opposita radii sphæricitatis KC.

22. Construximus adhuc formulam pertinentem ad specula convexa. Non dissimilis erit constructio alterius $\frac{dr}{2d-r} = \frac{df}{d-f} = z$ pro speculis concavis, poterimusque omnia ad tres præcipuos casus reducere.

Casus I. *Si objectum sit extra focum radiorum parallelorum speculi concavi.* (fig. 9 & 10 Tab. I). Fig. 9. & 10. Tab. I.

Sit objectum in A, in fig. 9 extra, in 10ma intra centrum. Excitetur in utroque casu perpendiculum AB ad axem, quod recta ex extremo aperturæ D per F ducta secetur in B. Fiat item DG ad axem parallelæ, cui in G occurrat recta ex B per centrum K transiens. Demisso ex G in axem perpendiculo GL, habebitur distantia foci L a speculo, nempe CL, & quidem in casu figuræ 9^{næ} cis centrum respectu speculi; in casu vero fig. 10^{mæ} trans illud.

In utraque figura sunt triangula FCD, FBA; item BFK, BDG similia: hinc FB: DB = FK: DG vel CL. Est vero FB: DB = FA: CA; igitur etiam FA: CA = FK : CL, id est $d - f : d = f$:

$$\mathrm{CL} = \frac{df}{d-f} = z.$$

Omittimus adnotare, ex ipsa hac constructione facili negotio omnia posse deduci, quæ superiore Artic. Probl. II adduximus. Ipse tiro has focorum mutationes, positis objectis ad diversa intervalla a speculo, majore cum voluptate animadvertet.

23. Casus II. *Si objectum sit intra focum radiorum parallelorum, & superficiem speculi concavi.*

Sit aperturæ speculi radius CD (fig. 11 Tab. I), centrum K, focus radiorum parallelorum F, objectum in A, in quo puncto excitata perpendicularis AB secetur in B per rectam ex F ad D ductam. Parallela ad axem DG secabitur a recta KB producta in G, & perpendicularis ad axem productum GL definit distantiam foci CL a speculo, nempe in hoc casu ultra speculum. Fig. 11. Tab. I.

Triangula ſimilia BFK, BGD dant BF : BD = FK : GD vel LC. Sed ob triangula FBA, FDC itidem ſimilia habetur etiam BF : BD = AF : AC; quare erit quoque AF (id eſt CA — CF) : AC = FK : LC, vel $d - f : d = f : \frac{df}{d - f} = CL = z$, ſed quia $f > d$, erit focus z ultra ſpeculum, & imago ſitu erecto &c.

24. Caſus III. *Si radii convergant ultra ſpeculum concavum.*

Fig. 12. Tab. I. Sit diſtantia puncti convergentiæ a ſpeculo CA; excitata in A perpendicularis ſecetur in B per rectam ex F per extremitatem aperturæ D ductam. Conjungatur B cum K; ſecabitur DG ad axem parallela in G, & perpendiculum GL in axem demiſſum definiet diſtantiam foci CL ante ſpeculum, minorem quam CF.

Ex ſimilitudine triangulorum FCD, FAB, item BFK, BDG habetur AF : AC = BF : BD = FK : DG ſeu CL; ideoque etiam AF : AC = FK : CL; id eſt $-d - f : -d = f : CL = \frac{df}{d+f} = z$.

Quod autem ſemper ſit CL < CF, ſeu focus radiorum parallelorum, quando radii convergunt, evidens eſt ex ratione FK : DG = BF : BD, niſi fiat AC infinita, quo caſu evadunt FB, KB parallelæ, & FK = CF = DG = CL.

ARTICULUS III.

De cauſticis per reflexionem.

25. Definitio. Cauſtica per reflexionem eſt ſeries continua focorum curvam conſtituentium, quos bini quivis radii incidentes efficiunt, qui curvam illam perpetuo tangunt. Generatim igitur proponi poteſt ſequens generale

Fig. 13. Tab. II. Problema: data natura curvæ AMD (fig. 13 Tab. II), in quam e puncto lucido B incidunt radii; dato item radio curvaturæ in puncto incidentiæ M, invenire MF, ſeu punctum F, in quo radius reflexus cauſticam tangit.

Reſolutio. Ad radios incidentes æque, ac reflexos demittantur ex centro C circuli oſculatoris perpendicula CE, Ce; item CG, Cg: centris item B & F deſcribantur arcus evaneſcentes MR, MO. Ob rectos mMC, RME, ablato communi angulo RMC, manet mMR = CME. Item ſi ex rectis OMF, CMm auferatur communis mMF, manet OMm = FMC. Atqui ex lege reflexionis eſt angulus incidentiæ EMC æqualis angulo reflexionis GMC; ergo etiam erit mMR = OMm, & ob commune latus Mm, etiam OM = MR. Præterea ſimilia

milia ſunt triangula BEQ, BMR; uti & FMO, FGS; triangula vero CEM, CMG ſimilia & æqualia, adeoque EQ = SG. Eſt igitur BM : BE = MR : EQ, vel BM : BM — ME = MR : EQ, & BM + BM — ME : BM = MR + EQ : MR = MO + GS : MO. Atqui MO + GS : MO = MG (ſeu ME) : MF; igitur etiam erit 2BM - ME : BM = ME : MF. Dicatur BM = y, ME = a, MF = z, fiet $2y - a : y = a : z = \frac{ay}{2y - a}$.

26. Si curva obvertat puncto lucido convexitatem, evidens eſt, habere y reſpectu radii curvaturæ ſitum contrarium, ideoque eſſe negative ſumendam, abeunte æquatione in $\frac{-ay}{-2y-a} = z = \frac{ay}{2y+a}$.

Si punctum B infinite diſtet, radiis parallele incidentibus, fit $z = \frac{\infty a}{2\infty} = \frac{1}{2}a$. Quando radius incidens curvam reflectentem tangit, fit $a = \frac{1}{\infty}$, & $z = \frac{\frac{y}{\infty}}{2y} = \frac{1}{2\infty}$, & punctum causticæ incidet in punctum contactus, hoc eſt, cauſtica ibi tanget curvam reflectentem.

Applicemus hæc caſui particulari, in quo cauſtica eſt curva algebraica, dum nempe radii paralleli incidunt in ſemicirculum cavum.

27. Sit radius incidens BM (fig. 14 Tab. II). Facto angulo BMC = CMF, & radio circuli CM in H biſecto, demittatur ex H in MF (radium reflexum) perpendicularis HF; erit F punctum cauſticæ. Ducatur HK ad AC parallela: quia MH = HC, eſt etiam MK = KB, & ob æquales angulos BMC, CMF, triangula KMH, HMF ſimilia & æqualia ſunt, conſequenter KM = MF = $\frac{1}{2}a$, ut oportet (25). Recta igitur KF eſt ad MH in T perpendicularis; & ex F in AC demiſſo perpendiculo FP, ſunt triangula MKT, MBC, KBQ, QFP ſimilia. Eſto MC = r, MB = a, MK = KB = MF = $\frac{1}{2}a$, BC = x, FR = PC = z, FP = RC = v. Erit ex ſimilitudine triangulorum Fig. 14. Tab. II.

MC : BC = MK : KT, ſeu $r : x = \frac{1}{2}a : KT = \frac{ax}{2r}$, & KF = $\frac{ax}{r}$.

BC : MC = KB : KQ, vel $x : r = \frac{1}{2}a : KQ = \frac{ar}{2x}$.

KQ : KB = QF (vel QK + KF) : FP, id eſt $\frac{ar}{2x} : \frac{1}{2}a = \frac{r}{x} : 1 = \frac{ar}{2x} + \frac{ax}{r}$:

$$FP = v = \frac{a(r^2 + 2x^2)}{2r^2}.$$

MC:

$MC : MB = QF : QP = KF : BP$, seu $r : a = \frac{ax}{r} : BP = \frac{a^2x}{r^2}$; hinc

$$PC = CB - BP = x - \frac{a^2x}{r^2} = \frac{x(r^2 - a^2)}{r^2} = z.$$

Ex natura circuli est $a^2 = r^2 - x^2$. Et quia $z = \frac{x(r^2-a^2)}{r^2}$, $r^2z = x\,(r^2 - r^2 + x^2) = x^3$, $\sqrt[3]{r^2z} = x$, $r\sqrt[3]{rz^2} = x^2$, fiet $a^2 = r^2 - r\sqrt[3]{rz^2}$, $a = \sqrt{r^2 - r\sqrt[3]{rz^2}}$. Hi valores de x, & a in æquatione ad v adhibiti præbent $v = \frac{a(r^2+2x^2)}{2r^2} = \frac{\sqrt{r^2-r\sqrt[3]{rz^2}}\,(r^2+2r\sqrt[3]{rz^2})}{2r^2}$ $= \frac{\sqrt{r^2 - r\sqrt[3]{rz^2}}\left(r + 2\sqrt[3]{rz^2}\right)}{2r}$; $2vr = \sqrt{r^2-r\sqrt[3]{rz^2}}\,(r + 2\sqrt[3]{rz^2})$ $4v^2r^2 = (r^2 - r\sqrt[3]{rz^2})(r^2 + 4r\sqrt[3]{rz^2} + 4z\sqrt[3]{r^2z}) = r^4 + 4r^3\sqrt[3]{rz^2} + 4r^2z\sqrt[3]{r^2z} - r^3\sqrt[3]{rz^2} - 4r^2z\sqrt[3]{r^2z} - 4r^2z^2 = r^4 + 3r^3\sqrt[3]{rz^2} - 4r^2z^2$; $4v^2 = r^2 + 3r\sqrt[3]{rz^2} - 4z^2$, vel $4v^2 + 4z^2 - r^2 = 3r\sqrt[3]{rz^2}$. Hæc æquatio ad tertiam potentiam elevata dat $64v^6 + 192v^4z^2 + 192v^2z^4 - 48r^2v^4 - 96r^2v^2z^2 + 12r^4v^2 + 64z^6 - 48r^2z^4 - 15r^4z^2 = o$.

Si in hac ponatur $z = o$, fit $64v^6 - 48r^2v^4 + 12r^4v^2 - r^6 = o$, quæ habet tres radices æquales $4v^2 - r^2 = o$, ex quibus iterum habetur $v = \pm \frac{1}{2}r$; indicio, quod curva infra diametrum circuli duos æquales ramos habeat. Reapse hæc caustica est epicyclois, cujus circulus genitor habet diametrum $= \frac{1}{2}r = MH$, & is, super quo revolvitur,
Fig. 15. Tab. II. habet radium $HC = \frac{1}{2}r$. In (fig. 15 Tab. II), evidens est, esse angulum $KHM = ICH$, ideoque dimidius arcus MK est ad arcum HI $= 1 : 2$, & totus MK ad totum HI ut 2 ad 2, ideoque æqualis, consequenter etiam arcus KH = arcui HF = arcui HO, & punctum F est in epicycloide AFO, cujus vertex est A, & altera medietas AGS, ita, ut si $SC = CO = \frac{1}{2}r$. Generatim ostendi potest, omnes causticas reflexione semicirculi ortas esse epicycloides, qua de re infra fortassis occurret mentio.

Fig. 14. Tab. II. 28. Pro usu catoptrico referamus causticam ad axem LON, origine abscissarum v in O constituta, ut sit $CO = \frac{1}{2}r$. Opus tantummodo est, ut in æquatione superiore pro v substituatur $v + \frac{1}{2}r$, fietque $64v^6 + 192rv^5 + 192r^2v^4 + 64r^3v^3 + 192v^4z^2 + 384r^2v^2z^2 - 27r^4z^2 - 48r^2z^4 + 64z^6 = o$.

Si

Si ponatur $v = o$, æquatio abit in $64z^6 - 48r^2z^2 - 27r^4z^2 = o$, quæ præter duas radices $= o$, dat $z^2 = \frac{3r^2 \pm 3r^2\sqrt{3.64 + 1}}{8}$, & $z = \pm \frac{r(3 \pm 3\sqrt{3.64 + 1})^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}}$, ubi apparet, si accipiatur sub signo —, fieri valorem imaginarium.

Si æquatio transformata inscribatur triangulo analytico, duæ obtingunt determinatrices inferiores; altera dat æquationem $64v^6 + 192rv^5 + 192r^2v^4 + 64r^3v^3 = o$, cujus radices sunt tres æquales zero, & tres æquales inter se $4v + 4r = o$, seu $v = -r$. Altera determinatrix inferior præbet æquationem $\frac{64v^3}{27r} = z^2$, quæ pertinet ad parobolam tertii gradus, & secundi generis, cum qua igitur in vertice caustica congruit. Repræsentet GIH (fig. 16 Tab. II) superficiei speculi cavi sectionem per axem FI transeuntem, AG sit radius aperturæ, radius speculi $= r = 2$IF, sumpta FE $= v$, ductisque ordinatis DE, (ubi in D radius ex extremo aperturæ G reflexus tangit causticam) & OC (ubi in C rursus occurrit alteri ramo D'CF), evidens est, debere esse DE^2: OC^2 $= \frac{64}{27r}$ FE^3: $\frac{64}{27r}$ FO^3 $=$ FE^3: FO^3. Facile intelligitur esse BF errorem foci in longitudinem ex figura sphærica, EB vero subtangentem $= \frac{zdv}{dz}$. Ex æquatione parabolæ congruentis in cuspide cum caustica, est $z = \frac{8v\sqrt{v}}{3\sqrt{3r}}$, $dz = \frac{4dv\sqrt{u}}{\sqrt{3r}}$, adeoque

Fig. 16. Tab. II.

$$\frac{zdv}{dz} = \text{EB} = \frac{8vdv\sqrt{u}}{3\sqrt{3r}} \times \frac{\sqrt{3r}}{4dv\sqrt{u}} = \tfrac{2}{3}v = \tfrac{2}{3}\,\text{FE}, \ \& \ \text{BF} = \tfrac{1}{3}v,$$

consequenter IB $=$ IF — BF $= \frac{1}{2}r - \frac{1}{3}v = \frac{4r - 2v}{6}$. Neglecta IA, erit AF - BF: EB $=$ GA: DE, vel (si GA ponatur $= e$) $\frac{3r - 2v}{6} : \frac{2}{3}v = e$: ED $= \frac{4ev}{3r - 2v}$. Præterea est DE: OC $=$ EB : BO, vel $\frac{4ev}{3r - 2v}$: OC $= \frac{2}{3}v$: BO $= \frac{2v \times \text{OC} \times (3r - 2v)}{3 \times 4ev} = \frac{\text{OC}(3r - 2v)}{6e}$.

Hinc fit FO $=$ FB — BO $= \frac{1}{3}v - \frac{\text{OC}(3r - 2v)}{6e} = \frac{2ev - 3r \times \text{OC} + 2v \times \text{OC}}{6e}$;

his in analogia DE^2 : OC^2 $=$ FE^3: FO^3 substitutis, habetur $\frac{16e^2v^2}{(3r - 2v)^2}$:

$OC^2 = \nu^3 : \frac{(2e\nu - 3r \times OC + 2\nu \times OC)^3}{216e^3}$. Multiplicatis mediis & extremis habebitur æquatio, ex qua data ν inveniri poteſt OC, radius circelli minimi, qui exprimit errorem figuræ ſphæricæ in latitudinem.

29. Error in longitudinem BF ex formula dioptrica facile eruitur: nam ſi in quantitate $q^2\varphi = \frac{m^2a^2}{(m-1)^2} \times \frac{m-1}{m^3} \times \frac{1}{a^3} \times \frac{e^2}{2}$ (N. 160 Diopt.) loco $\frac{m}{1}$ ponatur -1, vi lemmatis adhibiti, pertinebit etiam ad ſpeculum cavum, cujus radius eſt $= a$. Facta autem hac ſubſtitutione obtinetur $q^2\varphi = \frac{e^2}{4a}$. Cum apud nos ſit radius r loco a, & $q^2\varphi = BF = \frac{1}{3}\nu$, habetur $\frac{1}{3}\nu = \frac{e^2}{4r}$, & $\nu = \frac{3e^2}{4r}$. Quare ut OC obtineatur, adhibendum erit in æquatione (de qua priore numero diximus) $\frac{3e^2}{4r}$ loco ν. Quia e reſpectu r; item ν reſpectu e, & multo magis OC, exigua quantitas eſt; omiſſis aliis terminis, ſatis fuerit, ſi in analogia adhibeatur tantum $\frac{16e^2\nu^2}{9r^2} : OC^2 = \nu^3 : \frac{8e^3\nu^3 - 36e^2\nu^2 r \times OC}{216e^3}$, ex qua fit $OC^2 = \frac{16.\,8e^5\nu^5 - 16.\,36e^4\nu^4 r \times OC}{9.\,216e^3\nu^3r^2}$,

$$\text{vel } OC^2 + \frac{2e\nu \times OC}{3r} = \frac{16.\, e^2\nu^2}{9.\, 27r^2} = \frac{16e^2\nu^2}{9.\,9.\,3r^2}$$

$$OC^2 + \frac{2e\nu \times OC}{3r} + \frac{e^2\nu^2}{9r^2} = \frac{16e^2\nu^2}{9.\,9.\,3r^2} + \frac{e^2\nu^2}{9r^2} = \frac{(16 + 9.\,3)\,e^2\nu^2}{9.\,9.\,3r^2}$$

$OC = -\frac{e\nu}{9r} \pm \frac{e\nu}{9r} \times \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{3}}$, ſeu $\frac{e\nu}{9r} \times 2{,}785$ proxime, ſeu cum 2,785 a 3 parum differat, $OC = \frac{e\nu}{3}$.

Loco ν accipiatur $\frac{3e^2}{4r}$, habebitur $OC = \frac{e^3}{4r^2}$, adeoque erit $4r^2 : e^2 = e : \frac{e^3}{4r^2}$, quadratum diametri ſpeculi ad quadratum radii aperturæ, ut radius aperturæ ad radium circelli, qui errorem foci exhibet. Si exempli cauſa ſit focus radiorum axi infinite propinquorum $= \frac{1}{2} r = 24$ dig. $2r = 96$ dig. radius aperturæ 3. dig. erit $\frac{e^3}{4r^2} = \frac{27}{4.\,9216} = \frac{1}{1365}$ fere unius digiti, quæ quantitas omnino facile negligitur. Multo minor eſſe debet in Teleſcopiis catoptricis, in quibus ſpectato foco tanta apertu-

apertura haud facile relinquitur. Et sane evenit hoc fortunato, cum corrigendo huic tantillo licet errori nondum inventum sit remedium. Sed prosequamur cœpta de causticis.

30. Si radii ex puncto quopiam F divergentes (fig. 17 Tab. II) Fig. 17. incidant in circulum cavum BMA, poterunt singula causticæ puncta Tab. II. hunc in modum determinari. Sit MR quarta pars chordæ ME, in qua (saltem producta) est punctum F; fiat FR : FM = FM : FG. Ducatur MT ad MC perpendicularis, & ad eam ex G demissum perpendiculum GT producatur in O, ut sit TG = TO; erit MO radius reflexus, & O punctum causticæ. Nam ex æquatione est $2y - a : y = a :$ MO, vel $y - \frac{1}{2}a : y = \frac{1}{2}a :$ MO, aut etiam $y - \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a = y :$ MO, seu denique $y - \frac{1}{2}a : y - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = y : y +$ MO, vel $y - \frac{1}{2}a$ (FR): y (FM): $= y$ (FM): $y +$ MO (FM + MO). Est autem ob parallelas MC, GO, & triangula MTO, MTG similia & æqualia, MO = MG; ergo FM + MO = FM + MG = FG. Vertex causticæ B determinatur, ducta ex F ad circulum tangente.

31. Verum dico præterea, causticæ dimidium SOB esse dimidiam epicycloidem, cujus circuli genitoris diameter MH hunc in modum definitur. Fiat $Ar = \frac{1}{4}$ AD, & Fr: FA = FA: Fg; Ag transferatur in AS, & descripto radio CS semicirculo SHI; diametro AS vero = MH, circulo HOM, generabitur ejusdem super SHI revolutione caustica. Ponatur SOB epicyclois hisce circulis genita, & ducatur OM; conjungatur item O cum F. Ex N, ubi OF secat MC, agatur ad MO parallela, uti etiam ex O parallela ad MC, nempe OG: sumpta OT = TG, ducatur ex G per M recta, quæ secabit NR in R, & diametrum AD productam alicubi in F. Ob TG = TO, est MGT = MOT; & quia OG ad MC parallela, est etiam OMN = TOM & RMN = MGT = NMO. Igitur MN bisecat angulum FMO, & possunt puncta O & F spectari tanquam duo foci ellipseos, axe majore GF descriptæ, cujus normalis MN occurrit axi in N. Igitur (Geom. Part. III. N. 110) erit MR = RN = RL. Atqui ML (ob CL ad ML perpendicularem) est dimidia chorda ME; ergo FR: FM = FM: FG, seu FM + MO, proinde punctum O vi prioris constructionis pertinet ad causticam. Et quoniam O ad arbitrium assumptum est, clarum est, epicycloidem non differre a caustica.

32. Coroll. I. Patet hinc, adhiberi posse etiam constructionem causticæ illi analogam, quam in casu radiorum parallelorum adduximus, nempe si invento CS ex analogia Fr : FA = FA: Fg, & Ag in AS translata, radio CS describatur, semicirculus SHI. Facto angulo FMC = CMO, demittatur ex H ad MO perpendiculum HO; pertinebit O ad causticam.

33. Coroll. II. Si epicyclois SOB spectetur ut locus geometricus focorum O infinitarum ellipsium, habentium alterum focum F, omnes hasce ellipses osculabitur circulus AMD in punctis M. Patet

ex loco Geometriæ superius (31) citato. Et si F abeat ad distantiam infinitam, in constructione fit $MR = MG$, cum sit $y - \frac{1}{2}a = y$ ratione infiniti: & in hac hypothesi erit caustica locus focorum infinitarum parabolarum, quas idem circulus osculatur. Denique si radii
Fig. 18. Tab. II. (fig. 18. Tab. II) ad idem punctum F convergant, fiatque rursus FR : FM = FM : FG, eademque servetur constructio, caustica BOS iterum erit epicyclois genita circulo diametri $MH = Ag$, super SHI revoluto, & locus geometricus focorum O hyperbolarum infinitarum habentium alterum focum in F, quas idem simul circulus ABD in M osculatur; aut etiam si radii ex F divergentes incidant in convexitatem circuli, erit SOB locus focorum virtualium O. Ex Mechanica etiam patet, esse MR spatium, per quod gravitate constante in M cadendo acquiritur celeritas projectionis, ut hæ sectiones conicæ in spatio non resistente describantur, centro virium in F collocato. Verum hæc indicasse satis est.

Fig. 19. Tab. II. 34. Sit DMA cyclois dimidia vulgaris, & incidant in ejus cavitatem radii KM ad axem BA paralleli; si fuerit MGN circulus genitor, erit GM $\frac{1}{2}$ radius curvaturæ in M (Inst. Anal Por. II. L. I. N. 164.), adeoque facto angulo GMF = GMK, & demisso ex G ad MF perpendiculo GF, erit F punctum causticæ. Apparet, triangula GMK, GMF esse similia & æqualia, proinde KM = FM.

E centro circuli genitoris H ducantur ad M, & ad G (punctum contactus baseos) radii HM, HG; erunt anguli HGM, HMG æquales; & quia GMF = KMG, etiam erit GMK = MGH, proinde HG erit ad KM parallela. Igitur si describatur super diametro GH circulus, is secabit in F radium reflexum, ob GFH rectum in semicirculo. Porro cum anguli GHN mensura sit arcus GN circuli genitoris, & angulum eundem GHF metiatur quoque dimidius arcus circuli minoris GF, erit dimidius arcus GF ad arcum GN, ut diameter GH, ad diametrum MH, ut 1 ad 2, ideoque totus arcus GF æquatur arcui GN, id est parti baseos GB, ex natura cycloidis. Quare punctum F pertinet etiam ad cycloidem BFD, quæ revolutione circuli GFH super basi BD describitur.

Fig. 20. Tab. II. 35. Esto (fig. 20 Tab. II) AMD parobola, in quam radii paralleli, & ad axem AR perpendiculares incidant, velut PM. Sit radius curvaturæ in M = MC; si fiat PMC = CMG, erit MG radius reflexus. Igitur punctum causticæ F habebitur, si fiat MF = $\frac{1}{2}$ MG. Habebitur hinc sequens constructio. Notum est, si ex foco L ducatur ad ML perpendicularis LH, per eam secari radium curvaturæ bifariam in H, ideoque satis est, si fiat angulus LMF rectus, & MF = LH. Quippe constat, per normalem, si fiat MN parallela ad axem, bifariam secari angulum LMN; & quoniam etiam PMF per eandem dividitur in duas partes æquales, est LMP = FMN, ideoque PMN = 90° = LMF.

Evidens

Evidens eſt ex natura parabolæ, radio incidente per focum L, ſcilicet Lm, fore ſubnormalem $Lr = Lm$, & $Lmr = 45^{\circ}$, conſequenter, cum etiam ſit $rmn = 45^{\circ}$, fore Lmn rectum, & radium reflexum parallelum ad axem, & cum is cauſticam tangat, maxima ejus ordinata erit ſemiparameter. Liquet, ex conſtructione paullo ante allata, in hoc caſu congruente H cum r, fore $mf = Lr$, & abſciſſam Ar æquari $\frac{3}{4}$ parametri axis parabolæ.

36. Si radii ex foco L divergentes incidant in ſuperficiem parabolæ, velut LM, reflectentur ad axem AP paralleli. Cum enim normalis MQ angulum LMN biſecet, evidens eſt, radium debere reflecti ad axem parallele. Et quia (Geom. Part. III. N. 162) eſt LM quarta pars chordæ circuli oſculatoris, quæ per L tranſit; noſque ex æquatione generali deduximus analogiam $y - \frac{1}{4}a : y = y : y + \text{MF}$, fit primus terminus $y - \frac{1}{4}a = o$, adeoque $\text{MF} = \infty$, & radii reflexi habent focum ad diſtantiam infinitam.

Qui de cauſticis plura ſcire deſiderat, adeat *Hoſpitalii* Analyſin infinite parvorum, quam in latinum translatam A. 1764 iſthic edendam curavi. Nobis hæc ſatis ſunto, quod alias non ſit tantus hujus argumenti uſus, niſi Geometriæ exercitationes deſideres, quæ tamen etiam citra hoc nunquam deeſſe poſſunt.

ARTICULUS IV.

De ſpeculis planis.

37. Theorema I. Objecti imago, ex quo radii divergentes incidunt in ſuperficiem ſpeculi plani, tanto intervallo perpendiculari videtur poſt ſuperficiem ſpeculi, quanta eſt ejusdem diſtantia a ſpeculo.

Demonſtr. Opus tantummodo eſt, ut ſpectetur ſpeculum planum inſtar ſphærici, abeunte centro in infinitum. Itaque formula utravis abibit in $\frac{d\infty}{2d \pm \infty} = \pm d$. Si ſumatur $+ d$, intelligitur, radium ſphæricitatis ſitum poſt ſuperficiem reſpectu objecti; ſi autem $-d$ accipiatur, radius ſphæricitatis ſitus ponitur ante ſuperficiem ſpeculi, adeoque ſignum — denotat ſitum foci oppoſitum. In utroque igitur caſu imago refertur poſt ſpeculum, & quidem intervallo d. Q. E. D.

38. Corollarium I. Quando objectum eſt ſpeculo parallelum, ſitus ſemper eſt erectus, cum ſemper ſit imago & objectum ex eadem parte reſpectu centri infinite diſtantis.

Coroll. II. Si radii convergant, imago ſemper erit ante ſpeculum. Nam in formula ſpeculorum convexorum fit $\frac{-d\infty}{-2d+\infty} = -d$; in altero pro concavis, $\frac{-d\infty}{-2d-\infty} = +d$.

Fig. 21. & 22. N. 1. Tab. II. 39. Scholium. Evidentius elucet veritas hujus rei per conſtructionem geometricam. Sit (fig. 21 & 22. Tab. II) ſpeculum SP, objectum O, ex quo radius OM incidat in M. Facta MR ad SP perpendiculari, ſumatur angulus RMN = OMR, & producatur verſus I, donec occurrat in I perpendiculo OA pariter producto. Evidens eſt, ob parallelas OA, MR, eſſe NMR = MIA, & cum etiam NMR, ſeu RMO = MOA, erit triangulum MIA æquale & ſimile triangulo MOA, & IA = AO. Idem eodem modo oſtenditur de radio O*m* in *mn* reflexo, & concurrente, ſi producatur, cum AI in eodem puncto I.

At ſi radii NM, *nm* convergant ad punctum I, reflectentur in O, ita, ut ſit IA = AO, uti ex æqualitate eorundem triangulorum intelligitur.

Fig. 22. N. 1. Tab. II. 40. Coroll. III. Si radii ex puncto O (fig. 22 Tab. II) incidant divergentes in ſpeculum planum PS, cauſtica per reflexionem redigitur ad unicum punctum. Erit enim OM = y, & ob radium ſphæricitatis infinitum, fiet quoque a infinitum, & formula $\frac{ay}{2y \pm a}$ abit $\frac{y\infty}{\pm\infty} = \pm y$; igitur MI = MO, conſequenter etiam OA = AI, ubicunque ſumatur M. Hinc clarum eſt, objecti O imaginem unicam poſſe videri, in quotcunque oculos radii reflexi incurrant. Inde quoque eſt, quod, ſi plura ſint ſpecula in eodem plano diſpoſita, unicam imaginem exhibeant; at ſi ſpecula fuerint in diverſis planis (aut fragmenta ejuſdem ſpeculi acquirant diverſam inclinationem), tot videri poterunt objecti imagines, quot diverſa perpendicula ad diverſa ſpeculorum plana duci poſſunt.

Fig. 23. Tab. III. 41. Coroll. IV. Objecti verticalis AB (fig. 23 Tab. III) imago *ba* in ſpeculo horizontali SP apparet ſitu inverſo. Sit enim oculus in O conſtitutus. Producta AB ultra ſpeculum, ut ſit QB = Q*b*, QA = Q*a*, conjungantur puncta *b* & *a* cum oculo O; erunt puncta interſectionum N & M cum ſpeculo ea, in quæ radii ex B & A incidere debent, ut reflexione ad oculum perveniant. Nam ONS = QN*b*; & proin etiam BNQ = ONS. Eodem modo eſt OMS = QM*a* = QMA &c. Apparet autem, a ſpectatore in O collocato videri punctum *b* ſupremum, & *a* infimum.

Fig. 24. Tab. III. 42. Coroll. V. Si ſpeculum SP (fig. 24 Tab. III) ſit ad horizontem SA inclinatum ad angulum 45°, ſpectatori O objectum AB horizontale videri debet verticale in *ab*. Demiſſis ex B & A ad ſpeculi pla-

num

num perpendiculis Bq, AQ, ſumptisque $qb = Bq$, & $Qa = QA$, clarum eſt, eodem modo determinari puncta incidentiæ N & M, ut radii ex B & A incidentes reflectantur ad O. Jam vero ob Bq, AQ parallelas, & $bq = qB$, $aQ = QA$, eſt $qB : QA = qb : Qa = SB : SA = Sb : Sa$; ita, ut ſicut A, B jacent in eadem recta, quæ cum SP facit angulum 45°, ſic quoque puncta b, a ſita eſſe debent in recta eadem, quæ comprehendat cum SP æqualem angulum. Hoc ipſo autem erit $aSP = PSA$, & $aSA = 90°$, proinde eſt ab ad horizontem SA perpendicularis.

43. Coroll. VI. Si objectum AB (fig. 25 Tab. III) ſit ſpeculo SP parallelum, ab oculo O in eadem cum objecto diſtantia a ſpeculo poſito, totum videri poteſt in parte ſpeculi, quæ ſit $\frac{1}{2}$ AB. Determinatis punctis incidentiæ, ut prius, patet, triangula Oab, OMN eſſe ſimilia, & ab (ſeu AB, ob aA, bB æquales & parallelas): $MN = aO : MO = aA : SA = 2 : 1$. Et generatim eſt longitudo objecti ad longitudinem partis ſpeculi, ut diſtantiarum oculi & objecti a ſpeculo ſumma ad diſtantiam oculi ab eodem ſpeculo. Ut quis ergo ſe totum videat in ſpeculo, hoc dimidiam ſpectatoris longitudinem habere debet. Et ſi in quavis diſtantia ſe quis totum videre nequeat, nil juvat acceſſus ad ſpeculum. Fig. 25. Tab. III.

44. Scholium I. Qui faciem ſuam in ſpeculo intuetur, eam haud aliter conſiderat, ac vultum alterius ſibi directe faciem obvertentis. Jam vero pars dextera alterius ſiniſtræ noſtræ reſpondet, & ex oppoſito; unde videmus quidem noſtram propriam faciem in ſpeculis planis, attamen oculus dexter ſiniſtra parte apparet, & ſiniſter dextera &c.

Scholium II. In ſpeculis uſitatis vitreis, quorum altera ſuperficies, poſtica nempe, lamina ſtannea interfuſo mercurio obducitur, duplex videtur imago; nam (fig. 22 N. 2) radiorum pars La, La e lucido L in aa incidentium, ab ipſa prima ſuperficie vitri reflectitur illico verſus dd, illicque imaginem objecti exhibet; pars vero eorundem radiorum refracta venit ad poſticam ſuperficiem bb, atque inde reflexa denuo in cc refringitur verſus ee, ubi præcipue videtur objecti imago altera principalis. Si radii ſatis oblique incidant, ſæpe aliqui ex cc rurſus reflectuntur verſus poſticam ſuperficiem, indeque verſus primam, ut ſæpe 7 vel octo, aut plures imagines diſcerni poſſint, cum fere nulla fiat transmiſſio lucis ſine reflexione. Putarunt aliqui, vitrum conſtare pluribus laminis, quæ ſingulæ exhibeant ſingulas imagines. Verum nullum hujus rei habemus fundamentum, & reflexionum, refractionumque plurium, quas certo fieri ſcimus, ope ſatisfit phænomeno.

45. Theorema II. Si ſpeculum planum SP (fig. 26 Tab. III) convertatur circa axem per I tranſeuntem, in quod radius LI incidit, motus angularis ſpeculi erit dimidius motus angularis radii reflexi. Demonſtr. Sit AI perpendiculum ad punctum incidentiæ I; erit ex le- Fig. 26. Tab. III.

ge

ge reflexionis angulus LIA = AIl, & angulus LIl, quem radius incidens LI cum reflexo Il comprehendit, differet a duobus rectis duplo angulo LIS, ſive LIS + lIP = 2LIS. Conficiat ſpeculum angulum SIs, movebitur etiam perpendiculum AI æquali angulo AIa; & fiet angulus incidentiæ LIa æqualis angulo reflexionis aIλ, & angulus comprehenſus ab incidente LI, & reflexo Iλ debet a duobus rectis deficere duplo angulo LIs, ſeu angulis LIs + λIp = 2LIs. Eſt autem 2LIs = 2LIS — 2SIs; igitur cum defectus a duobus rectis imminutus ſit 2SIs, evidens eſt, radio incidente interea perſtante ſine motu, angulum 2SIs confici a radio reflexo, ut adeo ſit lIλ = 2SIs. Q. E. D.

46. Scholium. Hinc eſt, quod radii ſolares ſpeculo verſus parietem, aut tabulatum reflexi videantur magnos motus efficere, ſi ſpeculum tantillo inclinetur.

47. Quando duo ſpecula plana AC, BC (fig. 27 Tab. III) ſub angulo aliquo conjunguntur ad C, & intra ea ſit objectum quodpiam S, complures ejus imagines oculo O intra eadem ſpecula ſito repræſentari poſſunt. Ne linearum multiplicitas confuſionem pariat, loco radiorum divergentium ſemper ſimplicem lineam adhibebimus. Ducatur ex S ad ſpeculi CA planum perpendicularis Sa, producenda in a 1, ut ſit Sa = a 1, & conjungatur 1 cum oculo O; ſecabitur in b ſpeculum CA. Ducatur ex S ad b recta Sb, quæ ſi ſit radius incidens, reflectetur in O, & oculus O referet punctum S in locum 1, utpote cum in triangulis æqualibus 1ba, abS angulus 1ba = abS, & ab1 = ObC. Si denuo ex 1 demittatur in ſpeculi BC planum perpendiculum 1g, & fiat 1g = g2, videbitur nova imago puncti S in loco 2 ab oculo O. Recta 2O ſecet ſpeculum BC in h; ducatur 1h occurrens ſpeculo AC in c; conjungatur S cum c. Erunt triangula 1ca, acS ſimilia, & acS = hcC, ideoque radius incidens Sc reflectetur ex c in h. Quia 1g = g2, etiam triangula h1g, hg2 ſimilia & æqualia ſunt, proindeque gh2 = gh1 = OhB, & radius ch reflectetur ex h in O, videbiturque altera imago in loco 2. Si ex 2 in ſpeculum AC (productum ſi neceſſe ſit) demiſſum perpendiculum 2i producatur, ut fiat 2i = i3, & ducatur 3O, ſecans ſpeculum AC in k; conjungaturque k cum 2, ut BC ſecetur in l; l iterum conjungatur cum 1, ſecto AC in d, & denique ducatur radius incidens Sd, reflectetur is in dl, dl reflectetur in lk, & lk in kO, ut oculus per tres reflexiones in d, l, k factas videat objecti S tertiam imaginem in loco 3, & ſic porro.

Fig. 27. Tab. III.

48. Incidat modo ex S radius in ſpeculum BC. Facto perpendiculo Sα = αI, & ducta IO, quæ interſecat ſpeculum in β, erit β punctum incidentiæ radii Sβ, qui in βO reflectitur, ob triangula S$\beta\alpha$, $\alpha\beta$I ſimilia & æqualia, angulumque S$\beta\alpha$ = OβC. Si ex I demittatur perpendiculum in AC, & fiat eadem operatio, manifeſtum eſt, apparituram novam objecti S imaginem in II, inde conſimili ratione determinabitur tertia in loco III &c.

49.

49. Methodum hanc determinandi loca imaginum consideranti patebit *primo*: ut imago aliqua in extremo perpendiculi videri possit, debere rectam inde ad oculum ductam secare speculum, ad quod perpendiculum ductum est. Nam hoc punctum intersectionis est semper ultimum ex reflectentibus, seu id, quod radios immediate ad oculum O remittit. Sic ut videatur imago in loco 3, debet recta 3O secare speculum AC in *k*. In præsente schemate videntur imagines ex radiis in AC incidentibus tantum quinque in 1, 2, 3, 4, & 5. Si ex 5 demittatur perpendiculum in planum speculi BC, & fiat 5E = E6, puncto 6 cum O conjuncto non secatur speculum BC a recta 6O, unde sexta imago non amplius videtur. Eodem modo ex radiis in CB incidentibus videntur tantum quinque imagines in I, II, III, IV, & V; sexta VI videri nequit, quia si ducatur recta VIO, hæc non amplius secat speculum CD.

Secundo: punctum intersectionis cum speculo, ad quod demittitur perpendiculum, cum recta extremum perpendiculi cum loco oculi conjungente, semper conjungendum esse cum loco imaginis præcedentis; & ubi recta hæc secat speculum alterum, esse itidem alterum punctum reflectens, conjungendum cum imagine præcedente, & sic porro, donec veniatur ad imaginem primam, & ad ipsum objectum S.

Tertio: Tot fieri pro quavis imagine reflexiones, quota quævis numero est. Sic secunda videtur post duas reflexiones in *c* & *h*; tertia post tres in *d*, *l*, & *k* &c.

Quarto: distantiam apparentem cujuslibet imaginis æquari longitudini viæ, quam conficit radius ab objecto usque ad oculum. Sic distantia $O3 = Sd + dl + lk + kO$. Quippe $O3 = Ok + k3$. Est vero $k3 = kl + l2$, & $l2 = ld + d1$, $d1 = dS$, unde substitutione æqualium facta habetur $O3 = Sd + dl + lk + kO$.

Quinto: Loca imaginum 1, 2, 3 &c, I, II, III &c esse in peripheria circuli radio SC æquali distantiæ objecti S ab angulo C descripti. Cum enim sit $aS = a1$, & ad a utrinque recti, erit AC locus omnium punctorum ab 1, & S æqualiter distantium, & proinde si ducerentur ad 1 & S ex C rectæ, hæ forent æquales. Eodem modo cum sit $1g = g2$, & $1gC = Cg2 = 90°$, fieret $C1 = C2$, & hinc per 1, S & 2 transit idem circulus radio SC centro C descriptus. Idem patet de imaginibus I, II, III &c, nam ob $S\alpha = \alpha I$, & rectos ad α, fieret CS = CI &c.

Verum cum constructio geometrica molesta sit, operæ pretium erit aliter & numerum imaginum, quæ a radiis in utrumvis speculum incidentibus repræsentantur, & simul earum loca per solam translationem arcuum, qui per inclinationem speculorum, & situm objecti S, & oculi O dantur, definire. Unde sit

50. Problema. Datis angulis ACS, SCO, vel SCL, LCB, sola translatione arcuum datorum definire situm, & numerum imaginum, quæ ab oculo in O collocato videri possunt.

Resolutio. Sit SCA $= b$, LCA $= a$, LCB $= c$. Ex constructione superius (47) allata patet, ut videatur prima imago in 1, debere esse $A1 = AS = b$; secus enim perpendiculum Sa non foret æquale cum $a1$: adeoque erit arcus $LA1 = LA + A1 = a + b$. Ut secunda imago videatur in 2, debet perpendiculum $1g$ æquari cum $g2$, consequenter etiam arcus $1B = B2$; & cum habuerimus $1L = a + b$ addito $LB = c$, fiet $1B = a + b + c$; sed ut habeatur LB2, denuo addi debet LB ad B2, fietque $L2 = a + b + 2c$. Eodem modo ut videatur tertia imago in 3, debet arcus A3 æqualis sumi cum A2. Atqui est $A2 = AL + L2 = a + a + b + 2c = 2a + b + 2c$ & hinc addito $AL = a$ fiet $L3 = 3a + b + 2c$. Ut quarta imago appareat in 4, faciendum, ut sit $B4 = B3 = L3 + LB = 3a + b + 2c + c = 3a + b + 3c$. Cum ergo $B4 = 3a + b + 3c$, erit $L4 = 3a + b + 4c$. 5*ta* imago in 5 videbitur, si fuerit arcus $A5 = A4 = L4 + LA = 3a + b + 4c + a = 4a + b + 4c$. Unde cum sit $A5 = 4a + b + 4c$; addito $AL = a$, habebitur $L5 = 5a + b + 4c$.

Ex his jam patet progressus arcuum, qui ex L versus sinistram in 1, 3, 5 &c, & versus dexteram in 2, 4, 6 &c transferri debent, ut loca imaginum definiantur per reflexionem radiorum ex S in speculum AC incidentium: nempe

$L1 = a + b$		$L2 = a + b + 2c$	
	$1.3 = 2a + 2c$		$2.4 = 2a + 2c$
$L3 = 3a + b + 2c$		$L4 = 3a + b + 4c$	
	$3.5 = 2a + 2c$		$4.6 = 2a + 2c$
$L5 = 5a + b + 4c$		$L6 = 5a + b + 6c$	
	$5.7 = 2a + 2c$		$6.8 = 2a + 2c$
$L7 = 7a + b + 6c$		$L8 = 7a + b + 8c$ &c	
	$7.9 = 2a + 2c$		
$L9 = 9a + b + 8c$ &c			

Habent igitur arcus pro imaginibus numero imparibus æque, ac paribus, eandem differentiam $2a + 2c$. Quare si prima, & secunda semel definita sit, tantummodo opus est, ut inde ex 1 in 3, ex 3 in 5 &c, transferatur duplus arcus AB, seu $2a + 2c$, qui arcus (AB) angulum C metitur. Idem si fiat ex 2 in 4, ex 4 in 6 &c, habebuntur omnes imagines ex speculo AC.

51. Verum ex hoc progressu arcuum L1, L3 &c, L2, L4 &c nondum constat, quæ imago ultima videatur, quæ prima non videatur. Producantur itaque AC in D, LC in F, BC in E; si quis arcus L1, L3, L5 &c cadat ultra F versus D; aut L2, L4, L6 ultra F versus E, ejus imago videri nequit, id est, si fuerit ejusmodi arcus major 180°. Cum enim intersectio rectæ ab extremo arcus L5 vel L4 &c ad O ductæ cum speculo punctum postremo reflectens definiat (49), cadente eo extremo ultra F intersectio cum speculo non habetur, sed

ad

ad summum cum speculi productione, in qua nullum punctum aptum est reflectendo radio. Et certe punctum ultimo reflectens speculi debet semper esse inter oculum, & locum apparentem imaginis. Sic quia arcus LD6 excedit semicirculum LDF, recta 6O non secat speculum CB, in quo deberet esse punctum reflectens immediate ad oculum O; & si punctum 6 caderet intra F & E, 6O secaret tantum CE, non speculum CB. Ceterum ex constructione allata superius liquet, semper in illo speculo debere esse punctum ultimo reflectens, in quod demittitur perpendiculum; nempe pro imaginibus numero imparibus in speculo CA; pro numero paribus autem in speculo CB. In schemate præsente intelligitur, posse per utrumvis speculum haberi quinque imagines, universe decem, ut mox patebit.

52. Quia objectum S speculo AC tantummodo sinistram (si dicere licet) faciem obvertit, omnes imagines 1, 2, 3, 4, 5 eandem exhibere possunt. At quia speculo BC dexteram objicit, imagines efformatæ per radios in BC incidentes exhibebunt omnes partem dexteram objecti. Ut numerus, & situs harum definiatur, opus tantum est, ut ponatur LCB $= a$, LCA $= c$, & SCB $= b$; invenietur pro imparibus ex parte LBF, pro paribus ex parte LAF.

LI $= a + b$		LII $= a + b + 2c$	
LIII $= 3a + b + 2c$	I. III $= 2a + 2c$	LIV $= 3a + b + 4c$	II.IV $= 2a + 2c$
LV $= 5a + b + 4c$ &c	III. V $= 2a + 2c$	LVI $= 5a + b + 6c$	IV.VI $= 2a + 2c$

53. Si punctum S congruat cum O (uti si oculus seipsum spectet); aut etiam si angulus SCL evanescat, seu fiat $a = b$, attamen O non cadat in S, in arcubus superius definitis ponendum erit pro speculo AC,

L1 $= 2a$		L2 $= 2a + 2c$	
L3 $= 4a + 2c$	1. 3 $= 2a + 2c$	L4 $= 4a + 4c$	2. 4 $= 2a + 2c$
L5 $= 6a + 4c$ &c	3. 5 $= 2a + 2c$	L6 $= 6a + 6c$ &c	4. 6 $= 2a + 2c$

Et siquidem dicatur SCB $= a$, SCA $= c$, eædem expressiones servient pro imaginibus speculi BC.

54. Si præterquam, quod punctum O cadat vel in lineam CS, vel in S, etiam fuerit LB (vel SB) $=$ LA, erit $a = b = c$, & tunc erit pro utroque speculo L1 $= 2a$, L2 $= 4a$, L3 $= 6a$, L4 $= 8a$, L5 $= 10a$, & eadem ubivis differentia $2a$.

55. Scholium. Hoc idem argumentum pertractat *Illustris Kæstnerus* in *Differt.* II *lecta in soc. Reg. Scient. Göttingana* A. 1757., & edita *Altenburgi* 1771. Verum (ut mihi quidem videtur) methodo paullo operosiore.

56. Ponatur modo angulus ACB $= 180°$, fiet ACB unicum planum, ideoque unica imago videri poterit, tum per N. 40, tum etiam propterea, quod arcus $a + b + 2c$ jam excedat duos rectos. Multo minus fieri potest, ut plures una videantur imagines, si specula faciant angulum versus oculum duobus rectis majorem, uti constructionem tentanti, vel angulos $a + b + 2c$ consideranti facile patebit.

57. Supereſt adhuc caſus, qui attentionem meretur, dum nempe ſpecula ((fig. 28 Tab. IV) AC, BD ſunt parallela, ſeu dum angulus, quem comprehendunt, ſit infinite parvus. Cogitandum eſt, peripheriam circuli figuræ prioris abire in rectam infinitam PABQ ad plana ſpeculorum perpendicularem. Si per locum oculi O ducatur parallela ad ſpecula OL, erunt arcus $LA = a$, $SA = b$, $LB = c$ rectæ cognomines, fietque iterum pro prima imagine 1, $L1 = a + b$, pro ſecunda $L2 = a + b + 3c$; pro tertia $L3 = 3a + b + 2c$; pro quarta $L4 = 3a + b + 4c$, & ſic porro. Hinc locus imaginum erit recta, in quam peripheria circuli abit, & quidem pars AP continebit imagines numero impares, pars BQ numero pares. Quoniam autem ſpatia a, b, c, finita ſunt, quocunque numero finito nunquam poterunt æquare ſemiperipheriam circuli infinite magni, ideoque fieri poſſunt imagines infinitæ numero. In praxi tamen haud adeo multæ diſcernentur, cum per repetitas reflexiones lux admodum debilitetur, ut non amplius oculum ſufficienter afficiat. Quod de imaginibus efformatis ex radiis in ſpeculum AC diximus, intelligi etiam debet de iis, quæ fiunt radiis incidentibus in ſpeculum BD, nempe I, II &c; & ſiquidem ponatur $LB = a$, $SB = b$, $LA = c$, erunt eædem expreſſiones diſtantiarum ab L, ſive L. I, L. II &c.

Fig 28. Tab. IV.

58. Ut via radiorum, & puncta reflectentia determinentur, eadem tenenda eſt methodus, quam in primo caſu obſervavimus. V. g. Conjungatur tertia imago 3 cum oculo O, ſecabitur ſpeculum AC in n; ad n ducatur ex loco 2 imaginis præcedentis $2n$, quæ occurret alteri ſpeculo BD in r; r denique conjungatur cum prima imagine 1, & habebitur in interſectione d cum AC punctum incidentiæ radii Sd, qui inde reflectitur in dr, tum ex r in rn, & ex n in oculum nO. Liquet ex hac conſtructione, omnia corollaria locum habere, quæ in præcedentibus attulimus, uti quod via radii varie reflexi æquetur diſtantiæ apparenti. Sic $O3 = On + n3$; ſed $n3 = n2 = nr + r2$; $r2 = rd + d1$, & $d1 = dS$; igitur $O3 = On + nr + rd + dS$.

59. Cum imagines infinitæ de ſe haberi poſſint, evidens eſt, rectam ex O ad infinitam diſtantiam rectæ PQ ductam fieri cum eadem PQ parallelam. Unde conſtat, ſi ducatur per O parallela MN; longitudine ſpeculorum AM, BN comprehendi omnia puncta reflectentia pro infinitis imaginibus, ut adeo pro his poſitionibus oculi, & objecti, portiones MC, MD ſint inutiles. Et ſi oculus congrueret cum S, omnes reflexiones fierent in punctis A, & B, quæ ſimul eſſent puncta incidentiæ.

ARTI-

ARTICULUS V.

De speculis cylindricis, conicis, & pyramidalibus.

60. Usus præcipuus horum speculorum est oblectatio spectantium, quorum vultus eorum ope deformes redduntur, & imagines ex industria deformatæ debita partium proportione repræsentantur. Cylindrica specula, si latera spectes, e planis participant; si convexitatem, e sphæricis. Unde objecta iis parallela debita longitudine exhibent; sed latitudinem eorum instar sphæricorum convexorum imminuunt. Conica ex utriusque generis speculis aliquid habent, hoc discrimine, quod annuli infinite tenues repræsentent objecta instar sphæricorum semper versus verticem decrescentium, latera autem velut plana inclinata. Exponemus methodum graphicam deformandi imagines in plano horizontali, quæ dein in speculo cylindrico debita proportione exhibentur; simulque demonstrabimus, puncta hunc in modum in plano horizontali determinata rite debere videri ob oculo, si is debitum situm obtineat. Agemus autem primum de cylindricis convexis; dein eadem speculis cylindricis cavis applicabimus.

61. Imago deformanda pingatur debita proportione partium prius in aliquo parallelogrammo AFK*a* (fig. 29 Tab. IV), quod in areolas parallelogrammas minores, & inter se æqaales dividatur. Debet autem basis hujus imaginis (quam *craticulam prototypi* dicemus) FK haud excedere chordam 130, vel 140 graduum baseos cylindri. Tum in plano horizontali descripto circulo FSMTK (fig. 30 Tab. IV.) centro Q, & radio æquali radio baseos cylindri transferatur in rectam per centrum Q transeuntem QO, quæ sit æqualis distantiæ oculi ab axe cylindri super descripto circulo verticaliter collocando. Applicetur huic circulo basis *craticulæ prototypi* FK, ita, ut per QO bifariam, & perpendiculariter in H secetur, fiatque in hac chorda eadem divisio in G, H, I &c, quæ in craticula prototypi. Per divisionum puncta ducantur ex O indefinitæ OFA′, OGg′, OH*h*′, OI*i*′ &c. Erigatur ad OA′ in F perpendicularis FA æqualis altitudini FA craticulæ prototypi, & in totidem æquales partes in B, C, D &c secetur. Pariter fiat OV ad eandem OA′ perpendicularis, & æqualis altitudini oculi supra planum horizontale, in quo imago deformata pingenda est. Ex V agantur per A, B, C, D, E &c rectæ, quæ occurrant in A′, B′, C′, D′, E′ rectæ A′O, & fiant A′*k*′, B′*b*′, C′*c*′, D′*d*′ &c ad chordam FK parallelæ; habebitur trapezium A′*k*′KF divisum in totidem areolas, in quot parallelogramma divisa est craticula prototypi, quod trapezium nil aliud est, quam projectio perspectiva craticulæ prototypi, ideoque etiam *craticula perspectiva* vocari potest. Etenim si ocu-

Fig. 29. Tab. IV.

Fig. 30. Tab. IV.

 lus

lus ponatur supra O altitudine OV constitutus, & craticula prototypi verticaliter super chorda FK baseos cylindri, hæc craticula obteget oculo accurate craticulam perspectivam, & radius ex oculo per datum punctum craticulæ prototypi ductus incurret in punctum correspondens craticulæ perspectivæ. Unde etiam si ea proportione, qua areolæ perspectivæ longiores, aut latiores sunt areolis prototypi, partes imaginis prototypæ correspondentes depingerentur in areolis perspectivis, remota imagine prototypa, imago perspectiva eodem modo apparere deberet, quo ipsum prototypon. Eo igitur redit artificium deformandi imaginem prototypam, ut designentur correspondentia spatia in plano horizontali, ex quibus radii incidentes in cylindri superficiem reflectantur ita in oculum, ut producti radii reflexi incurrant in areolas perspectivas.

62. In hunc finem ducantur e centro Q ad puncta F, S, M, T, K, in quibus arcus baseos cylindri per rectas OA$'$, Og', Oh' &c secatur, radii, & producantur indefinite in L, P, R, X &c. Fiat OFL = LFa, & transferantur ex puncto F, Fe = FE$'$, Fd = FD$'$, Fc = FC$'$, Fb = FB$'$, Fa = FA$'$. Eodem modo facto angulo OSP = PSg, transferantur successive divisiones SG rectæ Sg', ut postremo sit Sg = Sg'. Idem fiat cum reliquis rectis OM, OT, OK &c. Si puncta a, g, h, i, k &c conjungantur, habebuntur spatia mixtilinea, quæ respondent areolis perspectivis, in quibus spatiis depingendæ sunt eædem partes imaginis, quæ habentur in areolis correspondentibus craticulæ prototypi. Sic quod exhibetur in parallelogrammo Bg (fig. 29), idem ea proportione latius pingendum erit in spatio curvilineo gb fig. 30.

63. Demonstrandum modo est, singula correspondentia puncta in spatiis mixtilineis ita determinata, eodem modo videri ab oculo in assumpta altitudine, & distantia collocato, ac si ipsam prototypam imaginem intueretur. Accipiamus (fig. 29) in craticula prototypi punctum n, intersectionem nempe rectarum gG, & Bb; respondet huic in craticula perspectiva (fig. 30) punctum n', intersectio rectarum Gg', B$'b'$; in spatio itaque mixtilineo eidem respondet punctum N. Sumpsimus enim angulum OSP = PSg, & Sn' = SN. Hoc posito repræsentet in fig. 31 Tab. IV. MRTFSK partem cylindri oculo obversam, KFAa craticulam prototypi verticaliter chordæ FK insistentem,

Fig. 31. Tab. IV. FA$'k'$K exhibeat craticulam perspectivam : Qq sit axis cylindri, OV altitudo oculi supra planum horizontale, & QO ejus distantia ab axe cylindri. Si ex V ducatur per intersectionem n rectarum Bb, Gg craticulæ prototypi recta, ea vi constructionis producta incidet in correspondens punctum n' craticulæ perspectivæ. Ex S, ubi On' secat basin cylindri, erecta perpendicularis SR erit latus cylindri, quod in s secat radius Vn'. Jam vero fecimus angulum OSP = PSN, & Sn' = SN; quare si ducatur sN, NO, & in P erigatur ad planum horizon-

rizontale perpendicularis Pp, ac N conjungatur cum V, patet, fore triangula NPp, NOV ſimilia; triangula sn'S, sNS vero ſimilia & æqualia, denique triangula sn'S, n'VO ſimilia. Habetur ergo ob NSP = PSO, NS: SO = NP: PO; ſed NP : PO = Np: pV; ergo etiam NS: SO = Np: pV. Sed eſt quoque NS: SO = n'S: SO = $n's$: sV = Ns: sV; igitur Np: pV = Ns: sV. Quare in triangulo NsV eſt angulus ad s per sp biſectus, eſtque ps = PS, & parallela, ad ſuperficiem cylindri perpendicularis, conſequenter ſi radius lucis ex N digreſſus incidat in punctum s ſuperficiei cylindri, reflectetur ex s in oculum V, qui punctum plani horizontalis N ad n, vel n' referet. Q. E. D.

64. Ex his, quæ modo de ſpeculis convexis cylindricis diximus, facile intelligetur, quæ conſtructio adhibenda ſit, dum ſpecula cylindrica ſunt concava. Iterum conſtruenda eſt craticula prototypi (fig. 32 Tab. V) AEFk in parallelogramma minora, & æqualia dividenda. Deſcribatur centro Q radio æquali radio baſeos cylindri circulus KLMNT (fig. 33 Tab. V); in tangentem medii puncti arcus M transferatur utrinque MF = ME dimidia baſis craticulæ prototypi fig. 32. Ducatur ad K radius QK, uti etiam chorda arcus KT, fiatque angulus TKQ = QKO. Major arcus KMT aſſumi non poteſt, cum alias partes imaginis deformatæ in cavitatem ſpeculi radiare non poſſent, quæ ſcilicet ultra chordam productam ka ſitæ forent. E medio puncto M arcus KMT ducatur per centrum Q recta indefinita, quam KO interſecet in O, erit OQ diſtantia oculi ab axe cylindri. Projectio perſpectiva craticulæ prototypi fit prorſus, ut pro cylindro convexo: nempe aguntur ex O per diviſionum puncta K, L, M ſeu H, I, F rectæ indefinitæ, uti etiam erecta ad OA' perpendiculari OV æquali altitudini oculi, & altera EA æquali altitudini craticulæ prototypi, ducuntur per A, B, C, D rectæ ex V, ut ſecetur OA' in A', B', C', D'; item fiunt ad E'F parallelæ A'k', B'b', C'c' &c, ut ſchema intuenti patet. E centro Q ductis ad puncta K, L, M, N, T radiis, fiant anguli QKO, QKa; uti etiam OLQ, QLg; item QNO, QNi; denique QTO, QTk, æquales. In Ka transferantur diſtantiæ KE', KD', KC', KB', KA'; uti etiam in Lg puncta interſectionum rectæ Lg'; in Ni interſectiones rectæ Ni'; & in Tk interſectiones rectæ Tk'. Si hæc puncta conjungantur, orientur curvæ $agik$, bfl, uxc, dro, eqMn &c. Inter poſtremas areas mixtilineas continentur areolæ infimæ craticulæ prototypi, in quibus proinde depingendæ ſunt partes imaginis ita, ut quæ dexteram partem occupant, reipſa ex parte dextera delineentur, & quæ in prototypo ſunt ſiniſteriora, etiam in ſpatiis mixtilineis ex ſiniſtra parte deſignentur. At vero areola mixtilinea $agsb$ reſpondet trapezio A'$g'n'$B' craticulæ perſpectivæ, & ſic porro dexteriora ſpatia plani horizontalis continere debent partes imaginis ſiniſteriores, idque uſque ad punctum aliquod, in quo plurimæ rectæ ſe ſecant

Fig. 32. Tab. V.
Fig. 33. Tab. V.

cant

cant inter *uxc*, & *dro* ſitum. In hoc ſi quid fuerit depictum, exhibebit intuenti integram lineam horizontalem, quam lata eſt chorda KT.

65. Quod puncta quælibet rite determinata ſint, id eſt, ita, ut ſi inde emittantur radii in ſpeculi cylindrici cavitatem, debeant reflecti ad oculum, eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo id ſuperius de convexis præſtitimus. Unde opus tantum eſt, ut quis figuram ſibi eadem fere ratione conſtruat, qua 31*am* Tab. IV, paucis admodum mutatis.

Fig. 34. Tab. V. 66. Ut etiam de ſpeculis conicis aliquid dicamus, ſit (fig. 34 Tab. V) CAE triangulum rectangulum ad A, cujus rotatione circa axem CA conus generatur. Deſcribatur radio CE circulus æqualis baſi coni, & diviſo radio CE in quotlibet partes æquales *ca*, *ab*, *bd*, *d*E deſcribantur totidem circuli concentrici. Peripheria præterea EIY dividatur in partes quotvis æquales, & ducantur per diviſionum puncta e centro radii indefinite ultra peripheriam. Producatur CA in V, ut ſit AV diſtantia oculi a vertice coni, aut potius altitudo ſupra verticem coni, cujus baſis congruere debet cum EIY. Circulus hunc in modum in areas C*fa*, *afgb*, *bghd* &c diviſus erit craticula prototypi, cujus imago debita partium proportione in eo delineanda eſt.

Ad puncta diviſionum radii CE, nempe ad *a*, *b*, *c*, *d*, ducantur ex V rectæ, ſecantes latus coni AE in B, D, F &c, fiantque anguli ABV = EBB′, ADV = EDD′, AFV = EFF′, & tandem CAE =EAA′. Centro communi C, radiis CF′, CD′, CB′, CA deſcriptis circulis, habebitur in annulo, cujus latitudo eſt EA, rete, in quo deformanda eſt imago delineata in craticula prototypi, ita, ut quæ continentur in ſpatio E*dh*I, depingantur in ſpatio EIKF; quæ ſunt in area *dbgh*, delineentur in F′KLD′, & ſic porro; ut proinde pars imaginis circello minimo radii C*a* comprehenſa, referenda ſit in extimum annulum retis.

67. Conſtructionem eſſe rite factam, vel ex hoc patebit, ſi cogitetur triangulum CAE verticaliter erigi ad planum circulorum, una cum lineis VAA′, VBB′, VDD′ &c, & revolvi circa axem immotum CAV. Evidens eſt, puncta E, F′, D′ &c percurſura ſucceſſive ſuas quodlibet peripherias, adeoque v. g. D′ congruet aliquando cum L (quod reſpondet puncto *g* craticulæ prototypi), & lineæ VDD′ facient cum latere coni interea eoſdem ſemper angulos, conſequenter appellente E ad I, ſi ex L incidat in latus coni (quod tunc AI erit) radius in punctum D, ob æqualitatem angulorum incidentiæ, & reflexionis (qui ſcilicet manent D′DE = VDA), reflectetur ad V, ut proinde oculus in V poſitus referat imaginem puncti L ad punctum *g*.

Fig. 35. Tab. V. 68. Ut ne omiſiſſe videamur ſpecula pyramidalia, ſit pyramis recta, & baſis quadratæ RSEY. Dimidia diagonalis CE ſecetur in quotvis partes æquales C*a*, *ab*, *bd*, *d*E. Sit CA ad CE perpendicularis æqualis altitudini pyramidalis ſpeculi, cujus vertici A imminere debet ocu-

lus

lus V, ex quo ductis Va, Vb, Vd, VE &c fiant anguli CAE = EAA', ABV = EBB', ADV = EDD' &c. E punctis A, B', D' &c hunc in modum determinatis ducantur ad latera basis pyramidis parallelæ, & compleantur quadrata. Denique diviso latere basis EY in æquales partes, ducantur ex C per divisionum puncta I, P, Q &c rectæ, producendæ in AM &c. Jam e prioribus intelligitur, RSEY esse craticulam prototypi, cujus areolis *EIhd*, *hdbg* &c respondent areæ EF'KI, F'D'LK, & sic porro, ut quisque per se facile videt. Sed de his satis; progrediamur ad utiliora.

ARTICULUS VI.

De magis usitatis instrumentis catadioptricis.

69. Præcipua instrumenta, quibus visui nostro Catoptrica juncta Dioptricæ succurrit, sunt telescopia, & microscopia; illis acies oculi ad ingentia spatia extenditur; his etiam iis cernendis redditur apta, quæ eam alias præ exilitate effugerent. Telescopiorum porro referemus tria magis usitata genera, quorum primum a *Newtono* nomen accepit, atque observationibus Astronomicis præcipue servit, quod objecta situ inverso exhibeat, quæ res quidem siderum spectatoribus nihil creat molestiæ, cum terrestria objecta situ debito spectare desideremus.

Capsæ cylindricæ, aut prismaticæ polygonæ GHIN (fig. 36 Tab. V) ad fundum HI inditur speculum concavum DC, cujus focus sit v. g. *o*. Lateri capsæ NI inseritur tubulus intra crenas mobilis PQRS, continens lenticulam brevis foci LM. Huic tubulo ope brachii metallici connectitur etiam specillum planum VT ovalis figuræ, & ad axem speculi DC sub angulo 45° inclinatum, ut una cum tubulo pro objectis magis dissitis speculo DC propius admoveri, ac poscente objecti propinquitate rursus ab eodem removeri possit. Præstatur id plerumque ope cochleæ, ut motus etiam quam minimi commode effici possint. Nos in descriptione accuratiore partium ad telescopia hujusmodi pertinentium haud morabimur, summam rei tantummodo expositurí, præcipue cum instrumenti istius non sit tanta raritas, ut non liceat nobis sumere, jam unum aliquod a nostris lectoribus visum esse. Fig. 36. Tab. V.

70. Sit itaque objectum admodum remotum, e cujus medio puncto O incidant radii OD, OC inter se, & axi speculi DC proxime paralleli, uti etiam ex infimo puncto B alii itidem inter se paralleli BD, BC. Reflectentur priores ita, ut imago puncti O exhibeatur in *o*, posteriores vero, ut punctum B depingatur in *b*, ideoque situs

imaginis ſit inverſus (N. 10). Interponatur modo inter *bo*, & ſpeculum concavum DC ſpeculum planum VT ad axem ſub angulo ſemirecto inclinatum. Neceſſe eſt, ut pars coni radioſi, cujus vertex remoto ſpeculo plano foret *o*, ita reflectatur a ſpeculo, ut vertex veniat ad ω, axe partis reflexæ inſiſtente ad angulum rectum axi priori. Eodem modo pars alterius coni habentis verticem in *b* reflectetur, ut acquirat verticem in β (37 & 42), manente ſitu imaginis $\omega\beta$ inverſo, uti erat in *ob*. Si remoto ſpeculo plano applicaretur lens ocularis *ml* ita, ut ejus focus congrueret cum *o*, videretur imago *ob* ab oculo ad *k* conſtituto ſub angulo *tkm*; quare etiam ſi eadem lens transferatur in LM, ut ejus focus radiorum parallelorum congruat cum ω, videbitur imago $\omega\beta$ ſub eodem angulo *t*KM, eritque augmentum teleſcopii $\frac{t\text{KM}}{b\text{D}o} = \frac{tkm}{\text{ODB}}$, aut cum anguli ſint per hypotheſin admodum parvi, *diſtantia foci ſpeculi* CD, *diviſa per diſtantiam foci lentis ocularis.*

71. Quamvis id genus teleſcopia nihil vitii trahant a diverſa refrangibilitate radiorum (niſi perparum ratione lentis ocularis), ſed tantummodo errore figuræ ſphæricæ afficiantur, qui reapſe perexiguus eſt; nihilominus tamen obſervatio, & experientia certas leges præſcribit, quas in dimenſionibus aperturæ ſpeculorum ſpectata foci longitudine obſervare convenit, utpote cum nunquam ſummam artificum accurationem expectare liceat, ſed plerumque mediocris induſtria adhibeatur. Subjicimus iſthic tabellam, quam *D. de la Caille* ex opere Smithii excerpſit.

Long. foci ſpeculi concavi	Diam. apert. ſpeculi		Longit. mediocris foci vitri ocularis		Augment. diam. apparent. objecti circiter
Ped.	Dig.	lin.	Lin.	centeſ.	
$\frac{1}{2}$	0	11	2	00	36
1	1	6	2	39	60
2	2	6	2	83	102
3	3	3	3	13	138
4	4	1	3	37	171
5	4	10	3	54	202
6	5	7	3	73	232
7	6	3	3	88	260
8	6	11	4	01	287
9	7	7	4	13	314
10	8	2	4	24	340
11	8	9	4	34	365
12	9	4	4	44	390

Lens ocularis variari poteſt pro diverſitate objectorum, neque ita definita eſt ejus foci longitudo, ut non poſſit notabiliter creſcere,

vel

vel decrescere. Sed dimensiones specilli plani pendent ab intersectione conorum radiosorum imaginem objecti depingentium cum eodem specillo, quando objectum est remotissimum, & quando adhibetur lens ocularis foci brevissimi: primum facit, ut axis coni sit omnium brevissimus; alterum ut vertex propius ad oculum spectatoris reflecti debeat, ideoque per speculum planum rescindatur ex cono pars ceteris paribus longior, seu ut sectio propius accedat ad basin, & sit amplior. Denique notandum, cum objecti imago etiam ipsa extensionem habeat, debere accipi tantum objectum, quantum per telescopium cerni potest, adhibito interim specillo justo ampliore, donec ejus dimensiones determinentur, quæ res, si allatæ animadversiones observentur, etiam calculo peragi potest. Sit (fig. 40 Tab. VI) speculi cavi DC axis A*ou*, imago maxima objecti (cujus diameter sub angulo dato cernitur) *bod* efformata a conis radiosis D*b*C, D*o*C, D*d*C. Repræsentet LQ (parallela axi) lineam, in qua esse debet focus F lenticulæ ocularis minimæ, sitque ejus distantia ab axe RF. Accipiatur in axe *o*R = RF; erit *ts* diameter minor ellipseos specilli plani, diameter major vero TV inclinata ad axem sub angulo 45°. Ut autem calculo inveniantur *ts*, TV, ponamus esse *bd* diametrum solis vel lunæ, cujus imago tota videatur in telescopio. Cum hæc cernatur circiter sub angulo 32′, fiat sinus totus ad sinum anguli 16′, ita longitudo foci speculi DC in digitis & lineis ad *ob* pariter in lineis, earumque centesimis &c. Intelligantur producta latera extima conorum radiosorum D*b*, C*d* in *u*: fiatque ut DA − *ob*: AO = *ob* ad *ou*, habebitur *ou* in iisdem dimensionibus. Pariter fiat *uo* + *o*R (vel *uo* + RF): R*t* = *u*A: AD (est AD radius aperturæ speculi, proinde datus in digitis, & lineis &c). Habebitur semiaxis minor ellipseos. Præterea habetur *u*A: AD = *sin.* totus: tangentem anguli A*u*D. Quare in triangulo *u*RT habetur latus *u*R, angulus ad *u*, & angulus *u*RT = *u*R*t* + *t*RT = 90° + 45° = 135°, & hinc datur quoque angulus *u*TR, & invenitur RT. Eodem modo in triangulo R*u*V dantur anguli R*u*V, semirectus *u*RV, & latus *u*R, proinde reperitur RV, eritque VR + RT axis major quæsitus. Axibus igitur *ts*, TV descripta ellipsis dat amplitudinem specilli plani, quæ tamen in usu tantillo major esse debet, cum extrema acies plerumque paullum obtundatur.

72 Si ponatur A*o* = 2 ped. AD = $1\frac{1}{4}$ dig. focus lentis ocularis $\frac{1}{6}$ dig. RF = 2 dig. angulus *b*D*o* = 16′, reperitur *ob* proxime 0,1117 dig. *ou* = 2,355 dig. R*t* = 0,2065 dig. angulus *oub* = 3° 25′ fere. Inde vero obtingit RT = 0,3911 dig. id est axis minor ellipseos = 0,413 dig. seu 4,956 linearum, & TV = 0,7381 dig. vel 8,8572 lin. Quare ellipsi tribui potest axis minor 5 linearum, major vero 9 linearum. Refert hoc loco (Lect. Opt. 309) *la Caille*, esse sibi telescopium habens focum duorum pedum, in quo latitudo specilli plani, seu axis

minor, fit 5 linearum, major fere 7. Fortaſſis diſtantia RF apud eum minor fuerit, ut aliquid redundet in axe minore, ſi major debitam longitudinem habuit.

73. In tubo foci duorum pedum, ſi radius aperturæ ſpeculi cavi ſit $1\frac{1}{4}$ digiti, reperitur radius aberrationis foci in latitudinem ex figura ſphærica juxta N. 29, non major, quam $\frac{1}{18874}$, ſeu 0,000053 non prorſus. Jam vero hac quantitate augetur radius objecti circularis, v. g. ſemidiameter ſolis; cum igitur ex facta hypotheſi hæc videatur ſub angulo 16′, & invenerimus ob = 0,1117, fiat 0,1117 dig. : 960″ (ſeu 16′) = 0,000053 : 0″,45 fere, erit 0″,45 error, quo ſemidiameter objecti juſto major exhibetur per ejusmodi teleſcopium, nempe minor dimidio minuto ſecundo.

74. Paullo ante Newtonum *Jacobus Gregorius* excogitaverat aliud genus teleſcopiorum, quæ objectis terreſtribus apta ſint, eaque ſitu erecto ſpectanda præbeant, & quorum conſtructio huic redit. Speculum cavum DC (fig. 37 Tab. V), & in medio foramine circulari præditum in fundo capſæ GHIN collocatur, quod radios OD, OC e puncto medio objecti, & BD, BC e puncto ejus infimo venientes reflectit, ut imago ob paullum intra focum ſpeculi cavi TV modicæ diametri efformetur ſitu inverſo. Hæc imago inſtar objecti in ſpecillum TV radiantis rurſus ſuam habet imaginem eo longius remotam, quo ipſa foco propior eſt, velut in $\omega\beta$, quæ cum ultra centrum ſit, & ob cis illud, ejus reſpectu inverſa eſt, ideoque ſitum eundem habet, quem objectum OB. Itaque lente LM adhibita, in cujus foco ſit $\omega\beta$, objectum ſitu erecto videri debet.

Fig. 37. Tab. V.

Rurſus apparet, ſpecillum VT ope cochleæ admoveri debere propius ad CD, quando objectum longius diſtans breviorem habet focum, uti ex oppoſito removendum eſt, quando viciniorum objectorum focus creſcit.

75. Quod pertinet ad augmentum, cum anguli ſint ut arcus diviſi per ſuos radios, & arcus exigui non differant a rectis, erit angulus, quo videtur objectum ſine teleſcopio ODB = $bDo = \frac{bo}{oD}$ ad angulum, quo videtur per teleſcopium, $\omega t\beta = \frac{\omega\beta}{\omega t}$, ut $\frac{bo}{oD}$ ad $\frac{\omega\beta}{\omega t}$. Eſt autem (9) $bo : \omega\beta = or : r\omega$ (poſito nempe r centro ſpeculi VT, & F foco radiorum parallelorum), ideoque $bo = \frac{\omega\beta \times or}{r\omega}$; hoc valore ſubſtituto fiet $\frac{bo}{oD} : \frac{\omega\beta}{\omega t} = \frac{\omega\beta \times or}{\omega r \times oD} : \frac{\omega\beta}{\omega t} = or \times \omega t : \omega r \times oD$, hoc eſt, *angulus viſorius ſine teleſcopio eſt ad angulum viſorium per teleſcopium, ut factum ex diſtantia foci ſpeculi majoris* DC *a centro ſpecilli mino-*

minoris (ſeu *or*) *in focum lentis ocularis* (id eſt ωt), *ad factum ex diſtantia foci actualis ſpecilli minoris a ſuo centro* (vel $r\omega$) *in diſtantiam foci ſpeculi majoris*, ſeu in oD.

76. *Caſſegrainiana* teleſcopia a Gregorianis diſcrepant, quod objecta exhibeant ſitu inverſo, in locum ſpecilli cavi convexo TV (fig. 38 Tab. VI) ſuffecto, intra cujus focum prima imago per ſpeculum cavum CD efformata *ob* incidere; ſed reflexione ſpecilli convexi imago depingitur in $\omega\beta$ eodem ſitu, quem habuiſſet in *ob* (per N. 12), & tanto majore intervallo a TV, quanto *ob* fuiſſet ejus foco propior: Quia igitur *ob* ſitum inverſum objecti OB habet, hæc teleſcopia (ſaltem ſi non plures lentes oculares in ſubſidium vocentur) Aſtronomicis uſibus, utpote Gregorianis aliquantum breviora, apta eſſe poſſunt, licet raro adhibeantur. Fig. 38. Tab. VI.

Si deſideres augmenti rationem, erit *ob* ad $\omega\beta$, ſicut diſtantia *ob* a centro ſpeculi TV ad diſtantiam $\omega\beta$ ab eodem centro; & ſi prior dicatur ro, altera $r\omega$, fiet $ob = \frac{\omega\beta \times or}{\omega r}$; hinc $\frac{ob}{oD} : \frac{\omega\beta}{\omega t} = \frac{\omega\beta \times or}{\omega r \times oD} : \frac{\omega\beta}{\omega t} = or \times \omega t : \omega r \times oD$.

77. Si objectum cerni poſſit e loco DH (fig. 39 Tab. VI), in HIK vero interponatur corpus opacum, ut oculo in *k* conſtituto aſpectus objecti eripiatur, fieri poteſt tubus recurvus DEFGLKIH, qui contineat in AB lentem objectivam, in parte vero FGLT tubulum inſtructum lentibus ocularibus, velut *pr* &c., ſi adhibeantur bina ſpecula *st*, ST plana, & ad axem ſub angulo 45° inclinata, videbitur objectum in recta *ko* ad *Cc* parallela, modo longitudo foci vitri objectivi AB ſit $Cc + ci + io$, & lentes oculares ita diſponantur, ut vulgares tubi dioptrici exigunt. Nam coni radioſi e medio puncto objecti incidentis extimum latus A*a* reflectetur ex *a* in *b*, ex *b* in *o*, alterum vero latus B*e* reflectetur ex *e* in *f*, & ex *f* in *o*, depingeturque imago medii puncti objecti in *o*. Alterius coni ex infimo objecti puncto venientis latus ſupremum per vitrum objectivum refringetur in *n*, unde reflectetur in *m*, & ex *m* in *l*; infimum autem latus incidet in punctum *d* ſpeculi *st*, e quo reflectetur in *q*, & inde in *l*, ubi infimi objecti puncti imago efformabitur. Quare ſi cetera fiant, ut in tubis dioptricis vulgaribus, objectum videri debet ab oculo prope *k* conſtituto. Noluimus omittere id genus tubos (quos alias polemoſcopia dixerunt, quod defenſoribus mœniorum haud tutum ſit caput ultra muros exporrigere, hoſtibus in omnem nocendi occaſionem imminentibus) cum etiam extra hoſtile periculum fieri poſſit, ut quis videre velit, quid foris agatur, ipſe interim latere cupiens. Sed facile patet, pro diverſis rerum conditionibus variari admodum teleſcopia flexa poſſe, neque alia occurrit difficultas, quam in debita ſpeculorum planorum collocatione. Fig. 39 Tab. VI.

Fig. 41. Tab. VI. 78. Si in F sit focus radiorum parallelorum speculi concavi (fig. 41 Tab. VI) AB, C ejus centrum, & intra C & F collocetur objectum minutum *ob*, ductis, radiis per *o*, & *b* ex C, nempe C*c*, C*g*, radii lucis ex *o* prope *g* incidentes reflectentur in ω ultra centrum C (14). Pariter radii ex *b* prope *c* incidentes depingent in β imaginem puncti *b* situ inverso. Hinc si lens ocularis KML ita collocetur, ut ejus focus radiorum parallelorum congruat cum ω, videbit oculus prope O positus objecti imaginem sub angulo *t*OS proxime æquali cum $\omega t\beta$.

Est autem $ob : \omega\beta = Co : C\omega$, & $ob = \frac{\omega\beta \times Co}{C\omega}$, proinde angulus visorius, si oculus in centro lentis *t* positus videret objectum sine vitro, & speculo, ad angulum, sub quo videt idem ope hujus instrumenti, ut $\frac{ob}{ot}$ ad $\frac{\omega\beta}{\omega t}$, sive ut $\frac{\omega\beta \times Co}{C\omega \times ot}$ ad $\frac{\omega\beta}{\omega t}$, vel ut $Co \times \omega t$ ad $C\omega \times ot$, id est, ut factum ex distantia objecti a centro speculi in focum lentis objectivæ, ad factum ex distantia objecti a centro lentis in distantiam imaginis a centro speculi. Est porro $ot > \omega t$, & $C\omega > Co$; igitur objectum auctum apparere debet, & instrumentum microscopium, rebus minutis discernendis aptum, erit.

79. Quando in Dioptrica de microscopiis egimus, monuimus (Dioptr. 119), tum contrahi instrumentum, tum etiam illud incommodi evitari, quod lentes oculares KML admodum latæ adferunt, si inter objectum & imaginem prope medium constituatur alia lens ocularis. Id ipsum in microscopiis catoptricis observare convenit, alias enim lentes oculares vel nimium latæ requiruntur, si totam imaginem capere debeant, vel non videri poterit tota objecti etiam minusculi diameter, præcipue si majus desideretur augmentum. Imago ωβ enim eo longius distabit a C, & proinde eo amplior fiet, quo *ob* propius ad F accesserit.

Denique per se se patet, uti telescopiorum, ita quoque microscopiorum structuram variari posse. Nam si (fig. 37 Tab. V) intra focum & centrum speculi DC constituatur objectum, ejus imago efformari debet ultra centrum, itaque facile conjungetur alterum specillum concavum TV, ut ab hoc imago nova efformetur in ωβ, quæ dein ope lentis LM aspiciatur. Aut etiam loco specilli concavi adhiberi poterit convexum TV (fig. 38 Tab. VI) cujus reflexione itidem efformetur imago in ωβ. Universe si specula concava, in quæ immediate objecta radios emittunt, fiant mediocris foci (puta unius, aut $1\frac{1}{2}$ dig.), quodvis telescopium in microscopium convertetur. Sed enim præstant fere, quæ simpliciora sunt, ideoque ea, quæ ope unius speculi concavi, & duorum vitrorum ocularium fiunt, præ ceteris commendanda videntur.

Fig. 37. Tab. V. Fig. 38. Tab. VI.

ARTI-

ARTICULUS VII.

Resolvuntur nonnulla Problemata.

80. Problema I. Invenire radium sphæricitatis speculi convexi.

Resolutio. I. Accipiatur lens convexa, cujus focus radiorum parallelorum sit longior radio sphæricitatis speculi, id, quod vel oculi æstimatione facile deprehenditur. Excipiantur radii solis lente, cui tamdiu admoveatur, vel ab eadem removeatur speculum, donec radii in conum coeuntes ita reflectantur in lentem, ut lucidus circulus, qui reflexione efformatur, accurate congruat cum lentis apertura. Ex nota longitudine foci lentis subtracta ejusdem distantia a speculo, erit residuum radius speculi. Ratio facile intelligitur, cum radii non reflecti possint perpendiculariter in superficiem (sive in seipsos), nisi tendant ad centrum speculi.

II. In charta firma DG describantur duo circuli concentrici, alter radio DC centro D, alter radio DB $= 2$DC. Minoris peripheria perforetur pluribus foraminulis exiguis, velut ad C, & opponatur soli, ut radius CM incidens reflectatur in peripheriam circuli majoris, quod admovendo, removendove chartam a speculo obtinetur. Radio reflexo accurate in peripheriam circuli majoris incidente sumatur circino distantia MB, vel MC (alterutra enim accepta, nota erit quoque altera: ponimus accipi MB). His ita habentibus cogitetur radius speculi OM (qui angulum CMB bifariam secare debet) produci in Q, & ex M demitti ad radium OL perpendiculum MP $=$ CD. Sit Fig. 42. Tab. VI.

MB $= a$, DC $=$ CB $= e$, erit MC $= \sqrt{a^2 - e^2}$; & MB $+$ MC: MC $=$ BC: QC, id est $a + \sqrt{a^2 - e^2} : \sqrt{a^2 - e^2} = e :$ QC $= \frac{e\sqrt{a^2 - e^2}}{a + \sqrt{a^2 - e^2}}$. Dein habetur QC: MC $=$ MP: PO, vel $\frac{e\sqrt{a^2 - e^2}}{a + \sqrt{a^2 - e^2}} : \sqrt{a^2 - e^2} = e :$ PO $= a + \sqrt{a^2 - e^2}$. Est autem OM$^2 =$ OP$^2 +$ MP$^2 = a^2 + 2a\sqrt{a^2 - e^2} + a^2 - e^2 + e^2 = 2a^2 + 2\sqrt{a^2 - e^2}$, ac denique extracta radice habebitur radius OM.

81. Problema II. Radius lucis debet ex puncto C fig. 43 & 44 Tab. VI) per reflexionem factam in superficie speculi sphærici venire ad datum punctum F: quæritur punctum incidentiæ E. Fig. 43. & 44. Tab. VI.

Resolutio. Quoniam nulla compendiosior resolutio occurrit, quam sit ea, quam dedit *Ill. Hospitalius* (De calculo infinites. Sect. III Exempl. X), eam in gratiam tironum huc transferimus, ne alibi quærere debeant, quo ad sequentia rite intelligenda opus habent.

Pona-

Ponatur eſſe punctum E quæſitum, & ducatur per centrum O recta OEG. Evidens eſt, eſſe hanc ad peripheriam AEB perpendicularem, & proinde angulos FEG, CEG æquari inter ſe. Quod ſi igitur ita ducatur EH, ut fiat angulus EHO æqualis angulo CEO; & eodem modo EK, ut fiat angulus EKO = FEO; præterea agantur ED ad OF, & EL ad OC parallelæ, erunt triangula OCE, OEH; item OFE, OEK; nec non HDE, KLE ſimilia; & poſita OE = OA = OB = a, OC = b, OF = c; OD = LE = x, DE = OL = y, habebitur OH $= \frac{aa}{b}$, OK $= \frac{aa}{c}$, adeoque HD ($= \frac{bx \mp aa}{b}$, ſigno — pro convexo (fig. 43) & + pro concavo ſpeculo (fig. 44) adhibito): DE (y) = KL $\frac{(cy \mp aa)}{c}$: LE (x). Igitur $xx \mp \frac{a^2x}{b} = y^2 \mp \frac{a^2y}{c}$, vel $y^2 \mp \frac{a^2y}{c} - x^2 \pm \frac{a^2x}{b} = o$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam, quæ circulum in quæſito puncto E ſecet, & facile poſſit conſtrui.

82. Problema III. Si radius incidens in ſpeculum ſphæricum reflectatur ad oculum, determinare locum imaginis puncti, ex quo radius incidit.

Reſolutio. Sumendum eſt iſthic & punctum incidentiæ phyſicum, ſeu alicujus latitudinis, & radius ejusmodi, qui faſciculum aliquem plurium conſtituat; per unicum enim radium oculus nihil videre poteſt. Incidat ergo LE in punctum E (fig. 45 Tab. VI) ſpeculi convexi, indeque reflectatur in oculum O, determinato per præcedens Problema puncto E, ſi oculi locus ſit datus. Producatur LE in B, dum rurſus occurrat circulo maximo ſpeculi in B; ſitque EM $= \frac{1}{4}$ EB. Fiat LM : LE = LE : LR. Ex R in tangentem Ee demiſſum perpendiculum Re producatur, ut ſit Re = er, erit r locus apparens puncti lucidi L. Ex iis enim, quæ Articulo III de cauſticis diximus, manifeſtum eſt, determinari per allatam conſtructionem punctum r cauſticæ Srf, quæ eſt locus geometricus omnium focorum virtualium, quos poſſunt habere radii ex L in circulum maximum ſpeculi incidentes inde ab A uſque ad punctum contactus f. Jam vero hoc ipſo radii ex puncto phyſico E ſpeculi ita reflectuntur, quaſi divergerent ex r; igitur oculus O (qui eſt in plano eodem LEC) imaginem puncti L ad r referre debet.

Fig. 45. Tab. VI.

Si punctum lucidum l (fig. eadem) radiet in ſpeculum concavum, ac ſit ε punctum incidentiæ, ex quo radii reflectantur in oculum o, ſumpta iterum $\mu\varepsilon = \frac{1}{4}\beta\varepsilon$, fiet $l\mu : l\varepsilon = l\varepsilon : l\varphi$, & perpendiculo φc in tangentem εc, facto = $c\varrho$, habebitur punctum ϱ cauſticæ $s\varrho\lambda$, & radii ex puncto ϱ divergentes (ſiquidem focus ϱ ſit realis) icident in oculum o, qui proinde punctum lucidum l ad ϱ referet.

83.

83. Scholium. Egimus in hoc problemate de visione imaginis, quæ fit uno oculo. Si idem objecti punctum videatur utroque oculo, res paullo aliter habet. Verum revocanda sunt hoc loco in memoriam, quæ Part. I. Instit. N. 85 de horoptere, seu plano, aut linea visionis diximus, ad quod, vel quam scilicet imago refertur, & semper illud est, in quo axes optici concurrunt. Ut id adhuc exemplo, quod ad rem nostram propius facit, illustremus, posui super mensa circellum e charta colorata (erat hæc cærulea) excisum, (vide (fig. 47 Tab. VI) velut in A. Cruribus circini, qui ad manus erat, extremis agglutinavi ex eadem charta duos annulos E & F, quos diductis, aut compressis cruribus circini tamdiu movi, ut clauso oculo dextero *o*, circellus A appareret sinistro in medio annuli E, uti etiam ut clauso oculo sinistro O, videretur circellus A dextero *o* in medio annuli F. Tum utroque oculo simul aperto eundem circellum A considerabam. Apparebant super mensa tres annuli *f*, A, & *e*, sed in uno medio videbatur circellus A, reliqui utrinque vacui erant. Nempe annulus E ab oculo O ad idem punctum referebatur, ad quod F ab oculo *o*, hoc est, ad intersectionem axium opticorum OA, *o*A, ita, ut coincidentibus utriusque imaginibus in ejus medio circellus A videretur. Annuli E imago etiam depingebatur in oculo *o*; sed quia ex *o* per E circellus A videri non poterat, ejus imaginem circello vacuam referre debuit oculus ad locum aliquem *f* horopteris. Pari ratione depingebatur in oculo O imago annuli F, sed absque circello A, qui ab O per F videri nequibat; hinc referebatur ad locum horopteris *e*. Interposita inter E & F charta HI quo impediebatur, ut ne ex F in O, vel ex E in *o* venirent radii, unica imago annulorum circa circellum A videbatur. Phænomenon hoc manifeste evincit, *si in axibus opticis* AO, A*o* *sit duplex objectum æqualis formæ, & magnitudinis* E & F, *id videri in concursu axium instar unius. Quod si radiatio objecti* E *in oculum o, & objecti* F *in oculum* O *impediri possit, unicum tantum objectum in* A *videri debet.* His notatis sit Fig. 47. Tab. VI.

84. Problema IV. Explicare modum, quo duplice oculo videatur imago puncti lucidi in speculum sphæricum radiantis.

Resolutio. Duplex potest esse casus: *Primo* dum axes optici oculorum sunt in eodem plano cum radio incidente, & catheto incidentiæ. Exhibeatur hic casus fig. 48 Tab. VI. Si speculum A*e*E non sit ingens, fieri nequit, ut ex eodem sensibiliter puncto E reflectantur radii ad utrumque oculum O & *o*. Igitur si ad *o* reflectatur lux e puncto *e*, & ad O e puncto E, liquet e scholio præcedente, imaginem puncti L esse in productione axis oculi *o*, nempe in *e* F, quæ est tangens aliqua causticæ. Eodem modo erit imago, seu focus virtualis ex reflexione puncti E in productione EF axis oculi O. Igitur refertur utraque hæc imago ad concursum F harum productionum, seu tangentium causticæ, hoc est ad horopterem oculorum; & quia radii ex *e* Fig. 48. Tab. VI.

in O, vel ex E in *o* venire nequeunt, oportet, ut judicetur esse unica imago.

85. Apparet, esse plures casus, in quibus videatur imago extra cathetum incidentiæ, per quam intelligitur perpendiculum LAC e puncto lucido ad superficiem reflectentem demissum.

86. Casus *alter* est, quando radius incidens, & cathetus inciden-
Fig. 46. Tab. VII. tiæ cum axibus oculorum non sunt in uno plano. Esto (fig. 46 Tab. VI) cathetus incidentiæ LA, radius incidens LE (adeoque etiam reflexus) cum axe oculi O in plano circuli maximi speculi AEB; item cathetus *Le*, axis oculi *o*, & radius reflexus in plano circuli maximi A*e*B. Erit (per Probl. III focus virtualis, ubi oculus O (si solus videret) cerneret imaginem puncti L, punctum causticæ F, uti etiam oculus *o*, si solus foret, cerneret imaginem ejusdem L in alia caustica S*fg*, quæ cum priore habet punctum S in intersectione planorum commune, nempe in *f*. Cum autem hæc puncta F & *f* sint in axibus opticis, & hi concurrant in intersectione circulorum AEB, A*e*B, referet spectator imaginem utramque ad punctum φ (quod in hoc casu est simul in catheto incidentiæ), juxta scholium, cum per hypothesin radii ex E in *o*, & ex *e* in O venire nequeant.

87. Observa I. Fieri posse, ut dum puncta incidentiæ E, *e* sunt remotiora ab A, seu, si F, *f* in causticis sunt propiora ad G, *g*, axes optici producti concurrant cum catheto LA extra speculum, & tum si utroque oculo aspiciatur, videri debet imago extra speculum sphæricum; id, quod nunquam contingere potest, si aspiciatur unico oculo, cum focus virtualis semper sit intra speculum, intra quod tota caustica concluditur usque ad punctum contactus, in quod si inciderent radii ex L, oculus videret objectum L radio directo, seu infinite parum reflexo.

88. Observa II. Si axes optici non dirigantur ad F, *f*, sed v. g. ad punctum E, fieri potest, ut manente loco oculi *o*, nihilominus ex reflexione puncti *e* veniant radii ad oculum *o*, & tum imago puncti L non depingetur in eo loco fundi oculi, per quem transit axis opticus, sed in loco dexteriore, & tum necessario videbitur duplex imago objecti. Immo si horopter figatur inter puncta E, *e*, siquidem hæc sensibilem habuerint distantiam inter se, fieri potest, ut videantur etiam tres imagines, vel quatuor. Sed enim tum oculus non est rite collocatus.

89. Observa III. Quæ de speculis convexis diximus, applicanda etiam sunt concavis, hoc discrimine, quod quando foci in causticis sunt reales, imagines depingentur extra speculum, ut paullo difficilius sit horopterem in concursu productionum tangentium utriusque causticæ figere. Hinc sæpe contingit, ut duæ videantur imagines objecti lucidi, quando utroque aspicitur oculo, maxime quod alias soleamus imagines referre post specula, consequenter etiam axes opticos, dum specula cava intuemur, ita dirigamus, ut non nisi post specula concurrant. Si quæ modo de concursu axium opticorum monuimus,

attendantur, non fiet, ut unius puncti lucidi plures imagines in speculis sphæricis appareant. Accepi chartam ABCD (fig. 50 Tab. VII), in eaque foramen circulare excidi, in cujus centro se intersecabant fila *ac*, *db*; ultra chartam ita disposui duos circulos M, & N, ut oculo O per intersectionem filorum aspicienti appareret circulus N in medio foraminis *abcd*; tum ut clauso O, videretur oculo *o* alter annulus M itidem in medio foraminis. His ita dispositis axes opticos ad intersectionem filorum in centro foraminis direxi, & unicus circulus apparebat in medio foraminis, congruentibus utriusque imaginibus in unam. Evincit hoc phænomenon, *duorum objectorum æqualium & similium ultra horopterem in productione axium positorum, apparere unicam imaginem in ipso concursu axium.* Idem igitur fieri debet duplici imagini in duabus causticis, si referatur utraque ad horopterem. Quod si *cel. D. d'Alembertus* (opusc. min. Tom. I) horopteris rationem habuisset, & calculos suos naturæ visionis magis accommodasset, sane prima Optices principia nunquam in dubium revocasset. Fig. 50. Tab. VII.

90. Problema V. Si speculum planum *mnop*, cujus exigua tantum particula *s* patet, firmetur brachio N*s*, in axe NC, & rotetur circa eundem axem, ita, ut successive percurrat semiperipheriam circuli radii N*s*, interea autem e puncto lucido S alteriore, quam sit speculum, incidant radii in *s*, indeque reflectantur; quæritur in plano horizontali curva AMG, quam successive percurrit radius reflexus. Fig. 49. Tab. VII.

Resolutio. Ponitur N*s* esse in plano speculi, adeoque quando speculum habet situm *mnop*, ita, ut sit remotissimum a puncto lucido S, sive quando perpendiculum ex *s* in planum horizontale demissum incidit in B extremum punctum diametri circuli, qui ex plano horizontali descriptus æqualis & parallelus est illi, quem *s* describere ponitur, evidens est, radium lucis S*s*A prætervehi speculum, & incidere in A. Eodem modo quando speculum venit ad *t*, ut perpendiculum *t*D cadat in alterum extremum diametri BD, radius S*t* speculum prætervectus cadit in G, ita, ut per lucidi puncti O, D, C (centrum circuli), G, & A sint in eadem recta.

Dicatur altitudo puncti lucidi SO $= c$, altitudo speculi *s*B $=$ NC $=$ *t*D $= f$, & ponatur SO $-$ *s*B $= c - f = a$. Patet, fore semper S*u* (a): *us* (seu OB) $=$ *s*B (f): BA $= \frac{f}{a} \times$ OB. Esto modo speculum in T, ut perpendiculum inde demissum cadat in I. Ducantur per I rectæ OIL, CIK, & accipiatur IL $= \frac{f}{a} \times$ OI, dimissumque ex L in CIK perpendiculum LK producatur, ut sit KM $=$ KL, erit M punctum, in quod incidit radius reflexus TM.

Demonstratio facilis est: Ducta quippe MI erunt triangula IKL, IKM similia, & æqualia, & propterea LIK $=$ KIL $=$ CIO. Sit FI tangens circuli in I, ob rectos FIC, FIK æquales, ablatis æqua-

libus OIC, MIK, æquales quoque ſunt anguli OIF, FIM, & MF : FO = MI : IO = LI : IO = LT : TS = MT : TS. Quare ſi ducatur ϑM, quæ occurrat perpendiculari ad planum horizontale Fϑ (= IT, ſunt enim ϑT, ML parallelæ, & in eodem plano trianguli SML) in ϑ, erit quoque MF : FO = Mϑ : ϑS = MT : TS, quare angulus STM per ϑT ad planum ſpeculi perpendicularem ſecatur bifariam, & proinde TM eſt radius reflexus. Q. E. D.

91. Si ponatur etiam altera facies *mnop* ſpecularis, dum ſpeculum motu rotationis percurrit alteram ſemiperipheriam, eadem curva ſitu oppoſito deſcribetur a radio reflexo. Ceterum poteſt etiam ſequens haberi conſtructio. Deſcribatur cauſtica $\alpha\varphi\lambda$ radiis lucis e puncto lucido O in circulum DIB incidentibus, & ſi fuerit OI $= y$, VI $= l$, erit I$\varphi = \frac{ly}{2y - l}$ (per ea, quæ Art. III de cauſticis diximus). Porro IM erit $= \frac{fy}{a}$, conſequenter φM $= \frac{ly}{2y - l} + \frac{fy}{a} = \frac{2fy^2 + ly\,(a - f)}{2a\,(y - \frac{1}{2}l)}$, atque hunc in modum ſingula puncta M determinari poſſunt.

Quod ſi fuerit radius circuli CB $= r$, QB $= x$, erit QI $= \sqrt{2rx - xx}$; & ſi ponatur OB $= b$, erit QO $= b - x$, OI $= \sqrt{(b - x)^2 + 2rx - xx} = \sqrt{b^2 - 2\,(b - r)x}$. Quia OB $\times$ OD $= b\,(b - 2r) =$ OI $\times$ OE $=$ OE $\sqrt{b^2 - 2(b - r)x}$, obtinetur OE $= \frac{b(b - 2r)}{\sqrt{b^2 - 2\,(b - r)\,x}}$, & EI = OI — OE $= \sqrt{b^2 - 2bx + 2rx} - \frac{bb - 2br}{\sqrt{b^2 - 2(b - r)x}} = \frac{b^2 - 2bx + 2rx - b^2 + 2br}{\sqrt{b^2 - 2(b - r)x}} = \frac{2b\,(r - x) + 2rx}{\sqrt{b^2 - 2(b - r)x}}$. Liquet adeo, poſſe haberi & y, & dimidiam chordam l per x & conſtantes, & proinde æquationem ad curvam, ſi lubet, invenire licet. Verum non videtur operæ pretium, ut propterea laborioſe calculos ſubducamus.

92. Si punctum lucidum abeat ad diſtantiam infinitam, fiet OI = OA, utpote cum utraque ſit infinita. Hinc etiam erit IL = BA conſtans.

Si evaneſcat Ns, ſeu ſi punctum reflectens convertatur circa ſe ipſum, circulo DIB evaneſcente, deſcribet radius reflexus in plano horizontali circulum, uti clarum eſt.

Denique ſi punctum reflectens moveatur in recta, etiam radius reflexus in plano horizontali rectam percurret.

CAPUT

CAPUT II.

Applicatio Dioptrices, & Catoptrices ad explicanda phænomena Iridis.

ARTICULUS I.

Exponuntur formulæ focorum Dioptrica & catoptrica pro ſphæris paullum diverſæ ab iis, quas alias habuimus.

93. Nemo jam eſt noſtro ævo adeo in rerum naturalium ſcientia hoſpes, ut neſciat, iridem ſolaribus radiis in pluviæ guttulis refractis, reflexisque efformari, poſtquam *Carteſius* angulos etiam determinavit, ſub quibus lux in ſphærulas illas aqueas incidere debet, ut omnes illos colores exhibeat, quos in arcu cœleſti obſervamus. Equidem lucis indolem, colorumque diſcrimen neſcierat *Carteſius*, neque effingendæ iridi neceſſarios angulos alio deprehenderat indicio, niſi quod, cum complures ad calculum revocaſſet, ii ſoli eſſent, qui plurimos lucis radios ad ſpectatoris oculum remitterent; ſatis tamen id erat, ut *Newtonus*, qui phænomeni explicationem numeris omnibus abſolutam dedit *in Lect. Opticis* Part II Sect. II (quæ inter ejus Opuſcula minora extant), fateretur, Carteſium viam ſtraviſſe; quanquam ei hanc rurſus laudem in Optices L. I part. II prop. 9 ſurripuerit, & ex duce, *M. Antonii de Dominis* ſequacem fecerit. Haud recte ſane, uti *R. P. Boſcovich* in Notis ad Poema de Iride *R. P. Caroli Noceti* oſtendit.

94. Porro Newtonus in laudato *Opticæ* loco demonſtratione omni abſtinuit; at in *Lectionibus Opticæ* Part. I. Sect. IV. Prop. 35 & 36 pro iride primaria æque (quæ interior eſt, atque unica reflexione, duobusque refractionibus efficitur), ac ſecundaria (ſive exteriore, quæ binas refractiones, totidemque reflexiones requirit) luculentam dedit, methodo, quæ (ut ipſe monet) cuivis reflexionum numero applicari poſſit. Angulos autem, qui arcus cœleſtis amplitudinem metiuntur, & a radiis incidentibus cum iis, qui e guttula emergunt, continentur, in primaria maximos; minimos in ſecundaria vocat. Materiam eandem majore longe amplitudine acceptam perſecutus eſt *R. P Rog. Boſcovich* peculiari Diſſertatione Italico ſermone conſcripta; uti & (ut alios taceam) *Cl. Joan. Bernoullius* oper. Tom. IV. n. 171

 art.

art. 3, quem sequitur *Ill. Kæstnerus* in opere germanico pererudito, quod *Optices systema omnes partes complexum* dicere possis, edito *Altenburgi* 1755. Quanquam autem primo intuitu haud liqueat, ecquid ad effectum physicum angulus maximus, minimusve conferat, quem radius solaris incidens cum exeunte e sphærula comprehendit; id tamen facile intelligitur, si ad Newtoni monitum advertatur animus, eo scilicet solo in casu, quo anguli illi in suo genere sunt maximi, vel minimi, fieri posse, ut radii post duas refractiones, ac unam, duasve reflexiones inter se paralleli ad oculum pertingant. Ut enim certi generis color percipiatur, plures lucis radii ad eandem sensationem concurrere debent. Demonstratio quidem, quam dabimus radios infinite propinquos assumet; at quia prope ea puncta, a Geometria determinata, in quæ lumen incidit, discrimen inclinationis perexiguum est, ad vicina utrinque extendenda est, quemadmodum nempe ut Newtoni argumento a simili petito utamur, cum sol ad tropicorum alterutrum accedit, dierum longitudo per aliquod temporis spatium parvis admodum portionibus augetur, vel imminuitur. Atque hinc fit, ut sufficiens lucis homogeneæ copia in spectatoris oculum illabatur, quæ vivacem coloris sui impressionem efficiat.

95. Et ut hujus explicationis evidentia major sit, quæ naturæ agendi modum pressius attingit, ejusmodi adhibere placuit in hac tractatione methodum, quæ a *Maximis*, & *Minimis* non penderet, sed parallelismum radiorum emergentium tantummodo spectaret, & a tironibus facillime posset intelligi; interim vero pateret latissime, omnibusque hypothesibus faceret satis. Quin a generalibus rem ordiri libuit principiis tum Dioptricæ, tum Catoptricæ, quorum applicatio etiam ad alia phænomena esset expedita.

96. Ante omnia itaque haberi debet formula generalis pro foco radiorum infinite propinquorum, qui quomodocunque in sphæram
Fig. 51. Tab. VII refringentem incidunt. Sit fig. 51 Tab. VII) P punctum lucidum, PIE, P*ie* radii incidentes; IFA, *iFa* refracti; CB, C*b* perpendicula ad incidentes; CO, C*o* ad refractos. Manifestum est CIB, C*ib* esse angulos incidentiæ; CIO, C*io* refractionis, quorum sinus proinde sunt CB, C*b*; CO, C*o*; inveniendum itaque est punctum F, seu distantia OF, cum ponatur, dari puncta P, I una cum arcu DI, ac ratione sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis, quæ sit I: R.

Centris P, F, radiis PI, FI intelligantur descripti arcus infinite parvi IV, I*u*. Quia anguli CI*i*, BIV recti, ablato communi BI*i*, manent CIB, VI*i* æquales. Et quia ad V, & B recti, triangula VI*i*, CIB similia sunt. Pariter similia sunt I*ui*, CIO ob rectos ad *u*, & O, & *uIi*, CIO æquales. Est igitur ex prioribus I*i*: IV = CI: IB; & ex posterioribus I*u*: I*i* = IO: CI, ac rationibus compositus I*u*: IV = IO: IB. Dein quia radii PE, P*e* infinite propinqui, rectæ CB, CQ æquales censendæ sunt; hinc C*b* — CB = Q*b*. Ob eandem rationem

est.

est Co — CO = qo. Est vero CB: CO = I: R; item Cb: Co = I: R; hinc Cb: CB = Co: CO, & Cb — CB (= Qb): Co — CO (= qo) = CB: CO = I: R.

Quoniam IuF, qoF recti, est FI: Fq (vel neglecta infinitesima qO) = FI: FO = Iu: qo; & habuimus
Iu: IV = IO: IB. Ob rectos PVI, PbQ, & QB infinitesimam, est
IV: Qb = PI: PB. Denique etiam fuit
Qb: qo = I: R. Unde compositis rationibus
Iu : qo = FI: FO = I × IO × IP : R × IB × PB.

Si ponantur radii PI, Pi paralleli, debebit distantia PI esse infinita; hinc ratio PI: PB fit æqualitatis, & habebitur FI : FO = I × IO: R × BI, vel FI — FO (= IO): FO = I × IO — R × IB: R × IB. Unde denique $\frac{R \times IB \times IO}{I \times IO - R \times IB} = OF$.

97. Quisque facile videt, quod si punctum lucidum ex P in F transferamus, indeque in Ii radii incidant, post refractionem situm IP, iP obtinere debeant. Cum enim sit idem medium sphæræ circumfusum, ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in egressu, eadem est, quæ fuit in ingressu ratio sinus anguli refractionis ad sinum anguli incidentiæ : unde cum angulus refractionis in ingressu sit idem cum angulo incidentiæ in egressu, iidem etiam sinus habentur, ac pristinus radiorum situs restituitur. Quare si ponamus radios, antequam ingrederentur sphæram, fuisse parallelos, paralleli etiam ut eadem via, qua venerant, egrediantur, est necesse.

98. Quoniam vero ad efficiendam iridem haud quaquam sufficit refractio, sed præterea reflexio radiorum requiritur; præter focum F ex prima refractione, inveniri etiam debet focus ex singulis reflexionibus, quæ deinceps contingunt. Hoc ut præstetur, solvendum nobis est sequens. . . .

Problema : Radiis infinite propinquis ex f in Aa (fig. 52 Tab. VII) incidentibus, invenire punctum concursus post reflexionem, seu focum F. Fig. 52. Tab. VII.

Facile intelligitur, resolutionem priori prorsus esse similem. Nam ex æqualitate anguli incidentiæ, & reflexionis evidens est, chordas IA, AB; ia, ab æquari; æquales proinde sunt etiam earum distantiæ a centro CL, CO; Cl, Co; & quoniam radii infinite propinqui ponuntur, censeri debet OC = qC, & LC = QC; hinc Co — CO = oq, & Cl — CL = Ql, consequenter etiam oq = Ql.

Intelligantur centris F, f, radiis FA, fA descripti arcus infinite parvi (ac propterea pro rectis habendi) AV, Au. Quia BAu, CAa recti, ablato angulo communi LAa, manet aAu = CAL, ac ob rectos ad u & L, triangula aAu, CAL similia sunt, & hinc Aa: Au = AC: AL. Ob eandem rationem similia sunt AVa, CAO, ideoque

que $AV : Aa = AO : AC$, compositisque rationibus $AV : Au = AO : AL$; atqui $AO = AL$, igitur etiam $AV = Au$.

Præterea manifestum est, ob rectos ad l, & u; item ad o & V, similia esse triangula fQl, fAu; Foq, FAV. Unde fA; fQ (vel neglecta infinitesima LQ) $= fA : fL = Au : Ql$; item $FA : Fq$, vel neglecta infinitesima qO, $= FA : FO = AV : oq = Au : Ql$ (per demonstrata). Quare etiam $fA : fL = FA : FO$; vel $fA + fL : fL = FA + FO \; (= IO) : FO$, & $\frac{fL \times IO}{fA + fL} = OF$. Q. E. I.

98. His subjiciemus nonnulla corollaria, quorum usus deinceps erit, & quidem in 1° deducemus eandem analogiam, quam jam habuimus pro causticis. Quoniam $fA + fL : fL = IO \; (= AO = AL) : FO$; & $fA = fL + AL$; $FO = AO - FA = AL - FA$, erit quoque $AL + 2fL : fL = AL : AL - FA$; & sumendo antecedens ad differentiam antecedentis, & consequentis, $AL + 2fL : AL + fL = AL : FA$, seu permutatis terminis, & accepta summa antecedentis, & consequentis ad consequens, $2AL + 2fL : AL = AL + fL + FA : FA$; divisa prima ratione per 2, $AL + fL : \frac{1}{2} AL = AL + fL + FA : FA$, id est, si fiat $AR = \frac{1}{2} AL$, & accipiatur differentia antecedentis & consequentis ad antecedens, $fR : fA = fA : fA + FA$; vel si eadem differentia referatur ad consequens, $fR : AR = fA : AF$, vel $fR : fA = AR : AF$. Elicitur hinc eadem determinatio foci, quam N. 30. pro caustica attulimus.

Fig. 53. Tab. VII. II. Si radii convergant versus datum aliquod punctum f (fig. 53 Tab. VII), velut Bf, bf, qui reflectantur ad Aa, ut reperiatur AF, eadem fere manet constructio, & demonstrandi ratio, ut vel ex schemate patet, & invenitur $fA : fL = FA : FO$, seu $fA + fL : fL = FA + FO \; (= AO = IO) : FO$. Est autem $fL = fA + AL$, & $FO = AO - FA = AL - FA$; unde $AL + 2fA : AL + fA = AL : AL - FA$, & permutando $AL + 2fA : AL = AL + fA : AL - FA$. Accipiatur differentia antecedentis & consequentis ad consequens, fiet $2fA : AL = fA + FA : AL - FA$, vel rursus permutatis terminis $2fA : fA + FA = AL : AL - FA$. Sumatur antecedens ad differentiam antecedentis & consequentis, habebitur $2fA : fA - FA = AL : FA$ vel $2fA : AL = fA - FA : FA$, aut $fA : \frac{1}{2} AL = fA - FA : FA$. Quod si fiat $AR = \frac{1}{2} AL$, & accipiatur summa antecedentis & consequentis ad antecedens, erit $fR : fA = fA : fA - FA$. Constructio eruitur eadem.

III. Per se clarum est, quod si chordæ IA, ia ex parte Aa producerentur, eæ exhiberent situm radiorum divergentium, & ex f in superficiem convexam Aa incidentium, quorum proinde focus virtualis F (sive punctum dispersus) per præcedens corollarium determinatus est.

IV.

IV. Si radii five in hac, five in præcedente figura inciderent paralleli, punctum f infinite diftaret; unde in analogia $fA : fL = FA : FO$, prima ratio foret æqualitatis, quod tam fA, quam fL infinitæ forent, ideoque etiam $FA = FO$, & punctum F diftaret ab A quarta parte chordæ.

99 Ex hifce corollariis jam conftat, qua ratione dato foco ex prima refractione, inveniri poffit focus ex prima reflexione, & hoc habito, quomodo reperiatur focus poft reflexionem alteram, & fic deinceps. Ut autem radii fphæram parallele ingreffi, rurfus ex eadem paralleli emergere poffint, intelligitur fane requiri, ut eadem omnino fit diftantia foci ultima reflexione facti, feu a puncto ultimo reflectente, feu a fuperficie, per quam exire debet lumen, (nam idem eft) quæ erat foci prima refractione efformati, five a puncto primo reflectente, five ab illo, per quod ingreffum eft.

Refumamus, quæ N. 97 dicta funt. Quoniam (fig. 51 Tab. VII) radiis ex F in I, i incidentibus focus eft in P, citra negotium pro eodem æquatio ex N. 96 elicitur, hoc uno notato, quod ratio finus incidentiæ ad finum refractionis fit R : I. Nam cum habuerimus $FI : FO = I \times IO \times IP : R \times IB \times PB$, erit $FI \times R \times IB \times PB = FO \times I \times IO \times IP$, & inde $PB : IP = I \times IO \times FO : R \times IB \times FI$. Si ponatur P ad diftantiam infinitam, eft $PB = IP$, & proinde $I \times IO \times FO = R \times IB \times FI$, ex quo habetur $R : I = IO \times OF : IB \times FI$. Finge jam, punctum F in chorda AI habere alium fitum, effeque v. g. propius ad O, uti in f: erit proinde $R : I = fO \times IO : fI \times IB$, fi radii nihilominus, ac prius, per Ii paralleli egredi ponantur. Manebit quippe ob angulum FIC eundem cum fIC, idem finus refractionis CB, ficuti manet idem finus incidentiæ CO, ac propterea etiam iidem cofinus IB, IO. Quare fiet quoque $FO \times IO : FI \times IB = fO \times IO : fI \times IB$, five $FO : FI = fO : fI$, aut $FO - fO\ (= fF) : FO = FI - fI\ (= fF) : FI$, vel $FO : FI = fF : fF$, quod eft abfurdum. Unde extra dubium eft, ut radii paralleli egredi poffint, qui paralleli fphæram fubierunt, effe opus, ut fitus ultimi foci ex reflexione idem fit cum fitu primi ex refractione. Videndum igitur, qua ratione, quibusve conditionibus id obtineatur, ex fequentis Articuli problemate, cujus aliis non nihil verbis propofiti alia longe methodo folutionem quoque dedit *Kæftnerus* Diopt. Analyt. Cap. V. Propof. 4. Sed quoniam de radiis infinite propinquis agitur, ut conftructio fchematum fit expeditior, eos unica linea exhibemus, notato folum puncto, in quo focus effe ponitur.

Fig. 51. Tab. VII.

ARTICULUS II.

Inquiritur in casus, quibus post datum reflexionum numerum radii e sphæra inter se paralleli egredi possint.

Fig. 54. Tab. VII. 100. Problema. Dato puncto F, e quo radii juxta chordam IA (fig. 54 Tab. VII) infinite propinqui emanant versus A, invenire omnes focos f, Φ, φ &c post reflexiones in A, B, C, D, E &c: & determinare numerum reflexionum necessariarum, ut ultimus focus F a suo puncto reflectente E habeat eandem distantiam, quam habet F a primo puncto reflectente A.

Resolutio. Duas partes habet problema. Ut primæ satisfiat, detur F per quantitatem OF, sitque $OF = \frac{1}{m} \times AO$, erit $FA = AO - OF = AO - \frac{1}{m} \times AO = \frac{m-1}{m} \times AO = \frac{m-1}{2m} \times AI$. Sit $AR = \frac{1}{4} AI$. erit (coroll. I. N. 98) $FR : FA = RA : Af$, vel $FA - \frac{1}{4} AI : FA = \frac{1}{4} AI : Af$, & si substituatur valor de AF, fiet $\frac{m-1}{2m} AI - \frac{1}{4} AI$ $(= \frac{2m-4}{8m} \times AI) : \frac{m-1}{2m} \times AI = \frac{1}{4} AI : Af$, consequenter $\frac{2m-4}{8m} \times AI \times Af = \frac{m-1}{8m} \times AI^2$; unde $Af = \frac{m-1}{2m-4} \times AI = \frac{1-m}{4-2m} \times AI$.

Subtrahatur Af ex $AB = AI$, manebit $fB = AI - \frac{1-m}{4-2m} \times AI = \frac{4AI - 2mAI - AI + mAI}{4-2m} = \frac{3-m}{4-2m} \times AI$.

Quod si rursus fiat $Br = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} AI$, ex analogia $fr : fB = rB : B\Phi$, invenietur distantia ΦB a secundo puncto reflectente B. Hæc operandi ratio si continuetur, devenietur ad seriem sequentem:

Distantia foci a puncto reflectente

post reflexionem vnam $= \frac{1-m}{4-2m} \times AI$

post reflexiones duas $= \frac{3-m}{8-2m} \times AI$

tres $= \frac{5-m}{12-2m} \times AI$

quatuor $= \frac{7-m}{16-2m} \times AI$

quinque $= \frac{9-m}{20-2m} \times AI$ &c.

Hujus

Hujus autem progreſſionis lex illico agnoſcitur, cum numeratores ſint numeri impares quantitate m mulctati; denominatores vero multipla quaternarii per numeros naturales, ſubtractis $2m$. Præterea notare licet, numeratoris notam numericam (ſive numerum imparem) ſi unitate augeretur, fore dimidium multipli quaternarii denominatoris. Nam in termino primo notæ numericæ ſunt in numeratore 1, in denominatore 4; addita unitate in numeratore fieret 2, nempe dimidium notæ 4 denominatoris. In ſecundo termino numerator habet notam numericam 3, quam ſi augeas unitate, habebis dimidium notæ numericæ 8 denominatoris &c. Verum hæc ipſa obſervatio præbet ſolutionem ſecundæ partis.

101. Cum enim unitate differat nota numerica numeratoris a dimidio notæ denominatoris, hæc per $2x$, illa per $x - 1$ generatim exprimi poterit, & fractio, ſeu coefficiens de AI erit $\frac{x - 1 - m}{2x - 2m}$. Et quoniam debet FA æquari ultimæ diſtantiæ EF, evidens eſt, debere $\frac{m - 1}{2m} \times$ AI æquale eſſe alicui termino ſeriei de ſe in infinitum progredientis, qui ſit $\frac{x - 1 - m}{2x - 2m} \times$ AI, & hinc $\frac{m - 1}{2m} = \frac{x - 1 - m}{2x - 2m}$, ſive facta reductione, & debita transpoſitione, $4m = 2x$, aut $2m = x$. Conſiderata jam ſerie ſuperiore, clarum eſt, ut ſit poſt unam reflexionem $x - 1 = 1$, & $4 = 2x$, debere eſſe $x = 2$, adeoque $m = 1$. Si numerus reflexionum $= 2$, eſt $x = 4$, $m = 2$; ſi reflexiones fiant tres, habetur $x = 6$, $m = 3$ &c. Ex quo liquet primo, *numerum reflexionum neceſſariarum eſſe denominatorem fractionis* $\frac{1}{m} \times$ IO, *per quam in formula dioptrica datur* OF. Secundo. *Ex oppoſito dari* OF *in numeris, ſi detur numerus reflexionum, per quas ſitu primi foci reſtitui poteſt.* Tertio. m *non poſſe deſignare fractionem, cum fractio reflexionis dari nequeat.*

102. Advertendum iſthic, punctum F a nobis eſſe inter A & O collocatum, quod in caſu unius tantum reflexionis in A incidere debet, ob $m = 1$, & $\frac{1}{m}$ IO $=$ OA. At ex modo dictis intelligitur, quod inter A & R eſſe nequeat, quod m non niſi per fractionem poſſet exponi. Quippe ſi foret F inter R & A, fieret FO $> \frac{1}{2}$ AO & $<$ AO: jam autem unitas per nullum numerum integrum ita dividi poteſt, ut talis fractio emergat. In R incidet F in caſu duarum reflexionum; verum ab R verſus O ſemper progredi poteſt, modo m ſit numerus integer. Quando vero congruit cum O, infinitæ ut reflexiones fiant, eſt neceſſe, ob $m = \infty$.

 Sed

Fig. 55. Tab. VII. Sed fingatur, F (fig. 55 Tab. VII) transilire ipsum O, ut sit inter I & O, quæ hypothesis mutat formulam dioptricam figuræ $51^{mæ}$ in sequentem $\frac{R \times IB \times IO}{I \times IO + R \times IB} = OF$. Et quia semper est (Coroll. I. N. 98) FR: FA = RA: Af, & FR semper est majus quam $\frac{1}{2}$ FA, etiam erit RA > $\frac{1}{2}$ Af; hinc fieri non potest, ut f pertingat ad punctum medium chordæ AB. Idem est de secundo foco Φ, & sic deinceps. Unde evidens est, nullum focum ex reflexionibus posse transgredi medietatem suæ chordæ, in qua jacet, etsi in infinitum propius ad ejus punctum medium accedere possit; hoc ipso autem nulla distantia Af, BΦ, Cφ &c æquari potest cum FA; hoc est, nullo reflexionum numero situs primi foci potest restitui. Itaque si quod medium ea vi refringendi polleret, ut F obtineret situm inter I & O, vel etiam in medio ceterum apto ad efficiendam iridem aliquis daretur angulus incidentiæ, vel radiorum incidentium situs, ut refractione prima F caderet in cosinum refractionis, radii nunquam paralleli emergere possent.

Fig. 56. Tab. VII. 103. Sit (fig. 56 Tab. VII) F extra chordam IA ex parte I, quod contingeret, si in prima refractione fieret focus virtualis, sive si lux ex medio densiore in globum rariorem, v. g. ex aqua circumfusa bullæ aeris, in sphærulam aeream incideret; & in hoc casu formula dioptrica N. 96 mutaretur in hanc $\frac{R \times IB \times IO}{R \times IB - I \times IO} = OF$. At enim ex ratione superiore numero allata jam intelligitur, nullis reflexionibus situm puncti F obtineri posse, quod FA sit major, quam chorda, in qua focus quisque eorum, qui ex reflexionibus fiunt, jacere debet. Unde iterum conficitur, sphæras efficiendæ iridi ineptas esse, quarum refringendi vis minor sit, quam medii eas ambientis.

Fig. 57. Tab. VII. 104. Quando (fig. 57 Tab. VII) F cadit extra IA ex parte A, formula dioptrica manet, ut N. 96. Cum autem radii in A incidentes versus F convergant, ut reperiantur foci f, Φ, φ &c post reflexiones in A, B, C &c, utendum est analogia FA + $\frac{1}{4}$ AI: FA = $\frac{1}{4}$ AI: Af, quam Coroll. II. N. 98 demonstravimus; & quia $\frac{1}{4}$ AI > Af (quemadmodum FA + $\frac{1}{4}$ AI > FA), reliqui foci Φ, φ &c nunquam ad dimidium suæ chordæ pervenire possunt, multo minus totam transilire, quod tamen requireretur, ut ultimus focus obtineret eundem situm, quem habet F respectu A, itaque radii ab ultimo puncto reflectente divergerent versus punctum ultimo refringens, uti ex A divergunt versus I. Hinc igitur constat, quando ea est refractionis primæ conditio, quam nunc posuimus, radios nunquam posse egredi parallelos.

105. Superest demum casus, quo F infinite distaret, sive ex parte I, sive ex parte A (quod fieret, radiis parallele sphæram ingredientibus citra refractionem, medii & sphæræ densitate existente eadem). Evidens autem

autem eſt ex iis, quæ Coroll. IV. N. 96 diximus, focum poſt primam reflexionem in A, diſtare ab A quarta chordæ AB, vel AI parte, & propterea nunquam poſſet parallelismus reſtitui pro egreſſu, quod foci ſequentes extra chordas exire nequeant, uti N. 102 oſtendimus.

106. Sed quæres forte, utrum radii etiam ad parallelismum reſtitui nequeant per ſecundam refractionem, ſi nulla interveniat reflexio; quippe ſi F congruat cum O, patet ſane, reſpectu A eſſe eodem ſitu, ac reſpectu puncti I; ex N. 102 autem illud tantummodo colligi poteſt, per reflexionem id non poſſe fieri; quanquam videatur ex analogia Coroll. I. N. 96 (quæ in præſente hypotheſi abit in hanc, $\frac{1}{4}$ AI : $\frac{1}{2}$ AI $= \frac{1}{4}$ AI : *Af*) inferri, poſt ſingulas, etiam infinitæ ſi fiant, reflexiones ſitum puncti F obtineri.

Verum reſpondeo, ſi ſolummodo ſitus conſideretur, utique citra reflexionem per ſecundam refractionem radios ad parallelismum redigi poſſe; at enim ex analogia, quam adhibebimus pro inveniendo angulo incidentiæ, apparebit, nullum poſſe angulum dari, ſub quo ſi incidant radii paralleli, hic foci F ſitus obtineatur. Et in formula dioptrica, ſi OF evaneſcat, erit (96) $\frac{R \times IB \times IO}{I \times IO - R \times IB} = o$, quod fieri nequit, niſi ſit IB $= o$, conſequenter radii ſphæram tantummodo tangere deberent. Quare ſequitur tantum, ex hypotheſi abſurda aliud abſurdum deduci.

ARTICULUS III.

Inquiritur in angulos incidentiæ, & eos, quos radii e ſphæra egreſſi cum incidentibus continent.

107. Poſtquam caſus eos percurrimus, in quibus egreſſus radiorum parallelorum poſt numerum reflexionum quemlibet haberi, aut non haberi poteſt, inquirendum jam eſt in angulos incidentiæ, qui neceſſarii ſunt, ut punctum F debitum ſitum obtineat. Cum igitur eſſe debeat $\frac{R \times IB \times IO}{I \times IO - R \times IB} = OF = \frac{1}{m} \times IO$, quando ſitus puncti F in ultimo foco reſtitui poteſt, erit $\frac{mR \times IB}{I \times IO - R \times IB} = 1$, & $m R \times IB = I \times IO - R \times IB$, ſive $(m + 1) R \times IB = I \times IO$ vel ſi ponatur $m + 1 = n$, $nR \times IB = I \times IO$, & hinc $I^2 : n^2R^2 = IB^2 : IO^2 = \frac{n^2R^2 \times IB^2}{I^2}$. Eſt porro (fig. 51 Tab. VII) I : R = CB : Fig. 51. Tab. VII.

 CO

CO, aut $I^2 : R^2 = CB^2 (= CI^2 - IB^2) : CO^2$, & hinc $CO^2 = \frac{R^2 \times CI^2 - R^2 \times IB^2}{I^2}$. Atqui $CO^2 + IO^2 = CI^2$, unde adhibitis valoribus modo inventis eſt $CI^2 = \frac{R^2 \times CI^2 - R^2 \times IB^2 + n^2R^2 \times IB^2}{I^2} = \frac{R^2 \times CI^2 + (n^2 - 1) R^2 \times IB^2}{I^2}$, conſequenter $I^2 \times CI^2 - R^2 \times CI^2 = (n^2 - 1) R^2 \times IB^2$, vel $CI\sqrt{I^2 - R^2} = IB\sqrt{(n^2 - 1) R^2}$, ex qua æquatione habetur analogia $\sqrt{(nR + R)(nR - R)} : \sqrt{(I + R)(I - R)} = CI : IB$. Jam quia $n = m + 1$, & m numerus reflexionum, I, R cum ſinu toto CI dantur, reperitur IB, coſinus anguli incidentiæ.

108. Ponatur $m = o$, ſeu nullam fieri reflexionem, erit $n = 1$, & primus terminus analogiæ $\sqrt{(nR + R)(nR - R)}$, ob $nR - R = o$, evaneſcet, fietque IB reſpectu ſinus totius CI infinitus, quod fieri nequit, uti nos oſtenſuros promiſimus.

Ceterum etiam ex analogia $I : nR = IB : IO$, quæ ex formula foci OF immediate deducta fuit, colligere licet, utrum, & per quot reflexiones iris efformari poſſit in globo, pro quo datur ratio $I : R$. Oſtendimus enim a N. 102 abunde, ad hoc requiri, ut IO, coſinus anguli refractionis, ſit major, quam coſinus anguli incidentiæ IB, quandoquidem refractio in ingreſſu in globum fieri debet ad perpendiculum. Cum itaque obtineat analogia $I : nR = IB : IO$, quotiescunque iris fieri poteſt, conſequitur, neceſſarium eſſe, ut ſit $nR > I$, cum alias nec foret $IO > IB$. Quare ſi tanta eſſet vis refringendi in aliqua ſphæra, ut nR excedatur ab I, ut analogia ſervetur, opus eſſet refractione a perpendiculo, ſeu IO deberet eſſe minor, quam IB; at cum ſimul id ex natura medii refringentis fieri nequeat, in ejusmodi globis iris effingi non poteſt. Exemplum inferius occurret.

109. Porro cum radius in oculum delatus objecti ſui imaginem exhibeat in linea recta, non ſatis eſt, angulum incidentiæ noſſe, ſed præterea inveniri debet ille, quem radius e ſphærula aquea egreſſus efficit cum radio incidente, etiam producto, ſi opus ſit. Quando itaque (fig. 58 Tab. VII) fit unica reflexio, quæratur ex analogia N. 107 poſtrema (quæ, ob $n = 2$, fit $\sqrt{3R^2} : \sqrt{I^2 - R^2} = CI : IB$) arcus IL, quod commode ope logarithmorum fit, tum ex priore $I : 2R = IB : IO$, etiam arcus IP: dabitur $QH = 2IP - 2IL$. Eſt vero etiam $HD = HI$, eademque refractio in ingreſſu ad perpendiculum, quæ in egreſſu a perpendiculo, adeoque $HV = QH$, & $QV = 4IP - 4IL$. Subtracto arcu $IHD = 4IP$, ex $360°$, manet IAD, ex quo ſi auferatur QHV, reſidui

residui dimidium $180^{\circ} - 4IP + 2IL$ metietur angulum NRM, quem radius secundo refractus MD continet cum incidente NI producto.

Ubi duplex reflexio (fig. 59. Tab. VII), repertis arcubus IL & IP ex iisdem analogiis (in quibus $n = 3$) quæratur $Id = 360^{\circ} - IH - HD - Dd = 360^{\circ} - 6IP$, aut, si $6IP > 360^{\circ}$, mutentur signa. Tum Id subtrahatur ex $QHV = 2IP + 4IP - 4IL = 6IP - 4IL$ (vel addatur, siquidem fuit $6IP > 360^{\circ}$); residui semissis $6IP - 2IL - 180^{\circ}$ (vel semisumma in casu altero) est mensura anguli NYM. Fig. 59. Tab. VII.

Dum tres sunt reflexiones (fig. 60. Tab. VII), posito $n = 4$, ac inventis IL & IP, quæritur $IS = \pm (IH + HD + Dd + dS) \mp 360^{\circ}$. Arcus hic subtrahitur (vel additur) ab $VDQ = Vd + dD + DH + HQ = 4IP - 4IL + 4IP = 8IP - 4IL$; differentiæ dimidium (vel semisumma) est mensura anguli NYM. Fig. 60. Tab. VII.

ARTICULUS IV.

Ex allatis principiis exponuntur phænomina iridis regularis.

110. Habemus jam in promptu omnia principia, a quibus explicatio iridis pendet. Cum enim diversa sit diversorum radiorum refrangibilitas, ideoque alia semper ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refractionis, fieri nequit, ut sub eodem angulo incidentes radii diversæ speciei eundem habeant ex prima refractione focum, eundemque angulum comprehendant cum radiis inter se parallele post alteram refractionem emergentibus. Proinde si oculus in O (fig. 61 Tab. VII) constituatur, lumine solari NY, NY &c NR, NR &c in pluviæ guttas ubique ad Y, Y, R, R &c dispersas incidente, alterius sortis radii e superiore globulo parallele exeuntes venient ad O, alterius ex inferiore; cum, qui eundem comprehendunt angulum NYO, ex omnibus superioribus, vel inferioribus nuspiam concurrere possint. Idem prorsus est de radiis NR, anguloque NRO. Et quia ejusmodi globulos aqueos ubique sparsos ponimus, iidem anguli per integrum circulum haberi possunt (uti patet, si facta MO ad NR parallela, radii OR circumagantur circa OM, velut axem coni verticem in O habentis), iris forma circulari apparere debet, cujus tamen non nisi pars videri potest, & quidem semicirculus sole in horizonte constituto, altitudine maxima, ut mox videbimus, iridis externæ supra horizontem 54° 25′ circiter; internæ vero 42° 17′. In omnibus aliis casibus arcus hic minor est semicirculo; nullusque prorsus, altitudine solis 54° 25′ superante. Verum hæc ita clara sunt, ut uberiore expositione non egeant. Fig. 61. Tab. VII.

111.

111. Ut calculus ineatur, ſumpto ſinu refractionis $= 81$, dum radii ex aere in aquam pluviam incidunt, erit ſinus incidentiæ

pro rubris a	180	usque ad	$108\frac{1}{8}$
aurantiis	$180\frac{1}{8}$	usque ad	$108\frac{1}{5}$
flavis	$108\frac{1}{5}$	. . . .	$108\frac{1}{3}$
viridibus	$108\frac{1}{3}$	. . . .	$108\frac{1}{2}$
cæruleis	$108\frac{1}{2}$	. . . .	$108\frac{2}{3}$
Indicis	$108\frac{2}{2}$	. . . .	$108\frac{7}{9}$
violaceis	$108\frac{7}{9}$	. . . .	109.

Sumatur ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis pro radiis extimis rubris $108 : 81$, ſeu $I = 108$, $R = 81$, erit pro iride primaria (in qua $n = 2$) $nR + R = 243$, $nR - R = 81$; $I + R = 189$, $I - R = 27$, $nR = 162$.

$Log.\ I + R = 2,2764618$
$Log.\ I - R = 1,4313638$
Sum. $= 3,7078256$
Divid. per 2

$Log. \sqrt{I^2 - R^2} = 1,8539128$
$Log.\ CI = 10,0000000$
Sum. $= 11,8539128$

$Log.\ nR + R = 2,3856063$
$Log.\ nR - R = 1,9084850$
Sum. $= 4,2940913$
Divid. per 2

$Log. \sqrt{(nR+R)(nR-R)} = 2,1470456$

$Log. \sqrt{(nR+R)(nR-R)} = 2,1470456$
$Log.\ IB = 9,7068672$. Arcus LI proxime 30° 36′ 32″.

$Log.\ nR = 2,2095150$
$Log.\ IB = 9,7068672$
Sum. $= 11,9163822$
$Log.\ I = 2,0334238$

$Log.\ IO = 9,8829584$. Arcus IP proxime 49° 47′ 49″
$nIP = 99°\ 35'\ 38''$
$IL = 30\ \ 36\ \ 32$
$nIP - IL = 68\ \ 59\ \ 6$
$2(nIP - IL) = 137\ \ 58\ \ 12$
$180° - 2(nIP - IL) = 42°\ 1'\ 48'' =$ NRM Fig. 58 Tab. VII.

Si porro ratio I : R pro intimis violaceis accipiatur $109 : 81$, idem angulus invenitur 40° 16′ 40″, ut proinde tota latitudo arcus ſit 1° 45′ 8″. Eodem modo coloris violacei limbus exterior in iride ſecundaria, quæ duas habet reflexiones, apparere debet ſub angulo 54 9′ 30″; ac coloris rubri limbus interior 50° 58′ 44″, ut propterea latitudo ſit 3° 10′ 46″.

Atque hæc quidem ita haberent, ſi ſol eſſet tantummodo punctum lucidum; ſed quia ejus diameter dimidii fere gradus apparet, & radii

radii non modo e medio diſci puncto, ſed etiam ab extimis diſci limbis paralleli veniunt, fit, ut tantundem (dimidio ſcilicet gradu) latitudo) utriusque arcus augeatur, & eorum inter ſe diſtantia minuatur, uti Newtonus obſervat.

112. Sit enim (fig. 62 Tab. VII) radius e medio diſco N in globulum R incidens, & ad oculum O reflexus, NR. Super diametro OR deſcribatur circulus, ſecans NR in S: ſumantur utrinque ab R arcus Rr, $R\varrho$ æquales diametro ſolis apparenti, & ducantur rO, ϱO, nec non rS, ϱS; poſtremæ productæ tangent extimos limbos ſolis in n & ν, & anguli NRO, nrO, $\nu\varrho O$ erunt inter ſe æquales, ideoque idem color in globulis r, ϱ apparebit, qui in R videtur. Unde colores ſinguli utrinque angulis rOR; $RO\varrho$ latiores fient, totaque iris angulo $rO\varrho = rS\varrho$. Hinc conſequitur, præter extimos, in arcu cœleſti nullos colores ſinceros apparere poſſe, quod in ſpatia a ſingulis inter extremos comprehenſis occupata, ſuperior, ac inferior per 15′ circiter ſe ſe diffundat. Et cum non nullorum latitudo, quæ ex diverſa refrangibilitate radiorum ad eandem claſſem pertinentium oritur, ſit infra 15′, ut rubri, aurantii, flavi, indici, fieri neceſſe eſt, ut circa medium aurantii, flavi, & indici habeatur trium colorum commiſtio, ipſorum ſcilicet cum binis contiguis. Quare illud quoque conſtat, iridis colores cum illis haudquaquam exacte convenire, qui refractione in prismate vitreo oriuntur. Fig. 62. Tab. VII.

113. Eadem methodo calculare etiam licebit iridem, ſi fieret in globulis vitreis, ſumpta cum Newtono ratione ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis pro radiis extimis rubris 77 : 50, pro intimis violaceis 78 : 50; & quidem primariam per unicam reflexionem haberi poſſe, illico advertitur, cum $n = 2$, & $2 \times 50 = 100 > 77$ vel 78 (ſeu $nR > I$). Obtinetur autem angulus, ſub quo videretur coloris rubri limbus exterior, $= 19^{\circ}\ 24'\ 42''$, violacei limbus interior $17^{\circ}\ 50'\ 14''$, & latitudo arcus $1^{\circ}\ 34'\ 28''$. In ſecundaria fieret angulus pro rubris $93^{\circ}\ 41'\ 12''$, ſeu cum loco obtuſi deinceps poſitus accipi debeat) $86^{\circ}\ 18'\ 48''$, pro violaceis $83^{\circ}\ 6'\ 42''$, latitudo arcus $3^{\circ}\ 12'\ 6''$. In adamante Newtonus rationem ſinus anguli incidentiæ & refractionis, quando lux flava in adamantem ex aere incidit, ponit 100 : 41; & cum $2 \times 41 = 82$ adhuc minus ſit, quam 100, ſeu $I > nR$, colligitur, iridem primariam in hac gemma, ſi globuli formam haberet, fieri non poſſe. At ſi $n = 3$, erit $3 \times 41\ (= 123) > 100$, ideoque ſecundaria per duplicem reflexionem exhiberi poſſet, foretque angulus pro hoc radiorum genere $= 11^{\circ}\ 43'\ 30''$.

114. Si tres reflexiones fierent in guttulis aqueis, angulus (fig. 60) MYQ radiorum rubrorum foret $41^{\circ}\ 36'\ 56''$, violaceorum $37^{\circ}\ 8'\ 42''$, & inde color ruber deberet eſſe extimus, intimus violaceus. Sed enim in hoc caſu oculus ſpectatoris verſus eandem plagam, in qua ſol verſatur, dirigi deberet, cum angulus NYM fiat obtuſus; & fortaſſis Fig. 60. Tab. VII.

id contingit in halonibus quandoque ſideribus circumfuſis. Halones porro frequentiores, quorum limbus interior rubeus, cæruleſcens exterior, angulo circiter 26 graduum, *Hugenius* globulis glacialibus nivales nucleos intercipientibus, effici arbitratur, ad quos utique tenui modo, evanidoque colore tinctos radiorum parallelismus haud requiritur.

At hoc modo exponi non poteſt, qui fiat, ut quandoque intra iridem primariam plures aliæ concentricæ, ſibique contiguæ conſpiciantur, quales die 12 Junii An. 1749 a ſe obſervatas teſtatur *R. P. Boſcovich* in Append. ad Diſſert. *de Turbine*. Die 2 Octobris A. 1744 hora 4*ta* a meridie fuit iris primaria, ut ſolet, niſi quod violaceus color fuerit magis ruber, nec tam latus, ut debuiſſet. Hunc excipiebat color mixtus ex cæruleo, viridi, & flavo; ſequebatur iterum ruber minus latus; tum mixtus e viridi, & flavo; iterum ruber; infra hunc denuo grideſcens, ac denique rubeus debilis videbatur. Et ne quid mihi illuderet, alium, ut attentius iridem hanc irregularem conſideraret, rogavi, qui eosdem ſibi apparere colores teſtabatur. Similem paucos poſt dies iridem eo tantum diſcrimine vidi, quod non niſi tres arcus rubeos diſtinguere potuerim. Erat prior illa ſatis depreſſa, ut non niſi ſuperiorem arcus partem conſpicere potuerim, cruribus per interjecta ædificia interceptis.

Duobus ab hinc annis tempore æſtivo hora $7\frac{1}{4}$ poſt meridiem poſt fulmineam tempeſtatem longe illuſtriorem pluribus aliis obverſantibus notavi quinque arcus rubeos exhibentem in ſuperiore parte. E cruribus unum mihi erat conſpicuum, in quo color violaceus debitam latitudinem obtinebat, nec quidquam præter ordinem coloris habebat.

115. Exiſtimarem, hoc phænomenon eo referendum, quo evaneſcentes ſubito, rurſusque apparentes annulos coloratos, quos in iride obſervavit *Langewithus* (Trans. Angl. N. 375), non ſine admiratione, quod ab aliis haud notarentur, niſi colores a me recenſiti ita conſtantes fuiſſent, ut ab omnibus facillime conſpicerentur. Putat *Langewithus*, raro apparere iridem vivacioribus coloribus, quin hi ipſi annuli infra primariam cerni poſſint: ego vero perſæpe nitidiſſimas obverſavi irides, quin veſtigium eorum deprehendere potuerim. Denique ſuſpicatur, pluviæ guttas obtinere poſſe aliam refringendi vim, dum adhuc in ſublimiore atmoſphæræ parte ſunt, aliam poſtquam lapſu terræ propiores fiunt. *R. P. Boſcovich* eo propendere videtur, ut ſulphureis halitibus aquæ commiſtis cauſam majoris refractionis tribuat, modo commode conſtitui poſſet, qua ratione diverſæ eæ guttulæ in diverſis altitudinibus habeantur. *Pembertonus* denique Langewithianos annulos ex irregulariter diſperſis, iterumque refractis & reflexis radiis explicare conatur. Per regularem reflexionem res hæc exponi nequit; nam ſi ponas ter, quater, quinquies radios intra globulum aqueum conſueta refringendi vi præditum reflecti, vel angulos obtuſos

fos (ut de tribus reflexionibus N. 114 notavimus), ſub quibus iris videri deberet, vel certe alios obtinebis, quam qui requirerentur, ut poſſent arcus colorati intra primariam iridem referri.

116. Verum cum hæc omnia phyſicis relinquenda ſint, eſto opinioni cuivis pretium ſuum. Illud tamen videtur extra dubitationem, imprimis diverſitate vaporum in atmoſphæra ſuperficiei telluris propiore refractionem etiam Aſtronomicam, quam dicunt, quandoque notabiliter mutari, haud tamen ſemper: cur non poſſit tale diſcrimen quandoque obſervari in aliis refractionibus? Dein haud video, cur gradatim tantummodo ea vis diverſa in aqueis guttulis deprehendi debeat: an non poſſint ubivis diſperſæ eſſe ſphærulæ diverſis viribus præditæ, quin tamen alibi colorati annuli videantur, quam ubi anguli, quos radii ad oculum delati cum incidentibus efficiunt, eos videri exigunt. Certe innumeræ ſunt pluviæ guttæ, & nihilominus in aliquibus tantummodo iris cerni poteſt, ob eandem ſcilicet rationem.

Finis Catoptricæ.

INDEX CAPITUM
ET
ARTICULORUM.

Pag.
CAPUT I. 5
ARTICULUS I. De focis ſpeculorum ſphæricorum, & imaginibus in iis efformatis. 5
ARTICULUS II. Conſtructio graphica formulæ $\frac{df}{d \pm f} = z$. 11
ARTICULUS III. Ce Cauſticis per reflexionem; ubi de errore figuræ ſphæricæ. 14
ARTICULUS IV. De ſpeculis planis. 21
ARTICULUS V. De ſpeculis cylindricis, conicis, & pyramidalibus. 29
ARTICULUS VI. De magis uſitatis inſtrumentis catadioptricis. 33
ARTICULUS VII. Reſolvuntur non nulla Problemata. 39
CAPUT II. Applicatio Dioptrices & Catoptrices ad explicanda phænomena iridis. 45
ARTICULUS I. Exponuntur formulæ focorum dioptrica, & catoptrica pro ſphæris, paullum diverſæ ab iis, quas alias habuimus. 45
ARTICULUS II. Inquiritur in caſus, quibus poſt datum reflexionum numerum radii e ſphæra inter ſe paralleli egredi poſſint. 50
ARTICULUS III. Inquiritur in angulos incidentiæ, & eos, quos radii e ſphæra egreſſi cum incidentibus continent. 53
ARTICULUS IV. Ex allatis principiis exponuntur phænomena iridis regularis. 55

Errata.

Errata.

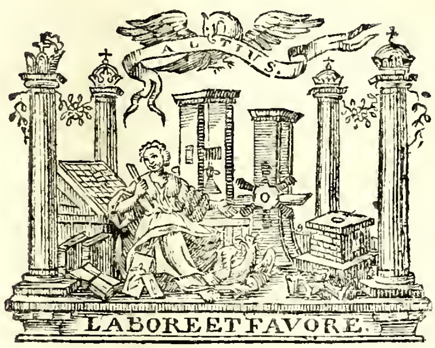
Pag.	*lin.*	*Errata*	*Corrige*
10	20	$2r$	$= r$
16	23	ſi	ſit
22	3	altero	altera
28	8	$a + b + 3c$	$a + b + 2c$
29	20	æquaales	æquales.
36	15	huic	huc
37	7	incidere	incideret
38	3	ductis, radiis	ductis radiis
43	31	per	pes
45	25	duobusque	duabusque
48	38	chardæ	chordæ

INSTITUTIONUM
OPTICARUM
PARS IV,
SIVE
PERSPECTIVA,
CONSCRIPTA IN USUM TIRONUM

A

CAROLO SCHERFFER

PRESBYTERO, PHILOS. DOCT. ET MATHES. SUBLIM. PROF. CÆS. REG.



VINDOBONÆ,

TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN, SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

MDCCLXXV.

INSTITUTIONUM
OPTICARUM
PARS QUARTA,
SIVE
PERSPECTIVA.

Non est nobis propositum, compendia illa, passim in libris de hoc argumento agentibus prostantia, tironibus proponere, quæ tantopere delineandi laborem facilitant; sed ea tantummodo subsidia afferre, quæ Geometria suppeditat, quæque omnia demonstrationis rigorem patiuntur, quandoquidem illud præcipue spectamus, ut principia perspiciantur, quibus determinationes juxta Perspectivæ leges factæ nituntur. Hæc ubi alte animo fuerint impressa, tum vero licebit per me praxes, ut vocant, quasvis sectari, quæ tædium laboris minuere possunt, quippe cum haud difficile ei, qui demonstrationibus assuevit, accidere possit, etiam rationes pervidere, etsi fortassis silentio prætereantur ab illis, qui usum tantummodo, promptamque in delineando manum in pretio habent. Sed enim evenit non raro, ut qui neglecto in demonstrando rigore mathematico delineationibus operam dant, ipsi nesciant, cur hanc, illamve legem observent, itaque Optices partem, quæ applicatæ Mathesi propria est, opificii instar pertractent.

Perspectivæ autem est, docere, qua ratione cujusvis puncti, quod in objecto, certo intervallo tum ab oculo, tum a tabula remoto, dari potest, projectio optica in tabula fieri possit, id est, qui punctum in tabula reperiri possit, per quod ab oculo objecti punctum, siquidem tabula transparens foret, cerneretur. Ex quo apparet, hanc partem visionis directæ maxime legibus totam inniti.

CAPUT I.

Perſpectiva Corporum.

ARTICULUS I.

NOTIONES ET PRINCIPIA.

1.

Objectum ex legibus Perſpectivæ delineare in tabula, ultra quam plerumque ſitum ponitur, eſt determinare ſingula puncta in tabula, per quæ tranſirent radii e ſingulis objecti punctis ad oculum venientes. Punctum, linea, ſuperficies &c hunc in modum definita, dicitur *punctum, ſuperficies, linea* &c *preſpectiva*, vel puncti, lineæ, ſuperficiei objectivæ &c *projectio perſpectiva*, vel etiam *projectio optica*, quod juxta Optices leges fiat.

Licet vero plerumque objectum reſpectu oculi poſt tabulam conſtitutum ſumatur, poſſunt tamen, adque etiam debent quandoque exhiberi delineationes objectorum ante tabulam poſitorum; & tum puncti alicujus ante tabulam ſiti projectio erit illud punctum tabulæ, ad quod terminatur recta ex oculo per punctum objectivum ducta.

2. Si utroque oculo objectum intuearis, radii e punctis objectivis ad oculum dexterum ducti in aliis punctis occurrunt tabulæ, ac illi, qui ex iisdem ad ſiniſtrum oculum veniunt. Unde diverſæ forent

 ejusdem

ejusdem puncti projectiones opticæ. Qua de causa consimilis fere delineationum perspectivarum nasceretur confusio in tabula, qualis est imaginum, quæ depinguntur confuse in oculo, si apices conorum radiosorum non terminantur in retina. Non habemus igitur, neque habere possumus Perspectivam pro duobus oculis. Hinc est, quod *quidquid in tabula repræsentatur, uno unius oculi aspectu videri posse debeat.* Sæpe exhibetur actio quædam, quæ non nisi momento durat, ideoque non nisi momento videri potest.

3. Ex notione delineationis perspectivæ sequitur I°: *lineæ rectæ objectivæ projectionem perspectivam esse itidem rectam, siquidem linea objectiva producta per oculum non transeat*; tum enim puncti instar appareret per tabulam. Nam oculus, & extrema puncta rectæ determinant planum trianguli, in quo sunt omnes rectæ, quæ e punctis, quæ inter extrema lineæ objectivæ sunt, ad oculum duci possunt. Intersectio autem hujus plani cum plano tabulæ necessario recta est.

Ex hoc principia deducuntur sequentia.

Coroll. I. Omnes lineæ objectivæ, descriptæ in plano, quod productum per oculum transit, non aliam habent projectionem, quam lineam rectam.

Coroll. II. Si linea objectiva sit plano tabulæ TM parallela, & Fig. 1. Tab. I. in partes (fig. 1 Tab. I) AC, CD, DE &c divisa, etiam projectio ejus perspectiva *ac*, *cd*, *de* &c eadem ratione divisa erit. Sunt enim triangula ACO, *ac*O; CDO, *cd*O; DEO, *de*O &c similia. At vero si linea objectiva $\alpha\beta$ non sit plano tabulæ TM parallela, ejus projectio erit quidem recta $\gamma\pi$ at divisio $\gamma\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\nu$ non fiet in eadem ratione.

Scholium. Ex eo, quod mox subjiciemus, patebit, corollarium hoc extendendum esse etiam ad curvas, immo ad ipsas superficies, quod ad divisionum & laterum rationem pertinet.

4. Sequitur II°, *Projectionem superficiei planæ esse itidem superficiem planam.* Fig. 2. Tab. I. Nam si (fig. 2 Tab. I) ex omnibus punctis superficiei ABCDE ad oculum O ducantur radii, oritur pyramis, quæ per planum tabulæ TLMN secatur in *abcde*, quæ sectio proinde superficies plana esse debet.

Coroll. I. Si superficies objectiva sit tabulæ plano parallela, erit projectio ei similis, utpote cum tunc sit OB : O*b* = BC : *bc* = CD : *cd* = DE : *de* &c. Secus polygona erunt quidem totidem laterum, at non similia. Unicus tamen casus extra parallelismum est, in quo similitudo locum habet, nempe dum intersectio tabulæ est respectu baseos pyramidis alterna.

Coroll. II. Projectio circuli objectivi, & tabulæ paralleli est etiam circulus. Sequitur hinc omnes radios projectionis fore æquales, ideoque lineam rectam, quemcunque situm habeat in plano, quod tabulæ parallelum sit, habere projectionem constantis magnitudinis, seu sit verticalis, seu horizontalis, seu ad horizontem obliqua.

Coroll.

Coroll. III. Cum interfectio coni, aut pyramidis radiofæ habentis bafin fuperficiem curvam objecti trans tabulam fiti, cum tabula plana, fit fuperficies plana, ea non poteft repræfentare fuperficiem curvam, nifi vel plures notæ in ea exhibeantur, quarum projectio haberi poffit, vel vero oculus fpectatoris ope lucis, & umbræ juvetur. Imo id etiam neceffarium eft, quando fuperficies plana non eft tabulæ parallela, cum partes remotiores debeant obfcuriores apparere.

5. Sequitur III°. *Projectionem polyedri effe projectionem omnium planorum, quæ oculo afpectabilia funt.* Deducitur ex pyramide radiofa, habente bafes ad fe fe inclinatas, nempe ipfa plana polyedri.

At fi folidum fit fuperficiei rotundæ, uti cylinder, conus, fphæra &c, projectione bafeos circularis, laterum, diverfæ in diverfis diftantiis altitudinis, denique ope lucis, & umbræ a fuperficiebus planis diftingui debent.

6. Scholium. Quemadmodum fumpfimus objectum exiftere poft tabulam, ita ponimus tabulam effe planum. Uti autem prior illa hypothefis neceffaria non eft, ita quoque fieri poteft, ut projectio exhibenda fit in alia fuperficie, quam plana. Sed cum hoc perraro exigatur, fatis nobis fuerit, fi principia delineationis perfpectivæ pro planis tabufis dederimus. In Geometria exercitati, & Optices leges probe tenetes facile intelligent, quid ejusmodi in cafu, qui extra ordinem evenire poteft, agendum fit.

7. Ut habeantur termini comparationis, ad quos objecta vifa referantur, concipimus (fig. 3 Tab. I) imprimis *planum horizontale*, SZYX, five *planum libellæ* per oculum O tranfiens, ad quod fcilicet altitudines fupra planum terræ (quod priori parallelum eft, cui plerumque & ipfe fpectator, & objecta infiftere ponuntur) referuntur. Deinde fingitur *planum verticale* MNQR priori ad angulum rectum infiftens. Definit hoc planum fitum objectorum, quantum fcilicet dexteriora, finifteriorave alia aliis fint. Denique *planum tabulæ* TBDF ad priora duo itidem perpendiculare ponimus, ad quod fcilicet referenda funt puncta objectiva, quæ quis determinare velit. Fig. 3. Tab. I.

Interfectio plani verticalis cum plano tabulæ AE dicitur *linea verticalis;* interfectio vero plani horizontalis cum eodem plano tabulæ CG eft *linea horizontalis.* Hæ duæ lineæ funt jam termini comparationis, ad quos puncta perfpectiva referuntur. Si enim fcias, quantum punctum perfpectivum diftet v. g. verfus dexteram a linea verticali AE, quantum item fit fupra, vel infra lineam horizontalem CG, illius fitus datus eft. Denique punctum V eft *punctum vifus,* in quo linea verticalis horizontalem fecat; OV vero ad planum tabulæ perpendicularis, & per V tranfiens, eft *radius principalis.* Eft igitur radius principalis diftantia oculi a plano tabulæ in plano horizontali accepta, cum fit interfectio duorum planorum (horizontalis fcilicet, & verticalis) ad planum tabulæ normalium.

8. Quo-

8. Quoniam omnia plana parallela ad planum libellæ oculi tandem in diſtantia infinita concurrere videri debent ex legibus Optices, evaneſcente angulo, ſub quo eorum diſtantia videtur, evidens eſt, *lineam horizontalem eſſe projectionem ipſius horizontis.* Et quia circulus ſphæræ cœleſtis horizontalis etiam per oculum tranſit, erit eadem linea projectio perſpectiva hujus circuli. Eodem modo cum circulus verticalis ſphæræ cœleſtis tranſiens per oculum non habeat aliam projectionem, quam lineam rectam (Corol. I. N. 3) erit *linea verticalis projectio perſpectiva circuli verticalis per oculum tranſeuntis.*

9. Theorema I. Quemcunque ſitum habeat tabula, projectio perſpectiva duarum, aut plurium rectarum objectivarum parallelarum inter ſe, convergere debet verſus punctum in plano tabulæ (utcunque producto, ſi neceſſe ſit), in quo eidem occurrit recta ex oculo ad rectas objectivas parallele ducta.

Fig. 4. Tab. I. Demonſtratio. Eſto (fig. 4 Tab. I) oculus in O, planum tabulæ TLMN, rectæ objectivæ parallelæ inter ſe AB, *ab*, recta ex oculo O ad AB parallela O*d*, quæ occurrat in c plano tabulæ. Evidens eſt, haberi hac ratione tres rectas parallelas O*d*, AB, *ab*, quarum diſtantia tandem optice evaneſcere debet, ſi indefinite producantur, adeoque videri debent in aliquo puncto infinite diſtante concurrere, & ad illud concurſus punctum ex O nulla alia duci poteſt, quam O*d* ad AB, *ab* parallela. Eſt autem hujus puncti projectio perſpectiva punctum tabulæ *c* (1); igitur etiam lineæ objectivæ AB, *ab* ita debent perſpective exhiberi, ut ad *c* convergant. Q. E. D.

10. Punctum ejusmodi, ad quod plures parallelæ convergunt in tabula, dicitur earum *punctum accidentale*, ejusque inventio maxime in delineationibus Architectonicis magnum uſum habet.

11. Coroll. I. Lineæ parallelæ objectivæ, ſi fuerint in plano parallelo ad planum libellæ oculi, habent punctum accidentale in linea horizontali; & ſi eæ lineæ fuerint perpendiculares ad planum tabulæ, earum punctum accidentale eſt punctum viſus. Nam in poſteriore caſu nulla alia ad eas parallela ex oculo duci poteſt, quam radius principalis.

12. Coroll. II. Rectæ objectivæ parallelæ inter ſe, ſi ſimul fuerint plano tabulæ parallelæ, carent puncto concurſus. Quippe recta ex oculo iisdem parallele ducta non niſi ad diſtantiam infinitam plano tabulæ occurrere poteſt, ideoque in quavis diſtantia finita earum projectio perſpectiva per rectas parallelas fieri debet.

13. Coroll. III. Dimenſiones ergo objecti æquales & parallelæ plano tabulæ, æquales etiam habent projectiones opticas, quamcunque diſtantiam habeant a plano verticali, & diverſitas tantummodo habetur ex diſtantia majore, vel minore a plano tabulæ.

14. Coroll. IV. Si parallelæ objectivæ, & ſimul ad tabulam parallelæ ſint in ratione data diviſæ, erunt earum projectiones perſpecti-

ſpectivæ in eadem ratione diviſæ. At ſi parallelæ habeant punctum concurſus, ſive (idem eſt) ſi non ſit tabulæ parallelæ, alia erit diviſio perſpectiva.

Pars prima hujus corollarii, uti etiam coroll. præcedens, poterat immediate e N. 4 deduci. Nam ubicunque fuerit linea verticalis (fig. 1 Tab. I) partes æquales lineæ objectivæ AB ſemper habent ejusdem magnitudinis projectiones *ac*, *cd* &c. ratione ſimilitudinis triangulorum, quamvis hæ partes inæqualiter diſtare debeant a plano verticali. Fig. 1. Tab. I.

15. Hæc ſunt fere principia, quibus leges perſpective delineandi nituntur. Si quæ alia, quæ ex allatis non ita pronum fuerit deducere, explicatius tradenda ſunt, ea ſuo loco referemus, ut uſus poſcet. Itaque ſubjungimus problema fundamentale, ad quod fere omnia reducuntur.

16. *Problema Fundamentale.* Datis poſitione plano tabulæ, loco oculi, & puncto objectivo poſt tabulam, invenire ejus projectionem in tabula.

Reſolutio. Sint in fig. 3 Tab. I omnia, ut N. 7 poſuimus, & præterea punctum objectivum β, cujus diſtantia a plano verticali ſit $\beta\gamma = \alpha\delta$, & altitudo ſupra planum horizontale $= \beta\alpha = \gamma\delta$. Cogitentur ex oculo O ductæ rectæ $O\gamma$, $O\delta$, $O\alpha$, $O\beta$, quæ poſtrema in λ occurrat tabulæ TD; erit λ projectio perſpectiva puncti β, ideoque dabitur λ, ſi habeatur ejus diſtantia a linea verticali $\lambda\mu = V\varepsilon$, & diſtantia a linea horizontali $\varepsilon\lambda = V\mu$. Evidens eſt, $O\gamma\beta\alpha\delta$ referre pyramidem parallele ad baſin $\gamma\beta\alpha\delta$ ſectam a plano tabulæ $\mu\lambda\varepsilon V$, ideoque erit $O\delta : \delta\gamma\ (= \alpha\beta) = OV : V\mu$ vel $\varepsilon\lambda$; item $O\delta : \delta\alpha\ (= \gamma\beta) = OV : V\varepsilon$ vel $\mu\lambda$, hoc eſt Fig. 3. Tab. I.

I° Radius principalis plus diſtantia objecti a tabula ($OV + V\delta = O\delta$)
eſt ad radium principalem (OV);
ut eſt altitudo objecti ſupra planum horizontale ($\delta\gamma$ vel $\alpha\beta$)
ad diſtantiam puncti perſpectivi a linea horizontali ($V\mu$ vel $\varepsilon\lambda$).

II°. Ut eſt radius principalis plus diſtantia objecti a tabula ($OV + V\delta = O\delta$)
ad diſtantiam objecti a plano verticali ($\delta\alpha = \gamma\beta$);
ita eſt radius principalis (OV)
ad diſtantiam puncti perſpectivi a linea verticali ($V\varepsilon$ vel $\mu\lambda$).

Igitur ſi ſumatur in linea verticali $V\mu$ (quartus primæ analogiæ terminus), & agatur ex μ ad lineam horizontalem parallela $\mu\lambda$; dein in horizontali accipiatur $V\varepsilon$, quartus terminus ſecundæ analogiæ, fiatque ex ε ad lineam verticalem VA parallela, harum interſectio λ præbebit punctum perſpectivum quæſitum. Q. E. F.

Apparet, poſſe quævis puncta objecti hunc in modum determinari etiam ope calculi, ſiquidem detur radius principalis, & diſtantiæ punctorum objectivorum tum a plano horizontali, tum a verticali in partibus ſcalæ accuratæ, id, quod in majoribus delineationibus

ſuadetur. Et tum conſcribenda erit tabella diſtantiarum, prædictæque analogiæ pro ſingulis punctis adhibendæ, poteruntque facilitandi calculi gratia logarithmi adhiberi.

18. Obſerva I. Quando objecta exhibenda ſunt in tabula, rariſſime veræ eorum dimenſiones requiruntur, ſed tantummodo vera dimenſionum proportio, quod alias enormis magnitudinis tabulæ requirerentur. Unde orgyarum, pedum &c loco adhibentur digiti, lineæ &c, prout ſcilicet res ipſa, & tabulæ magnitudo fert. Maximæ dimenſiones ſunt illæ, quas objectum haberet in ipſo plano tabulæ poſitum. Unde longitudo, & latitudo tabulæ dividitur in partes æquales, quot lubet, quæque vel pedibus, vel digitis, vel etiam orgyis objectivarum magnitudinum reſpondent, ad quas etiam revocandæ ſunt diſtantiæ in orgyis, pedibus, vel digitis datæ, quæ res Geometriæ gnaro haud poterit difficultatem creare. Partes ejusmodi dicuntur *moduli frontis*, *moduli veri* (quod pro veris dimenſionibus ſubſtituantur); & in hiſce ponuntur dari diſtantiæ punctorum objectivorum a plano verticali, & horizontali.

19. Obſerva II°. Si punctum objectivum eſſet λ, & tabula TBDF tranſiret per planum $\gamma\beta\alpha\delta$, foret radius principalis Oδ, & β projectio perſpectiva. In hac hypotheſi inveniendæ forent rectæ $\delta\alpha$, & $\delta\gamma$, & in utraque analogia primus terminus mutaretur in ſequentem: *radius principalis minus diſtantia objectivi puncti a tabula*; reliquis manentibus.

20. Problema, quod modo attulimus, diverſas graphicas ſolutiones admittit. Adferemus tantummodo ſequente Articulo tres, quæ commodiores videntur, quas etiam uno, alterove particulari exemplo illuſtrare conabimur.

ARTICULUS II.

Proponuntur tres methodi delineationes perſpectivas ex legibus opticis faciendi.

I Methodus delineandi ope Craticulæ perſpectivæ.

Fig. 5. Tab. I.

21. Si conſtruatur parallelogrammum ABCD, habens latus AB idem cum margine inferiore tabulæ A′B′BA (fig. 5 Tab. I), dicitur id *planum geometricum*. Porro projectio perſpectiva hujus plani geometrici eſt *craticula perſpectiva*, qua de agimus. Ut delineatio accuratior ſit, dividatur planum geometricum in plura quadrata minora ductis KP, LQ, MR &c ad AB; & EE′, FF′, GG′ &c ad AD parallelis. In tabula ſit M′G linea verticalis, O′L′ horizontalis, V pun-

punctum visus. Transferatur ex V in x, & y (producta, si opus sit, linea horizontali) radius principalis. E puncto visus V fiant rectæ VA, VE, VF &c ad singula divisionum lineæ AB puncta. Eodem modo ducantur ex x & y ad eadem divisionum puncta rectæ xA, xE, xF &c, yB, yH, yG &c; ubi hæ secant VA, VB in k, l, m, n, d &c item p, q, r, s, c &c, fiant kp, lq, mr, ns, dc &c, erit AdcB craticula perspectiva, & trapezia ejusdem repræsentabunt quadratula minora plani geometrici, ita, ut H$p'p$B exhibeat projectionem quadratuli HBPP′ &c.

Ut demonstretur, esse hanc projectionem perspectivam plani geometrici, satis est, si id ostendatur de puncto quovis P′, cujus distantia a plano tabulæ est P′H = V′G = HG, & distantia a plano verticali P′V′ = GH. Sunt triangula V$p'x$, Gp'H ob parallelas GH, Vx similia, adeoque Vp': p'H = Vx: GH, & Vp' + p'H: Vp' = Vx + GH: Vx. Atqui est etiam Vp' + p'H: Vp' = GH: up'; igitur etiam Vx + GH: Vx = HG: up', hoc est, radius principalis plus distantia puncti objectivi P′ a plano tabulæ (Vx + GH), est ad radium principalem (Vx), ut est distantia puncti objectivi a plano verticali V′P′ = GH) ad distantiam puncti perspectivi p' a linea verticali ($p'u$). Eodem modo demonstratur debita distantia a linea horizontali. Quoniam igitur hæc est analogia Problematis fundamentalis, projectio puncti objectivi P′ est in craticula punctum p', consequenter &c.

22. Observa I°. Ad constructionem craticulæ perspectivæ satis foret, radium principalem semel tantum ex V in Vx transferre; nam rectæ xH, xG, xF &c secant rectas VB in p, VH in p', VG in u &c, & obtinentur diagonales quadratorum perspectivorum pH, p'G &c, quæ satis sunt, ut ipsa quadrata perspectiva construantur. Verum securius est, si etiam radius principalis transferatur in Vy, ut æquales fiant intersectiones in linea VA, nempe in k, l &c, & duci possint parallelæ kp, lq &c.

23. Observa II°. Vacuum, quod relinquitur inter margines laterales tabulæ BB′, AA′; & rectam cB, dA, facile repletur, si rectæ dc, ns, mr, &c utrinque usque ad margines producantur, singularumque divisiones in singularum productiones transferantur.

24. Observa III°. Divisiones æquales plani geometrici, & marginis infimi tabulæ AE, EF &c sunt *moduli frontis*; projectiones vero Bp, pq, &c Hp' &c sunt *moduli longitudinis decrescentis* pro distantiis a tabula BP, PQ &c, uti etiam $p'p$, hc &c sunt moduli latitudinis decrescentis pro distantiis HP′, HH′ &c. Porro cum moduli latitudinum decrescentium sint projectiones perspectivæ rectarum ad planum tabulæ parallelarum; & altitudines verticales sint itidem parallelæ plano tabulæ, evidens est, *modulos altitudinum pro diver-*

ſis diſtantiis a tabula eſſe eosdem cum modulis latitudinum decreſcentium (13).

25. Non ineleganter exhibentur quandoque objecta, quorum pars aliqua extra tabulam promineat, utque id ope craticulæ perſpectivæ fieri poſſit, producenda erit craticula verſus oculum ſpectatoris ſequente ratione. Eſto in tabula A′B′BA eadem projectio (fig. 6 Tab. I) A*dc*B plani geometrici figuræ 5^tæ; petatur, ut v. g. uno modulo frontis producatur extra tabulam. Producantur rectæ *d*A, *c*B indefinite, uti etiam *x*E, donec in K′ concurrat cum *d*A; & *y*H, donec rectam *c*B ſecet in P′. Puncta K′P′ conjungantur recta K′P′, quæ erit ad AB parallela. Productis etiam VE, VF, VG &c usque in E′, F′, G′ &c, habebuntur projectiones quadratorum plani geometrici, unius moduli frontis, quæ ſita ponantur ante tabulam. Si opus eſſet duobus modulis producendæ eſſent *y*G, *x*F, donec concurrerent cum *c*B, *d*A &c. Demonſtrationem dabimus in ſecunda Methodo.

Fig. 6. Tab. I.

26. Exemplum primum. Sit exhibendum priſma baſium parallelarum, & æqualium, quæ ſint (fig. 7 Tab. I) trapezia velut *abcd*. In tabula ABCD ponimus jam conſtructam eſſe craticulam perſpectivam, eſtque OP linea verticalis, HR horizontalis, VS radius principalis, V punctum viſus. Deſcribatur in plano geometrico DCFE baſis priſmatis *abcd*, ut ſinguli anguli tum a margine tabulæ DC, tum a linea verticali OP tantum diſtent, quantum poſt tabulam deberent diſtare a plano tabulæ, & a plano verticali, ideoque collocentur in iis quadratulis, quæ habent præſcriptas diſtantias. Quærantur punctis *a*, *b*, *c*, *d* plani geometrici correſpondentes projectiones perſpectivæ in craticula perſpectiva, nempe *n*, *i*, *o*, *p*, habebitur projectio perſpectiva baſeos. Fingamus, altitudinem objectivam priſmatis eſſe unius moduli frontis. Erigantur e punctis perſpectivis angulorum *n*, *i*, *o*, *p* parallelæ ad lineam verticalem OP, fiantque ſingulæ æquales uni modulo latitudinis decreſcentis in ea diſtantia, in qua habentur anguli baſeos, nempe *nr*, *is*, *ot*, *pu*. Puncta, quæ videri poſſunt, connectantur rectis, reliqua determinentur lineis cæcis, ut ajunt: erit *sinrupt* optica delineatio priſmatis.

Fig. 7. Tab. I.

27. Planum geometricum deſcribitur infra tabulam, velut ſi exhiberet planum terræ productum, ad quod tabula eſt verticalis; poſt tabulam enim deſcribi nequit, ut per ſe patet. Illud tantum obſervandum eſt, objecta ita collocanda eſſe in plano geometrico, ut partes oculo ſpectatoris objiciendæ ſint propiores margini infimo tabulæ DC. Ratio clara eſt, utpote cum ipſum planum geometricum ſitum oppoſitum habeat plano terræ, cui reipſa objecta inſiſtere ponuntur. Interim hoc delineationibus nihil obeſt, cum non minus ante tabulam diſtantiæ ab ipſa, & a plano verticali rite exhiberi poſſint, ac poſt tabulam, modo projectiones orthographicæ objectorum ita fiant in plano geometrico, ut diximus.

28.

28. Exemplum secundum. Petatur projectio perspectiva prismatis, cujus bases parallelæ sint trapezia, altitudo vero duorum modulorum frontis, quod ita sit collocatum, ut unus angulus baseos A (fig. 8 Tab. II) dimidio modulo frontis extra tabulam promineat. Fig. 8. Tab. II.

Resolutio. Plani geometrici PNQS una divisio PP′, NN′ transferatur in margines laterales tabulæ supra marginem infimum, & concipiantur quadratula PP′o′o, oo′n′n, nn′m′m, mm′N′N hujus plani existere post tabulam. Productis VP, VN; *xo*, *ym* in *z* & *r* producatur etiam craticula perspectiva, ita ut trapezium P*zr*N sit cum suis areolis projectio perspectiva parallelogrammi P.P′N′N cum suis quadratulis. Collocetur angulus baseos A, qui eminere debet extra tabulam, in debita areola plani geometrici *oo′n′n* in puncto A, reliqui juxta datas distantias in B, C, D. Quadrato *oo′n′n* cum respondeat trapezium *ontu*, quæratur in hoc punctum homologum *a*, uti etiam *b* pro angulo B, *c* pro C, *d* pro D in craticula perspectiva, erit baseos projectio *abcd*. Si modo ex *a*, *b*, *c*, *d* erigantur verticales æquales singulæ duobus modulis latitudinum decrescentium pro datis distantiis, habebitur projectio petita prismatis, cujus basis superior erit $\alpha\beta\varkappa\delta$.

29. Cum craticula perspectiva in tabula apparere non debeat, patet, objecta ope craticulæ delineata plerumque transferri debere in aliam tabulam, quæ munda sit, & lineis cæcis non deformata, quæ res non sine molestia fieri potest. Unde hæc methodus non nisi pro minoribus, paucisque objectis commendari potest, maxime quod majoris accurationis capax non sit, nisi quadratula plani geometrici admodum multiplicentur.

II. Methodus: sine craticula perspectiva.

30. Ut hæc methodus usui sit, dari debet radius principalis, linea horizontalis, & punctum visus. Objectorum distantia tum a tabula, tum a plano verticali vel in tabella descripta sit, oportet, vel eorum situs in plano geometrico (quod tamen in arealas quadratatas dividendum non est) datus. Sit itaque in tabula TMNK (fig. 9 Tab. II) linea verticalis OP (quæ ultra tabulam produci intelligatur), linea horizontalis HR, punctum visus V, radius principalis VS. Sit facienda projectio puncti objectivi A, quod a tabula distet recta perpendiculari *a*A, & a plano verticali recta AL = *a*P. Ope harum duarum *a*A = PL, & AL = *a*P determinetur situs puncti A ante tabulam in plano geometrico. Tum accipiatur ope circini A*a* in infimo margine tabulæ, seu, quod idem est, demissum ex A in KN perpendiculum A*a* transferatur ex *a* in *aa′*, & quidem semper (quando objectum ponitur post tabulam) in partem oppositam illi, in quam ex V transfertur radius principalis VS. Punctum *a* dicitur *punctum incidentiæ.* Fig. 9. Tab. II.

dentiæ. Ducatur e puncto visus V ad punctum incidentiæ recta Va, & altera ex S in a', scilicet Sa'; ubi hæ rectæ se intersecant in α, erit punctum projectionis perspectivæ.

Ut demonstretur, projectionem esse rite factam, ostendendum est, observari in hac methodo utramque analogiam problematis fundamentalis (16). Agatur ex a' ad aV parallela $a'B$, uti etiam $\alpha\lambda$ ad BS, erunt triangula $Ba'S$, $V\alpha S$; item $V\alpha\lambda$, VaP similia, ac $Ba' = Va$. Hinc est $BS : VS = Ba'$, seu $Va : V\alpha$. Est autem $Va : V\alpha = VP : V\lambda$; igitur $BS : VS = VP : V\lambda$. Jam vero $BS = BV + VS = aa' + VS = aA + VS$; & VP est distantia puncti objectivi A a plano horizontali, cum ponatur A in plano geometrico; $V\lambda$ vero est distantia puncti perspectivi α a linea horizontali; quare habemus: *radius principalis plus distantia puncti objectivi a tabula, est ad radium principalem, ut distantia puncti objectivi a plano horizontali ad distantiam puncti perspectivi a linea horizontali.*

In iisdem triangulis $V\alpha\lambda$, VaP est etiam $Va : V\alpha = aP$ seu $AL : \alpha\lambda$. Unde est quoque $BS : VS = AL : \alpha\lambda$, hoc est, *radius principalis plus distantia puncti objectivi a plano tabulæ est ad radium principalem, ut distantia puncti objectivi a plano verticali ad distantiam puncti perspectivi a linea verticali*, quæ erat altera analogia Problematis fundamentalis.

Fig. 10. Tab. II. 31. Sit dein (fig. 10 Tab. II) punctum objectivum A extra tabulam respectu oculi. Determinetur ope distantiarum a tabula, & plano verticali ejus situs ita, ut cadat in ipsam tabulam TMNK. Demissum ex A in KN (quam semper parallelam ad lineam horizontalem ponimus) perpendiculum Aa transferatur in aa', in eandem scilicet partem, in quam translatus est ex V radius principalis VS. Ducta ad punctum incidentiæ a recta Va producatur infra tabulam; tum agatur ex S per a' alia recta, quæ priori occurrat in α, erit α punctum perspectivum. Nam rursus facta $a'B$ ad aV parallela & æquali, ob similia triangula $V\alpha S$, $Ba'S$; item VaP, $V\alpha\lambda$, est $BS : VS = Ba'$ vel $Va : V\alpha = VP : V\lambda = aP$ vel $AL : \alpha\lambda$. Jam vero $BS = VS - VB = VS - aa' = VS - Aa$, id est, radius principalis minus distantia objectivi puncti a tabula; reliqui termini analogiæ iidem sunt cum prioribus. Quare (19) rite facta est projectio.

32. Ex hac demonstratione intelligitur ratio productionis craticulæ perspectivæ, quam superius (25) adhibuimus. Nam (fig. 8 Tab. II) distantiam PP' puncti P a tabula reipsa translatam in Po' posuimus (quod sumpserimus $Po\,o'P'$ esse quadratum), & per punctum incidentiæ P duximus indefinitam e puncto visus V, quam intersecat recta ex x per o ducta in z, consequenter est z punctum perspectivum puncti objectivi P', quod uno modulo frontis ante tabulam existere ponitur, sed ob contrarium situm plani geometrici post tabulam referri debet.

Fig. 8. Tab. II.

33.

33. Vel me tacente intelligitur, opus non esse, ut omnes lineæ ducantur integræ; satis est, si illic aliqua pars tenui plumbagine ducatur, ubi circiter judicatur futura intersectio. Præterea apparet, punctum perspectivum semper futurum in tabula, si punctum incidentiæ cadat in infimum ejus marginem, etsi alterum punctum, in quod distantia a tabula transfertur, velut a' in nostro casu, caderet extra marginem TK (fig. 9 Tab. II). Nam cum punctum perspectivum sit intersectio linearum Va, Sa', & Va sit tota in tabula; in eadem sit, oportet, punctum projectionis. Fig. 9. Tab. II.

34. Quod ad altitudines pertinet (idem intellige de profunditatibus, seu depressionibus infra planum terræ, vel geometricum), cum in hac methodo scala latitudinum decrescentium non habeatur, satis est, si altitudo data in modulis frontis transferatur in marginem infimum tabulæ, & ex ejus extremis ducantur ad quodvis punctum lineæ horizontalis rectæ. Ex puncto perspectivo fiat parallela ad eundem marginem, vel ad lineam horizontalem: pars hujus parallelæ inter crura trianguli, cujus basis est altitudo in modulis frontis data, intercepta erit altitudo perspectiva, uti mox in exemplo patebit. Ratio est, quod tam latitudines, quam verticales objectivæ sint in plano tabulæ parallelo; tale autem triangulum, quale construi jussimus, reipsa est scala latitudinum decrescentium pro ratione distantiæ a tabula, tot scilicet modulorum frontis, quot est altitudo data, igitur esse quoque debet scala altitudinum.

35. Quod molestum in hac methodo accidit, est, quod dum tabulæ sunt paullo majores, raro spatium sit pro plano geometrico, in quo situs objectorum determinari deberet; dein si radius principalis est longior, v. g. duorum pedum, & quod excedit, vix unquam habentur tam latæ tabulæ delineatoriæ, ut commode linea horizontalis e puncto visus tantumdem produci possit. Equidem rite conscripta tabella distantiarum tum a tabula, tum a plano verticali vices plani geometrici optime supplere potest: distantiæ enim a plano verticali dabunt puncta incidentiæ, ex quibus si transferantur in partem radio principali oppositam distantiæ a tabula, habentur omnia, quæ planum geometricum suppeditare potest. Quod spectat radium principalem, satis fuerit, si accipiatur ejus subduplum, subtriplum &c, modo etiam sumantur distantiarum a tabula subdupla, subtripla &c, servatis integris distantiis a plano verticali. Sic si fuerit V$s = \frac{1}{2}$ VS, & $ab = \frac{1}{2}aa'$, recta sb in eodem puncto α secare debet rectam Va, in quo eam secat Sa', ut ex Geometria clarum est. Cavendum tamen, ne nimium acuti fiant anguli Vαs, cum tunc intersectio non tam facile discernatur.

36. Ceterum qui frequentiorem delineationibus operam dant, varia sibi conquirunt subsidia, quibus laborem reddant faciliorem, & simul ejusmodi incommodis medeantur. V. g. tabulæ delineatoriæ inferi

ſeri poterit regula longior, in quam transferri poſſit radius principalis, & ne tot lineæ duci debeant, figi poſſunt tam in puncto viſûs, quam in extremo radii principalis tenuia fila, quæ ſi tendantur, ut per punctum incidentiæ alterum, alterum per punctum, in quod translata eſt diſtantia a tabula, transeant, idem præſtant, quod lineæ. Sed hæc hujus loci non ſunt.

Fig. 11. Tab. II. 37. Exemplum I. Sit exhibenda projectio perſpectiva pyramidis triangularis $\alpha\beta\delta\lambda$ (fig. 11 Tab. II). Ex datis angulorum baſeos diſtantiis a plano tabulæ, & verticali, nec non puncto, in quod cadit perpendiculum ex vertice in baſin demiſſum, fiat in plano geometrico ichnographia baſeos ABD, ſitque C punctum, in quod cadit perpendiculum e vertice demiſſum. Ductis Aa, Bb, Dd, Cc ad ON (quæ eſt pes tabulæ, & ad horizontalem lineam HR parallela), & in aa', bb', dd', cc' translatis, agantur ex puncto viſus V rectæ ad a, b, d, c. Radio principali ex V in VS translato, eædem ſecentur in α, β, δ, $\varkappa$ per rectas ex S ad a', b', d', c' ductas, erit $\alpha\beta\delta$ projectio baſeos. Sumatur QN æqualis altitudini pyramidis, & ducta QR, agatur ex $\varkappa$, quæ eſt projectio puncti C, ad ON parallela in q & n occurrens lateribus trianguli QRN. Ex $\varkappa$ excitata parallela ad lineam verticalem $\varkappa\lambda$, transferatur in eam qn; habebitur projectio perſpectiva altitudinis pyramidis. Puncta δ, λ; δ, α; α, λ; α, β; β, λ connectantur, habebitur pyramis optice delineata.

Fig. 12. Tab. II. 38. Exemplum II. Sit rurſus pyramis delineanda, ſed ita obliqua, ut punctum C (fig. 12 Tab. II) non ſolum extra baſin ABD, ſed etiam extra tabulam cadat.

Fiant omnia, ut prius, niſi quod C collocandum ſit intra tabulam. Ex C demiſſo perpendiculo Cc, fiat Cc = cc' verſus S, & rectæ Vc, Sc' productæ ſe ſecabunt in puncto projectionis extra tabulam $\varkappa$. Si fuerit NQ dimidia altitudo perpendicularis pyramidis (ſi enim ſpatium non admittat, ut accipiantur integræ dimenſiones, ſatis fuerit ſumere earum ſubduplum, ſubtriplum &c), producantur HN, HQ, & fiat ex $\varkappa$ parallela qn ad HR. In verticalem ex $\varkappa$ excitatam transferatur qn bis, ut nempe ſit $\varkappa\lambda = 2qn$; erit $\varkappa\lambda$ altitudo perſpectiva pyramidis, Reliqua per ſe clara ſunt.

III. *Methodus delineandi perſpective ope ſcalarum marginalium.*

39. Sunt huic methodo multa cum prioribus communia, alia ſibi propria habet. Nos paucis dabimus ſcalarum conſtructionem.

1*mo.* Ponimus tabulam, in qua delineatio facienda eſt, eſſe parallelogrammum rectangulum QKEF (fig. 13 Tab. II) in qua eſt ST linea verticalis, OPH linea horizontalis utrinque, quantum fieri poteſt, producta. Superior, & inferior margo QK, FE dividitur in *modulos frontis* æquales, qui utrinque a linea verticali ST in S 1, S 2 &c, S1, S2, S3 &c; item in

T1

T1, T2 &c, T1, T2, T3 &c, quoties fieri poteſt, transferuntur ſinguli, bini, terni &c. Margines hi ita diviſi ſunt *ſcala frontis.*

2do. Fiat PO æqualis radio principali, F, I; I, II; II, III; III, IV; IV, V &c vero ſint moduli frontis inter ſe æquales. Ductis ex O ad I, II, III, IV &c rectis, ſecabitur margo QF in 1, 2, 3, 4, 5 &c. Hæ diviſiones decreſcentes transferantur etiam in marginem KE, nempe E1 = F1, E2 = F2 &c. Diviſio horum marginum exhibet longitudines perſpectivas decreſcentes modulorum frontis pro diverſis a tabula diſtantiis, diciturque *ſcala longitudinem decreſcentium.*

3tio. Sumatur in linea verticali VC æqualis radio principali; tum quavis apertura circini (quo major, eo accuratior erit diviſio) deſcribatur arcus AB centro C, & dividatur in denos, vel quinos ſaltem gradus, ſi non in ſingulos dividi poſſit. Applicata ad C & diviſionum puncta regula, notetur ſemper ejus interſectio cum linea horizontali in 5, 10, 15, 20 &c. Ut vero hæc diviſio lineæ horizontalis uſui ſit, ſumi debet arcus AB ſaltem 60, vel 70 graduum. Eædem diviſiones V5, V10, V15 &c transferantur etiam in alteram partem lineæ horizontalis verſus O. Evidens eſt, eſſe V5, V15, V30 &c tangentes angulorum 5°, 15°, 30° &c ſumpto radio principali pro ſinu toto. Hunc in modum linea horizontalis erit *ſcala angulorum* in planis ad planum horizontale oculi parallelis deſcribendorum.

40. Tria nobis hic præſtanda ſunt: primum ut oſtendamus ſcalam longitudinum decreſcentium, ſeu modulorum frontis projectionem perſpectivam eſſe rite factam; deinde ut explicemus ſcalam angulorum ope tangentium, in quas diviſa eſt linea horizontalis; denique ut exponamus uſum harum ſcalarum, cum ceterum in ſcala frontis nulla eſſe poſſit difficultas.

41. Ob triangula OP1, 1IF ſimilia eſt OP: FI = P1: 1F, & OP + FI: OP = P1 + 1F (vel PF): P1, hoc eſt: radius principalis OP plus diſtantia puncti I a tabula, eſt ad radium principalem, ut eſt diſtantia puncti objectivi I a plano horizontali ad diſtantiam puncti perſpectivi 1 a linea horizontali; eſt igitur F1 projectio perſpectiva moduli frontis, prout nempe apparere deberet, ſi poſt tabulam exiſteret, & oculus in diſtantia radii principalis aſpiceret eundem per tabulam transparentem. Eodem modo eſt F2 projectio duorum modulorum F, II, ut facile intelligitur ex triangulis OP2, 2FII ſimilibus, & ſic porro. Quare patet, longitudinem perſpectivam modulorum frontis rite exhiberi in ſcala laterali FP, EK.

Poteſt etiam ſcala longitudinum decreſcentium hunc in modum conſtrui, modo ſufficiens accuratio adhibeatur.

Sit FN (fig. 14 Tab. II) modulus ſcalæ frontis, PN diſtantia ejus a linea horizontali, ſeu margo lateralis tabulæ, PQ ſit radius principalis. Ducatur PF, quam in *a* interſecet QN. Agatur ex *a* Fig. 14. Tab. II.

ad FN parallela $a1$. Si denuo ad 1 ducatur recta ex Q, ſecabitur PF in b, ex quo puncto fiat $b2$ parallela ad FN. Rurſus ducta Q2 ſecat PF in c, ex quo puncto ſi fiat parallela ad FN, nempe $c3$, erit 3 punctum, ad quod rurſus duci poſſit ex Q recta, & ſic porro, ut habeantur interſectiones in 1, 2, 3, 4 &c. Patet, eſſe $a1$, $b2$, $c3$ &c latitudines decreſcentes unius moduli perſpectivas; N1 vero, 1, 2; 2, 3 &c longitudines decreſcentes. Nam rurſus triangula Q P a, aFN ſimilia ſunt, & $QP + FN : QP = FP : Pa = PN : P1$, quæ eſt analogia fundamentalis. Pariter ſimilia ſunt triangula QPb, $ba1$, & iterum habetur analogia $QP + a1 : QP = Pa : Pb = P1 : P2$; quare erit 1, 2 projectio perſpectiva moduli unius; qui a priore tantum diſtat, quantum prior a tabula.

42. Jam monuimus, lineam horizontalem eſſe projectionem perſpectivam circuli horizontalis ſphæræ cœleſtis (8). Quod ſi linea objectiva ad planum horizontale parallela ſub certo angulo inclinetur ad planum verticale, evidens eſt, eam in infinitum productam debere occurrere horizonti cœleſti, ita, ut reſecet inde a plano verticali tot gradus, quot graduum fuerit inclinatio. Horum porro graduum projectio perſpectiva alia eſſe nequit, quam tangens, cum ſecus in projectione circuli non terminaretur, tota ſecante inſtar puncti apparente (3). Finge jam ex oculo duci rectam parallelam ad lineam objectivam; debebit hæc rurſus concurrere cum objectiva in eodem puncto horizontis, ad quod tendit linea objectiva: igitur diviſio facta pro oculo in diſtantia VC a tabula eadem eſt cum illa, quæ fieri poteſt pro quavis linea horizontali objectiva ad planum verticale inclinata ſub certo angulo.

43. Sequitur ex hoc, poſſe exhiberi perſpective ope lineæ horizontalis ita diviſæ angulum datum in plano quovis ad horizontem parallelo. Dicatur is angulus A, ſitque v. g. 50°, ita, ut crus alterum inclinetur ad planum verticale ſub angulo 35° verſus VH, alterum verſus VO ſub angulo 15°. Evidens eſt, ſi primum producatur infinite, & ſimul ducatur recta ex oculo illi parallela pariter infinita, utramque concurrere debere in diviſione 35°, ſeu in diſtantia V35 a puncto viſus. Eodem modo ſi ad alterum crus productum cogitetur ex oculo parallela itidem infinita, utriusque punctum concurſus erit diviſio 15 lineæ horizontalis verſus VP numerando. Ex quo liquet, ſi ad punctum perſpectivum verticis anguli A ducatur ex diviſione 35° ex parte VH, & ex diviſione 15° ex parte VP rectæ, eæ perſpective comprehendant angulum 50 graduum.

Si utrumque crus anguli objectivi (quem ſemper in plano horizonti parallelo ſitum ponimus) inclinaretur verſus eandem partem VH ad planum verticale, alterum v. g. ſubangulo 15°, alterum ſub angulo 65°: rectæ ex 15, & 65 ad projectionem verticis anguli ductæ iterum angulum 50° optice comprehenderent.

44. Ut igitur projectio perſpectiva anguli dati habeatur, fiat imprimis projectio verticis A. Ponatur crus unum inclinari ad planum verticale ſub angulo 55° verſus dexteram, alterum ſub angulo 5 graduum verſus ſiniſtram. Ducantur ad 55° ex parte H, & ad 5° ex parte O rectæ, habebitur projectio petita. Quod ſi vertex anguli non reſpiciat oculum, ſed lineam horizontalem, patet, conſtrui debere illi verticaliter oppoſitum, & ejus crura verſus marginem inferiorem tabulæ producenda eſſe. Sic *cBd* exhibet angulum 30°. Quod uſum harum ſcalarum generatim concernit, ex ſequente Articulo patebit.

ARTICULUS III.

Problemata, quibus uſus Methodi poſtremæ illuſtratur.

45. Problema I. Datis puncti objectivi a plano tabulæ, & plano verticali diſtantiis, ejus projectionem perſpectivam exhibere.

Reſolutio. Ponatur punctum objectivum a plano tabulæ diſtare 5 modulis, a plano verticali vero 4. Applicetur ad ſcalam longitudinum decreſcentium QL, PK (fig. 15 Tab. III) regula tranſiens per puncta diviſionum 5, 5, & ducatur linea cæca. Dein in ſcala frontis KL numerentur inde a linea verticali, ſeu a puncto T, verſus K (ſiquidem ita data ſit diſtantia a plano verticali) tot moduli, v. g. quatuor, quot dati ſunt a plano verticali, & ex 4 ducatur cæca linea ad punctum viſus V. Interſectio G eſt punctum perſpectivum quæſitum. In re evidente demonſtratione opus non eſt. Fig. 15. Tab. III.

46. Obſerva I. Si punctum objectivum poſitum ſit ante tabulam, utrinque producenda eſt ſcala longitudinum hunc in modum. Producta horizontali ſumatur QS = radio principali = V, 45°; in ſcalam frontis itidem productam transferantur unus, duo, tres &c moduli, (quot nempe opus fuerit), ſcilicet LI; I, II; II, III &c; ex S ducantur per I, II, III &c rectæ, quæ in α, β &c occurrant ſcalæ longitudinum QL productæ: erunt Lα, Lβ &c unus, duo &c moduli perſpectivi diſtantiæ ante tabulam. Quod ſi eædem diviſiones transferantur in K*a*, K*b* &c, ad determinandum ſitum perſpectivum eodem modo ſervient. Si ponatur punctum perſpectivum ante tabulam ſitum, atque ab eadem uno modulo diſtare, a plano verticali vero 4, agatur per *a* & α linea cæca, uti etiam ex V per punctum 4 ſcalæ frontis altera, quæ in Γ ſecet priorem, erit Γ punctum projectionis perſpectivæ.

Productionem ſcalæ longitudinum rite factam eſſe, patet ex analogia fundamentali. Nam ducta IR ad QL parallela, eſt SR: RI

(vel QL) = SQ : Qα, ſive radius principalis minus diſtantia puncti objectivi a tabula, ad radium principalem; ita diſtantia puncti objectivi a plano horizontali ad diſtantiam puncti perſpectivi a linea horizontali.

47. Obſerva II. Quando punctum objectivum non eſt in plano terræ, ſive geometrico, ſciri debet ejus diſtantia perpendicularis ab eodem plano; & tum facienda eſt prius projectio puncti plani geometrici, in quod cadit perpendiculum e puncto objectivo demiſſum, quod exempli gratia ſit idem, cujus projectionem G priore problemate exhibuimus. Fingamus, punctum objectivum eſſe 3 modulis ſupra planum geometricum elevatum: excitentur in G, & 4 bina perpendicula, ſeu ad VT parallelæ: in poſterius 4H transferantur tres moduli frontis, & conjungatur H cum puncto viſus linea cæca, quæ alterum perpendiculum in *g* ſecabit, quod erit punctum perſpectivum.

Si projectio perſpectiva ſit Γ (poſito puncto objectivo extra tabulam), linea VH producenda eſt, donec in γ occurrat perpendiculo Γγ, eritque γ punctum perſpectivum quæſitum.

48. Scholium. Quando facienda eſt projectio plurium punctorum exiſtentium in plano parallelo ad geometricum, operæ pretium eſt, ſcalam longitudinum contrahere, vel prolongare, ut obtineatur quodammodo novum planum geometricum, in quo puncta objectiva ſita ſint. Verum hoc problema inferius occurret.

49. Problema II. Projectionem lineæ objectivæ in plano geometrico ſitæ exhibere.

Sit *primo* linea objectiva plano verticali parallela, & ad planum tabulæ perpendicularis. Sit diſtantia a plano verticali quatuor modulorum, extremi vero vicinioris a tabula duorum modulorum, ipſa denique linea ſit 3 modulorum. Applicetur regula ad puncta diviſionum 2, 2, & 5, 5, ſcalæ longitudinum, fiantque duæ lineæ cæcæ. E puncto diviſionis 4 ſcalæ frontis ducatur ad punctum viſus V recta, quæ priores ſecet in A & G, erit AG projectio petita, ut clarum eſt.

Eſto 2*do* linea objectiva in plano geometrico ſita ad planum verticale obliqua, ita, ut extremum vicinius (quod duobus modulis a tabula ſit remotum) diſtet a plano verticali tribus; extremum remotius (quod a tabula diſtet 5 modulis) ab eodem non niſi 1 modulo abſit. Ductis iterum per 2, 2, & 5, 5, in ſcala longitudinum decreſcentium lineis cæcis, fiant V1, V3, ſcilicet e puncto viſus V ad diviſiones 1, & 3 ſcalæ frontis. Interſectiones D, C ſunt extrema lineæ perſpectivæ. Quare ſi conjungantur recta DC, erit hæc projectio optica lineæ objectivæ. Finge enim (fig. 16 Tab. III) eſſe VT partem productæ lineæ verticalis in plano geometrico, in quo ſit linea objectiva DC; ſi fuerit *e*D unius, *f*C trium modulorum, & ad VT perpendicularis, evidens eſt, jam eſſe longitudinem rectæ DC definitam, ideoque habitis punctis perſpectivis D, & C, habetur ipſa linea perſpectiva.

Fig. 16. Tab. III.

Aliter

Aliter. Quia per hypothesin *ef* est trium modulorum, & *f*C itidem trium, ducta D1 ad *ef* parallela, erit 1C duorum modulorum, & D1 : 1C = *sin. tot.* : *tang.* 1DC. Reperitur 1DC = 33° 42′ fere. His positis ducta (fig. 15 Tab. III) per 2, 2, scalæ longitudinum linea cæca, & V3 ad scalam frontis, habetur in C projectio puncti objectivi C, ex quo ducatur ad divisionem lineæ horizontalis 33° 42′ versus P recta C*n*. Ex V ducatur quoque ad divisionem 1 scalæ frontis recta V1, secans C*n* in D, erit CD projectio lineæ objectivæ CD. Nam angulus *n*DV = BDC = 33° 42′ optice, distantque Da linea verticali uno, & C tribus modulis. Fig. 15. Tab. III.

50. Detur *tertio* linea objectiva *d*C (fig. 17. Tab. III) longitudinis duorum modulorum, cujus extremum C distet a plano tabulæ duobus, a plano verticali vero tribus modulis: ipsa linea sit inclinata ad idem planum verticale sub angulo 33° 42′. Petitur ejus projectio perspectiva. Fig. 17. Tab. III.

Resolutio. Fiat projectio perspectiva puncti C, per quod (fig. 15 Tab. III) ducatur ad lineam horizontalem parallela BC (quæ transibit per divisiones 2, 2 scalæ longitudinum). Ducatur item VC, quæ producta secabit scalam frontis in divisione 3; sumantur ex 3 versus T duo moduli, & inde agatur 1V, occurrens lineæ 2, 2 in B. Sumatur dimidium complementi anguli 33° 42′, nempe 28° 9′, & quæratur hæc divisio in linea horizontali versus Q in *r*, ducaturque B*r*. Eodem modo ducatur ex C ad divisionem 33° 42′ in *n* versus P altera recta C*n*, quæ secabit B*r* in *d*; erit *d*C linea perspectiva duorum modulorum, & sub angulo dato ad planum verticale inclinata. Fig. 15. Tab. III.

Demonstratio facilis est. Nam ex constructione liquet, esse BC projectionem lineæ duorum modulorum in plano geometrico, quæ a tabula distat duobus modulis, ejus extremum C a plano verticali tribus. Quod si jam ducatur per B recta 1BV, habetur projectio trianguli rectanguli BDC figuræ 17^mæ^, utpote cum BV sit ad BC perpendicularis, & angulus *n*DV, vel BDC in fig. 17 æque, ac 15ta = 33° 42′; hinc est DCB ejus complementum = 56° 18′, cujus dimidium est 28° 9′.

Notum autem est ex Geometria, si fig. 17 describatur arcus B*d*, fore angulum DB*d* = $\frac{1}{2}$ DCB = 28° 9′. Quare cum construxerimus angulum VB*r* in fig. 15 graduum totidem, clarum est, nos fecisse projectionem perspectivam lineæ *d*C = BC figuræ 17^mæ^ duorum modulorum &c.

51. Coroll. I. Ex hac resolutione datur quoque projectio optica lineæ in plano geometrico, quæ sit inclinata ad planum verticale sub majore angulo, quam ut ejus tangens in linea horizontali exhiberi possit. V. g. (fig. 18. Tab. III) linea A*i* sit trium modulorum, & inclinata ad planum verticale sub angulo 70°. Extremum A ponatur distare a tabula duobus modulis, a plano verticali quatuor. Cogitetur constructum triangulum AFE, cujus latus AE = A*i*, seu trium Fig. 18. Tab. III.

 modu-

modulorum, angulus AFE = 70°. Quæratur per trigonometriam (aut etiam graphice) latus EF ex analogia: *ſin. tot.*: *tang.* 20° = 3: EF; reperietur EF = 1,092 proxime. Sit jam (fig. 15 Tab. III) AE projectio perſpectiva lineæ objectivæ AE. Ex E ducatur ad punctum viſus V recta EV; accipiatur utrinque in ſcala longitudinum 2*e*, 2*e* æqualis 1,092 moduli (quantum nempe exilitas diviſionum patitur), & applicata ad *e*, *e* regula ſecetur VE in F. Evidens eſt, eſſe AFE projectionem trianguli objectivi AEF. Ducatur ex E ad diviſionem 10° lineæ horizontalis recta, occurrens AF in *i*, habebitur A*i* perſpective trium modulorum, & inclinata ad planum verticale ſub angulo 70°. Nam in figura 18, facta A*i* = AE, ductaque E*ie*, eſt angulus *e*EF = 10° = ½ FAE.

Fig. 15. Tab. III.

52. Coroll. II. Deducitur quoque hinc ſolutio ſequentis problematis: ex dato puncto perſpectivo C ducere rectam, quæ ſit v. g. duorum modulorum, & inclinetur ad planum verticale ſub angulo 33° 42′. Agatur enim per C parallela ad lineam horizontalem, & ducatur ex V per idem C recta occurrens in *q* ſcalæ frontis. Sumatur *qp* duorum modulorum, & ſi conjungatur *p* cum V, erit CB duorum modulorum perſpective. Numerentur ab V verſus Q gradus, qui ſint dimidius angulus complementi inclinationis ad planum verticale; in noſtro caſu 28° 9′; inde ducatur ad B recta; ex C vero fiat recta C*n*, quæ inde ab V abſcindat in linea horizontali tangentem anguli 33° 42′. Secabunt ſe ſe poſtremæ hæ lineæ in *d*, eritque C*d* quæſita projectio.

53. *Quarto.* Sit linea objectiva data plano verticali parallela, ſed ad horizontem inclinata ſub dato angulo, v. g. 30°. Extremum A, quo inſiſtit plano geometrico (fig. 19 Tab. III), diſtet a plano tabulæ uno modulo, a plano verticali duobus. Fiat angulus BAP æqualis dato, in noſtro exemplo 30°; erit BP = ½ AB = *ſin.* 30°, & AP = *coſin.* 30° = 1,732 BP proxime. Catheti trianguli rectanguli vel conſtructione, vel calculo quæri debent, ſi detur linea objectiva magnitudine, quam iſthic duorum modulorum ſumimus.

Fig. 19. Tab. III.

Per 1, 1 (fig. 20. Tab. III) ſcalæ longitudinum ducta recta interſecetur in A per 2V, erit A punctum perſpectivum extremi A. Sit 1 *n* in ſcala longitudinum = 1,732 moduli decreſcentis, ſecabit *nn* rectam AV in P, ubi erit projectio puncti P figuræ decimæ nonæ. In ſcala frontis in diviſione 2 excitetur perpendiculum 2*a* unius moduli, nempe æquale cum BP fig. 19, & conjungatur *a* cum V. Ex P fiat ad verticalem parallela, quæ in B occurrat rectæ *a* V; erit B projectio alterius extremi lineæ objectivæ, adeoque AB linea quæſita.

Fig. 20. Tab. III.

Si extremum A eſſet remotius a tabula, & diſtaret v. g. 2,732 modulis, facienda eſſet imprimis ejus projectio in α ductis *nn*, & 2V. Deinde ducta 1,1 in ſcala longitudinum haberetur projectio puncti *p* figuræ decimæ nonæ in π. Sumpta 2λ = 1 modulo, ductaque λV, abſcin-

abſcinderetur ex $\pi\beta$ perpendiculari punctum β perſpectivum puncti B objectivi, foretque $\alpha\beta$ projectio ejusdem lineæ, ſed ſitu contrario.

54. Aliter. Quando lineæ objectivæ ſunt in planis ad verticale parallelis, uſui erit pro exhibendo angulo inclinationis ad horizontem ipſa diviſio lineæ horizontalis inde ab V in verticalem translata. Jam enim diximus, lineam verticalem eſſe projectionem circuli verticalis ſphæræ cœleſtis per oculum ſpectatoris tranſeuntis; unde evidens eſt, eum neque aliter, quam per lineam rectam in plano tabulæ exhiberi, neque gradus aliter, quam per tangentes optice deſcribi poſſe, uti de linea horizontali diximus (42). Hoc poſito, ſupputetur, ut prius, in fig. 19 Tab. III coſinus anguli inclinationis ad horizontem, ſumpta linea objectiva pro ſinu toto, fiatque dein, ut prius, in fig. 20 projectio tam puncti A, quam P. Tangens V 30° lineæ horizontalis transferatur in verticalem ex V in t, & conjungatur A cum t. Ex P excitatum perpendiculum, ubi occurrit rectæ At, determinabit puncti B objectivi projectionem. Quod ſi ſitus lineæ objectivæ ſit oppoſitus, iterum determinantur puncta perſpectiva α & π punctorum objectivorum A & P. Tangens V 30° transferatur in Vq infra lineam horizontalem; ducta $q\alpha\beta$ abſcindet ex perpendiculo indefinito $\pi\beta$ punctum perſpectivum β objectivi B, eritque $\alpha\beta$ projectio deſiderata.

55. *Quinto.* Petatur projectio perſpectiva rectæ AB (fig. 21 Tab. III), quæ ſit inclinata ad horizontem ſub angulo BAD, & ad planum verticale ſub angulo DAG. Fig. 21. Tab. III.

Linea GAH ponitur parallela ad planum verticale; extremum A a plano tabulæ uno, a plano verticali tribus modulis remotum. D ſit punctum in plano geometrico, in quod cadit perpendiculum e B demiſſum. Quærantur, vel ex conſtructione, vel ex calculo trigonometrico AD, DB, ſi detur AB magnitudine, ſcilicet ex analogiis R : *coſ.* BAD = BA : DA, & R : *ſin.* BAD = BA : BD. Sumamus, angulum BAD eſſe 33° 42$'$, & AD = 3, DB = 2 modulis fuiſſe repertum proxime. Fingamus item, in tabula non poſſe exhiberi tangentem anguli DAG, qui exempli cauſa ſit 60°. Cogitetur in plano geometrico radio AD deſcriptus arcus DE æqualis complemento anguli DAG, quo planum trianguli ABD verticale inclinatum eſt ad planum verticale tabulæ, ideoque in noſtro exemplo 30°, cujus tangens ſit EF, quæ itidem vel calculetur, vel conſtruatur. Quia invenimus DA = EA = 3 modulis, & A a plano verticali totidem modulis diſtare ponitur, ducantur e ſcalæ frontis diviſionibus 3 & 6 rectæ ad V, quæ in E & A (fig. 20 Tab. III) interſecant rectam per diviſiones 1,1 ſcalæ longitudinum ductam, eritque EA projectio lineæ objectivæ EA figuræ 21^{æ}. Fig. 20. Tab. III. Ducatur item per ſcalam longitudinum recta nn, ut ſit 1n perſpective æqualis cum EF figuræ 21^{mæ}, ſeu tangente anguli FAE, & habebitur EF tangens anguli FAE, qui erit triginta, conſequenter FAV ſexaginta graduum optice. Punctum E conjungatur cum diviſione 15°

lineæ

leneæ horizontalis, qui ſcilicet angulus eſt dimidius anguli FAE. Recta E 15° abſcindet ex FA partem DA, quæ eſt projectio objectivæ lineæ DA fig. 21. Producatur 15° E usque ad ſcalam frontis in *s*, ubi excitetur perpendiculum *sm* = BD figuræ 21 = 2 modulis frontis; alterum perpendiculum (ſive parallela ad lineam verticalem) excitetur in D, cui in B occurret recta ex *m* ad 15° lineæ horizontalis ducta, eſtque DB projectio perpendiculi DB figuræ 21, & AB perſpectiva rectæ AB datæ.

56. Scholium. Qua ratione anguli dati numeri graduum ad datum punctum perſpectivum conſtrui debeant, ſatis patet e NN. 43 & 44. Ne quid tamen omiſiſſe videamur, ſubjungimus ſequentia duo problemata, quæ plus difficultatis habere videntur.

Fig. 22. Tab. III. 57. Problema III. Ad datum punctum C lineæ perſpectivæ DA ducere perpendicularem HC; vel (fig. 22 Tab. III) ex dato puncto perſpectivo H ad datam perſpectivam AD demittere perpendicularem.

Reſolutio. Producatur data perſpectiva AD verſus lineam horizontalem, cui occurrat v.g. in diviſione 30° verſus R. Incipiendo ab V numerentur verſus K 60°, qui complent 30° ad rectum. Inde a 60° ducatur ad datum punctum C lineæ perſpectivæ recta; erit 60 CD = 90°, utpote = 60° + 30°, ut clarum eſt. Q. E. primum.

Iterum producatur perſpectiva AD, donec in 30° occurrat lineæ horizontali verſus R. Ab V verſus K numeratis ſexaginta gradibus ducatur ex 60° per datum punctum H recta, quæ lineæ perſpectivæ occurrat in C; habebitur HCD optice = 90°. Q. E. A.

58 Problema IV. Ad datum punctum B lineæ perſpectivæ BE ducere perpendicularem, quando diviſiones lineæ horizontalis non ſufficiunt.

Reſolutio. Recta perſpectiva producatur tum verſus lineam horizontalem, cui occurrat in diviſione 20° verſus K, cum etiam verſus marginem infimum, quem ſecet in diſtantia 2 modulorum a linea verticali VT. Patet, lineam objectivam eſſe inclinatam ad planum verticale ſub angulo 20° verſus B, ideoque ut ad B ducatur perpendicularis, debent in diviſionibus horizontalis lineæ ab V verſus R adhuc ſumi 70°, quos ponimus non poſſe exhiberi. Ducatur VB, quæ producta ſecet ſcalam frontis in *d*, ex quo puncto verſus *l* transferatur radius principalis (qui ſemper eſt tangens anguli 45°) *dc*, & ducatur item V*c*. Fiat per B parallela ad KR, quæ ſecet marginem R*l* in *n*. Fiat (ubicunque ſpatium admittit, ſive extra, ſive intra tabulam) RS = radio principali, & ducatur per *n* recta S*np*, ſecans ſcalam frontis in *p*; erit *nl* projectio, & *lp* diſtantia in modulis frontis puncti B a plano tabulæ. In linea horizontali accipiatur tangens viginti graduum (complementi ſeptuaginta graduum) & transferatur in *pq*. Tum agatur ex S recta S*q*, ſecans R*l* in *o*: erit *on* longitudo perſpectiva tangentis 20° in diſtantia *lp* a tabula. Ducatur itaque ex *o* parallela

ſecat in G, eritque FG tangens perſpectiva anguli 20° ad radium BF principalem pariter perſpective exhibitum. Quare ſi conjungatur B cum G, erit GB ad EB perſpective perpendicularis. Q. E. F.

Qui totam hanc conſtructionem attente perpenderit, facile e ſuperioribus perſpiciet, projectionem eſſe rite factam. Eſt enim 20° BV, & GBF uterque angulus viginti graduum, VBF autem rectus, ideoque etiam EBG.

59. Problema V. Rectam perſpectivam datam in ratione data dividere.

Reſolutio I. Quando lineæ perſpectivæ ſunt in plano tabulæ parallelo, nulla difficultas eſt, cum tunc in ratione data geometrice dividi poſſint (3. Coroll. II)

II. Si linea data AB (Fig. 23 Tab. IV) ſit in plano horizontali, & ad planum tabulæ perpendicularis. Fig. 23. Tab. IV.

Ducantur per A & B ad lineam horizontalem parallelæ *Am*, B*u* occurrentes Margini RK in *m* & *u*. Si habeatur in RK ſcala longitudinum perſpectivarum, quæ jam habeat diviſiones, quæ ſatisfaciant problemati, tantummodo opus eſt, ut inde ducantur parallelæ ad lineam horizontalem, quæ divident AB in ratione data. At vero ſi margo non ſit ita diviſus, transferatur in horizontalem productam radius principalis RS, & ducantur per *m* & *u* rectæ ex S, S*mp*, S*uq*. Recta *pq* in margine infimo dividatur in ratione data, v. gr. in tres partes æquales *pr*, *rs*, *sq*, & ductis ex diviſionum punctis ad S rectis, ſecabitur *mu* in *n* & *o*; ex *n* & *o* ſi fiant parallelæ ad VR, dividetur AB in L & C ita, ut ſint partes AL, LC, CB perſpective æquales. Ratio per ſe clara eſt. Sunt enim *uo*, *on*, *nm* projectiones perſpectivæ partium æqualium *pr*, *rs*, *sq*.

III. Si linea perſpectiva data ſit in plano geometrico, & ad planum verticale, & tabulæ obliqua.

Exempli cauſa detur DE in tres partes æquales ſecanda. Ex V (puncto viſus) ducantur per D & E rectæ, occurrentes in L & O margini infimo tabulæ. Dividatur LO in tres partes æquales, & e punctis diviſionum M, N ducantur ad V rectæ, quæ itidem in *g* & *h* divident DE in tres partes perſpective æquales. Ut ratio pervideatur, fiat ad LO parallela ex puncto E, nempe EF, quæ erit parallela plano tabulæ, & partes FG, GH, HE geometrice æquales habebit. Evidens eſt, eſſe DFE projectionem trianguli rectanguli ad F, cujus hypotenuſa DE: & quia G*g*, H*h* optice ſunt parallelæ, etiam hypotenuſa in eadem ratione diviſa eſt, in qua ſecatur cathetus FE. Patet autem, in conſtructione opus non eſſe, ut exprimatur linea EF, cum ſatis ſit, rectam LQ in data ratione dividere, igitur &c.

IV. Si linea perſpectiva ſit obliqua ad planum horizontale, & ad planum tabulæ.

Quando linea hujus conditionis datur, non satis est, quod habeatur ipsa ejus longitudo, velut (Fig. 24 Tab. IV) BC; eadem enim BC posset exhibere rectam, quæ tota sit in plano geometrico. Unde vel simul debet dari projectio A puncti geometrici, in quod cadit perpendiculum CA ex C demissum, ut habeatur BA; vel vero ipsius perpendiculi CA projectio. Si habeatur AB, ductis ex V per A & B rectis, quæ in G & K secent scalam frontis, dividatur GK in ratione data in H, & I, quæ puncta si conjungantur cum V, dividetur in D & E in eadem ratione recta AB, per casum præcedentem. Ex D, E ducantur parallelæ ad lineam verticalem VT, occurrentes in *o* & *p* rectæ CB, erit CB in ratione data divisa. Est quippe CBA projectio trianguli rectanguli ad A, cujus hypotenusa CB per parallelas AC, D*o*, E*p* dividitur in ratione partium rectæ AB, nempe AD, DE, EB.

Fig. 24. Tab. IV.

Si habeatur projectio perpendiculi CA, producatur BA, donec occurrat lineæ horizontali in S. Dividatur CA in ratione data geometrice (cum sit tabulæ parallela) in *n*, *m*, & ex S per *m*, *n* ductæ rectæ divident CB in *o* & *p* in eadem ratione, utpote cum *mp*, *no* sint perspective parallelæ ad AB.

Quod si divisiones C*n*, *nm* &c evaderent nimis minutæ, producatur AB simul in R, ut secet illic marginem infimum tabulæ; ex R excitatum perpendiculum RQ abscindatur per rectam SCQ, & dividatur in ratione data in O, P &c, quæ divisionum puncta si conjungantur cum S, dividetur etiam CB in eadem ratione in *o*, *p* &c. Manifestum enim est, QS, OS, PS &c esse optice parallelas &c.

60. Problema VI. Projectionem perspectivam circuli facere.

Resolutio. Circuli projectio plerumque fit ope polygoni circulo inscripti, v. gr. ogdogoni (Fig. 25 Tab. IV). Sit enim circulus EBDA divisus in octo partes æquales, eique simul circumscriptum quadratum FGHI. Si ducantur DMR, NEQ, erunt hæ parallelæ, & anguli RDG, QEF erunt 22°½, utpote dimidii angulorum GCD, ECI, qui sunt semirecti. Eodem modo si ducantur PDL, SKE, fient PDG = LDH, & FES uterque 22°½ ex eadem ratione. His notatis patet *primo*, latera IF, GH parallela Diametro AB (erit autem semper in circulo una diametrorum parallela plano verticali) debere concurrere in puncto visus. *Secundo* cum ES, DP sint itidem parallelæ inter se, eas habere punctum concursus versus dexteram in linea horizontali divisionem 22°½. *Tertio* rectas DMR, NEQ pariter inter se parallelas habere versus sinistram in linea horizontali punctum, ad quod convergant, in eadem 22°½ divisione. Eo igitur res tota redit, ut ab initio fiat projectio perspectiva diametrorum BA, ED; dein exhibeantur diagonales FH, GI; ac denique ex divisionibus 22°½ utrinque a puncto visus rectis per E & D ductis determinentur in priore diagonali puncta K, & L; in posteriore vero puncta N, & M. Hinc habetur sequens

Fig. 25. Tab. IV.

61. So-

61. Solutio, quando circulus objectivus est in plano geometrico. Sit ejus centrum a plano verticali 4 modulis remotum, a plano tabulæ tribus, diameter quatuor modulorum. Per divisiones 2, 4 & 6 scalæ frontis (Fig. 26 Tab. IV) ducantur ad punctum visus V rectæ; Fig. 26. Tab. IV. uti etiam ex divisionibus scalæ longitudinum 1, 3, & 5 parallelæ, quæ tres priores intersecent in *h*, *a*, *i*; *d*, *c*, *e*; *g*, *b*, *f*; evidens est, esse *fghi* projectionem quadrati circulo circumscripti; *ab*, *de* diametrorum sibi ad angulos rectos insistentium, quarum altera *ab* est plano verticali; altera *de* plano tabulæ parallela. Denique si conjungantur anguli oppositi trapezii, erunt *fh*, *gi* projectiones diagonalium quadrati. Ducatur ex divisione 22$^{\smile}\frac{1}{2}$ lineæ horizontalis ad *e* recta, quæ occurrit diagonali *fh* in *k*; altera ex eadem divisione (versus dexteram sumpta) per *d* ducta secabit eandem diagonalem in *l*, habebunturque projectiones punctorum K & L objectivorum. Porro ex divisione 22$^{\smile}\frac{1}{2}$ sumpta ex altera puncti V parte, si ducantur rectæ per *e*, & *d*, occurret prior diagonali *gi* in *n*, posterior in *m*, quæ sunt puncta perspectiva circuli objectivi punctorum N & M. Puncta ita determinata connectantur curva *bkenaldm* continua; erit hæc projectio dati circuli perspectiva.

62. Quando circuli projectio facienda est in plano verticali ad planum verticale tabulæ parallelo. Distet planum, in quo facienda est projectio, a plano verticali tabulæ, tot modulis, quot continentur in recta TP, sitque PR parallela lineæ verticali. Transferantur in PR moduli frontis PI; I, II; II, III; III, IV &c, in lineam verticalem TV productam utrinque divisiones lineæ horizontalis (in nostro casu opus non est nisi tangente 22$\frac{1}{2}^{\smile}$ supra, & infra V). Si a fronte, seu a tabula, debeat centrum circuli distare 3 modulis, & diameter continere 4 modulos, agantur ex divisionibus 1, 3, 5 scalæ longitudinum parallelæ ad lineam horizontalem, quæ in α, β, γ occurrant rectæ PV, in qua planum verticale secat planum geometricum, & ex α, β, γ fiant parallelæ ad PR, nempe αF, βE, γG. Ex divisionibus I, III, & V lineæ PR ducantur rectæ ad V, quæ in I, D, H; A, C, B; F, E, & G secabunt perpendiculares αF, βE, γG. Patet, esse FGHI projectionem quadrati circulo circumscripti; AB diametri plano verticali, & horizontali parallelæ; ED diametri verticalis. Ducantur quoque FH, GI, quæ erunt projectiones diagonalium quadrati. Ex divisione 22$^{\smile}\frac{1}{2}$ supra V lineæ verticalis ductæ per D & E secabunt diagonalem FH in K, & L; quæ vero ex divisione 22$^{\smile}\frac{1}{2}$ infra V ad eadem puncta E & D ducuntur, determinant puncta M & N in diagonali GI. Quare habentur octo punctorum A, K, E, M, B, L, D, N projectiones, quæ conjuncta curva continua exhibent circuli peripheriam perspectivam.

 63. Pro

63. Pro minoribus tabulis octo puncta plerumque satis sunt. Si circulus dividatur in 10 partes æquales, paullo erit projectio accuratior. Sed pro tabulis majoribus potest ellipsis (quæ sit projectio circuli, ut constat ex sectionibus conicis, excepto casu sectionis alternæ) geometrice describi. Sit enim FGHI (fig. 27 Tab. IV) projectio quadrati circulo circumscripti; BA, ED diametrorum sibi ad angulum rectum insistentium. Ellipsis, quæ in B, D, A, E hoc trapezium tangit, erit projectio circuli. Secetur BA in C bifariam, erit BC semidiameter; ex D fiat D*e* ad BA parallela, & ducta C*m* ad ED parallela, fiat C*e* : C*n* = C*n* : C*m*; evidens est fore C*n* = A*o* semidiametrum conjugatam ad CA, utpote cum sit DH tangens in D. Habitis autem duabus semidiametris conjugatis reperiuntur axes, foci, & ellipsis describi potest, ut docuimus Part. III Geom.

Fig. 27. Tab. IV.

64. Problema VII. Figuram in plano parallelo ad geometricum perspective delineare.

Resolutio. Debeat planum, in quo facienda est delineatio, distare a geometrico linea *b*B = *c*A (Fig. 28 Tab. IV). Conjunctis punctis *c*, *b* transferantur in *cb* moduli frontis, & consideretur parallelogramum *c*D C*b* velut si esset totius tabulæ planum. Divisiones lineæ horizontalis retinentur eædem, quæ prius erant; unica longitudinum scala mutanda erit. Itaque ducatur sub quovis angulo recta C*a*=DA, & in eam transferantur ex *a* incipiendo divisiones A1, A2, A3 &c, ut sit A1 = *a*1, *a*2 = A2 &c. Conjungatur *a* cum *b*, & ex 1, 2, 3 &c lineæ C*a* ducantur ad *ab* parallelæ 1, 1; 2, 2; 3, 3 &c: erit scala longitudinum nova *b*C rite divisa. Cum enim C*a*, C1, C2 &c sint in ratione radii principalis plus distantia puncti objectivi a plano tabulæ ad radium principalem, & rectæ C*b*, C1, C2 &c sint in eadem ratione cum C*a*, C1, C2 &c, evidens est, esse novas divisiones in eadem ratione, nisi quod distantia novi plani geometrici alia sit. Unde habitis omnibus scalis debite divisis delineatio peragenda erit in tabula *c*DC*b*, uti alias.

Fig. 28. Tab. IV.

65. Ut angulorum datorum descriptio perspectiva in quovis plano ad verticale inclinato fieri possit (cum adhuc tantummodo construxerimus angulos in planis ad horizontem, vel ad verticale parallelis), quod etiam ad methodum, quam exponere cœpimus, pertinet, tradenda jam est ratio, qua Almucantarathorum (seu circulorum sphæræ cœlestis minorum, qui ad horizontem paralleli sunt) projectio fieri possit. Servient hi circuli etiam ad invenienda puncta accidentalia parallelarum, quæ sint ad horizontem, & ad planum verticale inclinatæ, quæ puncta in delineationibus, præcipue Architectonicis, non contemnendum laboris compendium præbent.

ARTI-

ARTICULUS IV.

De projectione perspectiva Almucantarathorum, & punctis accidentalibus parallelarum ad horizontem obliquarum.

66. Exhibeat ELGN (Fig. 29 Tab. IV) almucantarathum supra horizontem, ponaturque oculus constitutus in A. Evidens est, si quotcunque radii ex A ad hoc almucantarathum ducantur, ii efformaturi sint conum, cujus vertex est A. Sit jam tabula verticalis BRKT, & TVK linea horizontalis, AV radius principalis, erit intersectio tabulæ BK ad axem coni AC parallela hyperbola MSm, cujus semiaxis transversus est VS, seu (ducta ad AV ex S parallela SD) = AD, semiaxis conjugatus vero AV = SD, seu radius principalis. Dicatur enim VP = AC = x, VS = AD = a, VA = PC = b, ordinata circuli PM = y. Quia triangula ADS, SPE similia, est AD (a): DS (b) = SP ($x - a$) : PE $= \frac{bx}{a} - b$; & EC $= \frac{bx}{a}$ = CG, & PG $= \frac{bx}{a} + b$, ac denique PM^2 = EP × PG, vel $y^2 = \left(\frac{bx}{a} - b\right) \times \left(\frac{bx}{a} + b\right) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, quæ est æquatio ad hyperbolam, cujus semiaxis transversus est a, semiaxis conjugatus vero b. Fig. 29. Tab. IV.

67. Quia basis coni, seu almucantarathum, est horizonti parallela, quotcunque radii ex A ad ejus peripheriam ducuntur, omnes faciunt cum horizonte eundem angulum, velut SAV, QAO, quæ triangula omnia sunt similia, ob angulos ad A æquales inclinationi laterum coni ad planum horizontis, & rectos ad V, O &c. Est autem AV per hypothesin radius principalis, & si sumatur pro sinu toto, erit (dicto angulo inclinationis ad horizontem = I) 1 : *tang.* I = VA : VS = *tang.* I × VA. Debebit igitur VS esse tangens anguli inclinationis juxta divisiones lineæ horizontalis.

68. Esto jam in plano horizontali angulus OAV (quem angulum obliquitatis dicemus = O, quod indicet obliquam positionem respectu plani verticalis CSVA). Ex O erigatur in tabula perpendicularis OQ, donec in Q occurrat hyperbolæ, seu projectioni almucantarathi, MSm. Quia (67) triangula SAV, QAO similia, est AV : VS = AO : QO; hoc est: b : *tang.* I × b = *sec.* O × b : QO = *sec.* O × *tang.* I. Atqui *sec.* O $= \frac{1}{\textit{cos.}\, O}$, igitur QO $= \frac{\textit{tang.}\, I \times b}{\textit{cos.}\, O}$, in qua

expres-

expreſſione ſinus totus intelligitur eſſe b, ſeu radius principalis, poteritque hæc formula ope tabulæ ſinuum, & accuratæ ſcalæ geometricæ facile conſtrui, maxime ſi uſus pro majoribus tabulis poſcat.

Fig. 30. Tab. IV. 69. Ex æquatione ad hyperbolam expedita etiam eruitur conſtructio. Sit (Fig. 30 Tab. IV) VR = QP = y, QR = VP = x, ſemiaxis transverſus VT = a, conjugatus = b, erit $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, & $\left(\frac{b^2 + y^2}{b^2}\right) a^2 = x^2$, ſeu $\frac{a\sqrt{b^2 + y^2}}{b} = x$, quæ æquatio hanc ſuppeditat analogiam $b : a = \sqrt{b^2 + y^2} : x$. Itaque

Fig. 31. Tab. IV. (Fig. 31 Tab. IV) ſi fuerit VA radius principalis = b ad lineam horizontalem LV in puncto viſus V perpendicularis, & accipiatur At æqualis tangenti anguli inclinationis ad horizontem (aut potius diſtantiæ almucantarathi ab horizonte, v. g. tangenti V 30°) eademque transferatur in verticalem VT, erit ea = a, poteritque hyperbola TM pro ſingulis angulis obliquitatis deſcribi. Fiat tf ad LV parallela, ſitque V 5° = y, erit A 5 = $\sqrt{y^2 + b^2}$, & AV : A5 = At : Aa. Excitata ex 5 perpendiculari 5, 5, transferatur in eam Aa, erit ea x quæſita, & punctum 5 in hyperbola TM illud, ad quod concurrunt omnes parallelæ ad angulum 30° ad horizontem inclinatæ, ad planum verticale vero ſub angulo 5° obliquæ.

Eodem modo ductis A, 10; A, 15; A, 20 &c, & Ab, Ac, Ad &c, & in parallelas ad verticalem 10, 10; 15, 15; 20, 20 &c translatis, habebuntur puncta accidentalia pro angulis obliquitatis 10°, 15°, 20° &c, ſed manente eadem inclinatione verſus horizontem triginta graduum.

Si pro iisdem angulis obliquitatis mutetur angulus inclinationis, fiatque exempli cauſa 40°; ſumatur As = VS = V 40°, ductaque $s\alpha\varphi$ ad LV parallela, transferantur Aα, Aβ, Aγ &c in 5, 5; 10, 10; 15, 15 &c, & deſcribatur hyperbola SN, in qua erunt puncta accidentalia omnium parallelarum ad horizontem ſub angulo 40° inclinatarum.

Quando parallelæ ſunt ita ſitæ, ut angulus inclinationis ad horizontem ſit remotior a tabula, parallelæ ad verticalem 5, 5; 10, 10; 15, 15 &c producendæ ſunt infra lineam horizontalem, & hyperbola exhibebit almucantarathum totidem gradibus infra horizontem, quot TM, SN eſt ſupra eundem. Ceterum vel me tacente intelligit tiro, rectas a nobis modo deſcriptas nil aliud eſſe, quam projectiones perſpectivas circulorum verticalium per oculum tranſeuntium. Unde non incongrue linea verticalis, in quam cadit radius principalis, analogia quadam vocari poteſt *meridianus oculi*, maxime cum in projectione perſpectiva umbrarum fere eundem uſum habeat, ac meridianus cœleſtis. Inde porro angulus obliquitatis, cujus menſuram exhibent

bent divisiones lineæ horizontalis, dicetur aptissime *azimuthum*. Sed ostendamus usum uno, alterove exemplo.

70. Sit exhibendum parallelepipedum rectangulum, quod simul sit obliquum ad planum verticale, & simul inclinatum ad horizontem. Exhibeat planum laterale ABCD (Fig. 32 Tab. V) cujus latus AB inclinatum sit ad horizontem sub angulo BAE = 40°; erit alterius inclinatio DAF = 50°; ut longitudo laterum AB, AD determinetur, demittantur ex D & B perpendicula, & quærantur AF, AE. Linea FAE sit ad planum verticale obliqua, & quidem sub angulo 40°. Latus ad DAB perpendiculare, cui in plano geometrico parallelepipedum incumbit, erit hoc ipso ad idem planum verticale inclinatum versus alteram partem sub angulo 50°. Fig. 32 Tab. V.

Per problemata præcedentia fiat imprimis projectio punctorum F, A, E (Fig. 33 Tab. V) quæ respondent punctis F, A, E figuræ præcedentis. Ducatur per divisionem 40° lineæ horizontalis parallela ad verticalem, & in ea per N. 69 determinetur supra horizontalem punctum T, quod exhibeat 40° supra horizontem, & punctum P infra eandem, quod respondeat 50° depressionis infra horizontem. Fig. 33. Tab. V.

Pariter ope N. 52 fiat projectio lateris AI, quo parallelepipedum incumbit plano terræ. Excitetur in F, & in E perpendicularis indefinita. Agatur ex P per A recta, donec in D occurrat perpendiculari FD; item ducatur PI, quam productam in H abscindet DQ, quæ ad divisionem lineæ horizontalis 50° tendit. Ex A, D, H, I ducantur rectæ ad T. Recta AT occurret perpendiculari EB in B. Rursus agatur ex P per B recta, quæ secabit DT in C. Conjungatur C cum Q; secabitur HT in G; si ex P ad G, & ex Q ad B ducantur itidem rectæ, determinabuntur octo anguli parallelepipedi A, D, H, I, B, C, G, K, habebuntque quatuor latera HG, DC, AB, IK punctum accidentale T; quatuor item P, nempe CB, GK, HI, DA; & residua quatuor AI, DH, KB, CG punctum Q.

71. Petatur projectio perspectiva circuli in plano ad horizontem sub angulo dato inclinato, ut ejus intersectio cum plano geometrico sit parallela plano verticali.

Resolutio. Sit ROMN tabula, SV linea verticalis (Fig. 34 Tab. V), MN horizontalis in tangentes divisa, in NR, MO scala longitudinum, RO scala frontis. Ponatur planum, in quo facienda est projectio, secari per tabulam in CD. Conjungatur D cum puncto visus V, erit DV projectio intersectionis plani sub angulo CDO ad horizontem inclinati cum plano geometrico. Sit diameter circuli 4 modulorum, & distet centrum a plano tabulæ 3 modulis, in plano autem obliquo ab intersectione cum plano geometrico duobus modulis. Transferantur in rectam DC moduli frontis, & conjungantur 2, & 4 cum puncto visus V. Conjungantur item divisiones scalæ longitudinum 1, 1; 3, 3; & 5, 5; secabitur DV in *a*, *b*, *c*. Ducantur ad DC ex Fig. 34. Tab. V.

a, *b*, *c*

a, *b*, *c* parallelæ *αa*, *βb*, *κc*, erit EF*ca* projectio quadrati circulo circumſcripti, K centri, AB diametri ad tabulam perpendicularis, L*b* vero diametri plano tabulæ parallelæ, & ſimul ad horizontem ſub angulo CDO inclinatæ. Ductis diagonalibus E*c*, F*a* fiat per V parallela ad CD, in quam utrinque transferatur VQ, VP æqualis tangenti in linea horizontali 22°½. Ex Q per L & *b* ductæ rectæ determinabunt puncta I & T in diagonali E*c*; quæ vero ex P ad eadem puncta *b* & L ducuntur, abſcindent puncta H & G in diagonali F*a*; reliqua per ſe patent.

Nil aliud iſthic notandum occurrit, niſi QVP eſſe projectionem circuli maximi ſphæræ cœleſtis ad horizontem ſub angulo QVC inclinati, cujus planum per oculum tranſit; & cum radius principalis ſit æque ad QP, ac ad MN in V perpendicularis, habere debet æquales diviſiones in gradus, cum iis, quæ habentur in linea horizontali. Manifeſtum autem eſt, eſſe omnes rectas ex diviſionibus 1, 2, 3, 4 &c lineæ CD ad V ductas, perſpective perpendiculares ad planum tabulæ; *aα* vero, *bβ*, *cκ* ad tabulam parallelas; & quoniam puncta diſtantiarum *a*, *b*, *c* per ſcalam longitudinum rite determinata ſunt, utpote cum ipſa DV ſit parallela plano verticali, & ad tabulæ planum perpendicularis, etiam diſtantiæ 2A, 2K, 2B &c in plano obliquo debite exhibentur.

Fig. 35. Tab. V. 72. Si (Fig. 35 Tab. V) MPOA repræſentet ſphæram, ſitque oculus O in ejus ſuperficie ita conſtitutus, ut radius OC ſit ad circulum maximum PBAD perpendicularis, omnium punctorum in hemiſphærio PMABD projectio perſpectiva in plano circuli PDAB fieri poteſt. Atque hunc in modum chartæ geographicæ, quæ in duobus circulis utrumque hemiſphærium exhibeant, & univerſales dici ſolent, conſtrui conſueverunt. Habet autem hic ſitus oculi id commodi, quod omnium circulorum, aut potius ſemicirculorum in hemiſphærio viſibilium projectiones perſpectivæ ſint itidem circulares. Porro ſitus ſphæræ talis ſumitur, ut PA ſit axis Telluris, ONMA meridianus, in quo ponitur oculus (& cum O diſtet a P & A quadrante, debet oculus ſimul eſſe in æquatore), PBAD alter meridianus, qui hemiſphærium perſpective delineandum terminat, & ad priorem eſt perpendicularis. De hac projectione (cum ad Perſpectivam pertineat) non nullas animadverſiones ſequente articulo ſubjungere viſum eſt.

ARTI-

ARTICULUS V.

Nonnullæ animadversiones in projectionem geographicam hemisphærii; uti etiam de determinanda magnitudine tabulæ, & distantia, quando plura sunt, & majora objecta.

73. Theorema. Projectiones geographicæ tam meridianorum, quam parallelorum, si oculus sit ita constitutus, ut præcedente numero diximus, sunt portiones circulorum.

I°. Sit parallelus MENQ; constituent omnes radii ad ejus peripheriam ex oculo O ducti (Fig. 35 Tab. V) conum, cujus latus longissimum OM a basi MENQ secatur sub angulo NMO, & diametraliter oppositum NO sub angulo MNO. Ducatur NR ad axem PA parallela, & concipiatur planum circuli (cujus diameter est NR) NTRV ad planum meridiani PDAB, sive tabulæ, parallelum: secabitur ab hoc latus coni NO sub angulo RNO = OMN, utpote cum hic insistat arcui NO, prior arcui OR = NO. Dein latus diametraliter oppositum OM secatur a plano NTRV sub angulo NSO. Habet autem hic mensuram $\frac{1}{2}$ (MAR + NO) = $\frac{1}{2}$ (MAR + OR); & angulus MNO insistit eidem arcui MARO; proinde MNO = NSO. Quare evidens est, sectiones ejusdem coni per MENQ, & per NTRV esse alternas, adeoque similes; sed cum planum tabulæ PDAB sit parallelum ad NTRV, etiam similem efficiet sectionem; igitur cum MENQ sit circulus, etiam projectio perspectiva in tabula sit circularis, oportet. Fig. 35. Tab. V.

II°. Exhibeat AOQK (Fig. 36 Tab. V) æquatorem, PHRI meridianum, qui ad illum, in quo oculus est, sit inclinatus sub angulo HCO = KCI. Si cogitentur ad O ex tota peripheria ducti radii, rursus habebitur conus, cujus latus OI secatur sub angulo HIO, & diametraliter oppositum OH sub angulo OHI. Fiat HL ad AQ (diametrum tabulæ) parallela; erit HO = OL. Et propterea HIO = OHL. Jam vero planum circuli, cujus diameter HL, ad planum tabulæ APQR parallelum, coni latus OH secat sub angulo LHO; ergo etiam planum tabulæ productum secaret sub eodem angulo idem latus OH productum, nempe OTQ. Præterea angulus ASO habet mensuram $\frac{1}{2}$OA + $\frac{1}{2}$IQ seu (ob AH = QL = IQ), $\frac{1}{2}$IQ + $\frac{1}{2}$ QL + $\frac{1}{2}$ LO; ergo ASO, sub quo secatur a tabula latus OI, æquatur angulo IHO, proinde sectiones sunt iterum alternæ, & similes, hoc est, circulares. Fig. 36. Tab. V.

III°. Quamvis ecliptica non sit circulus maximus Telluris, solet tamen ut in sphæris artificialibus, ita etiam in projectione hemisphæriorum plerumque exhiberi. Esto (Fig. 37 Tab. V) oculus in O, ecliptica EVe. Latus coni maximum EO secatur a plano baseos Fig. 37. Tab. V.

ſub angulo OEe, quem metitur dimidius arcus Oe. Fiat em ad axem PQ parallela: patet, plano circuli habentis diametrum me ſecari latus coni Oe ſub eodem angulo meO, ob $Om = Oe$, conſequenter etiam a plano tabulæ PVQ circulo illi parallelo. Dein angulus EeO, ſub quo alterum latus ſecatur, habet menſuram $\frac{1}{2}$ EPO, & angulus QRO, ſub quo ſecatur a plano tabulæ, habet menſuram $\frac{1}{2}\, Qe + \frac{1}{2}\, eO + \frac{1}{2}\, EP$. Eſt vero ob $Om = eO = AE$, arcus $EP = Pm$, conſequenter ſubſtituere licet $\frac{1}{2}\, EP + \frac{1}{2}\, Pm + \frac{1}{2}\, mO$, hoc eſt, habet eandem menſuram; quare iterum ſectiones ſunt alternæ, & ſimiles.

74. Eſt in hoc caſu talis oculi poſitio, ut dici poſſit conſtitutus in interſectione æquatoris cum alterutro coluro ſolſtitiorum; & tum medietas eclipticæ erit in altero hemiſphærio ſupra, in altero infra æquatoris projectionem. Si oculus poneretur in coluri æquinoctiorum interſectione cum æquatore, projectio eclipticæ foret recta, uti etiam recta eſt projectio æquatoris, & meridiani, in quo oculus eſſe ponitur, quem tamen caſum a circulari projectione non excepimus, cum potius ſit pars circuli infinite magni.

75. Diviſio meridiani, in quo conſtituitur oculus, & æquatoris in gradus ſuos, etſi inſtar rectæ appareant, difficultate omni caret.
Fig. 38. Tab. V. Exhibeat (Fig. 38 Tab. V) ejusmodi ſemicirculum PoQ, cujus projectio perſpectiva ſit PCQ. Ex C excitato perpendiculo $CO = CP =$ radio ſphæræ, dividatur alteruter quadrans oQ v. g. in gradus ſuos, v. g. in denos, & ad ſingula diviſionum puncta ducantur ex O rectæ, quæ radium CQ interſecabunt. Interſectionum puncta transferantur ex C verſus P in Ca, Cb, Cd &c, habebitur projectio ſemicirculi diviſa in denos &c. gradus, ut clarum eſt.

76. Plus difficultatis eſt in deſcriptione meridianorum, qui non tranſeunt per oculum, utpote cum ſint eorum projectiones perſpectivæ arcus circulares ingentium radiorum. Facilitatur tamen projectio, ſi complura ſingulorum puncta optice prius determinentur.
Fig. 39. Tab. V. Sit talis $PLKQ$ (Fig. 39 Tab. V); concipiatur circulus parallelus $NILM$, cujus puncti L projectio perſpectiva ſi habeatur, habebitur etiam punctum aliquod perſpectivum meridiani PLQ. Porro projectio puncti L fiet juxta Problema fundamentale. Diſtantia puncti L a plano tabulæ eſt Lm, coſinus arcus LI; diſtantia vero L a plano horizontali eſt ma, ſinus latitudinis paralleli, ac denique Vm diſtantia ejusdem L a plano verticali. Porro Lm, & Vm facile reducitur ad partes radii AC vel CO, ſi fiat *ut ſinus totus ad coſinum latitudinis paralleli, ita eſt* Lm, & Vm *in partibus radii paralleli ad terminum quartum*. Hinc fiet $OC + Lm : OC = ma$: *diſtantiam puncti perſpectivi a linea horizontali*: Item $OC + Lm : OC = Vm$: *diſtantiam puncti perſpectivi a linea verticali* PC. Sed hæc indicaſſe ſatis eſt.

77. Quando objecta majora, aut plura numero, exhibenda unt, ut omnia, aut saltem præcipua, debitis dimensionibus in tabula exprimi possint, hæc non modo certam latitudinem, & altitudinem habere debet, sed etiam in competente ab objectis distantia collocanda est. Debeat exempli causa objectum altitudinis AB (Fig. 40 Tab. V) otum exhiberi in tabula DE (idem est de latitudine). Sumpto radio principali OV, qui ad partem præ ceteris notabilem plerumque tendere ponitur, sit definienda tabulæ DE altitudo, vel latitudo. Sit $OV = r$, $CV = b$, $AB = l$, erit $OV + CV : OV = AB : DE$, ive $r + b : r = l : \frac{rl}{r+b} + b = DE$. Si tabulæ dimensiones datæ sunt, & quæratur distantia objecti AB ab eadem, ut totum exhiberi possit, sit $CV = x$, tabulæ altitudo, vel latitudo $= t$, ex priore analogia fiet $\frac{rl}{r+x} = t$, & $\frac{rl - rt}{t} = x$. Si detur & tabula, & distantia $CV = b$, quæri etiam potest radius principalis VO, qui ponatur $= y$; habebitur $\frac{ly}{y+b} = t$, & $(l - t)\,y = bt$, ac denique $\frac{bt}{l-t} = y$. Fig. 40. Tab. V.

Si objectum sit ad planum tabulæ obliquum; velut AB (Fig. 41 Tab. V), cogitetur OC producta, AG ad eandem, & GB ad DE parallela. Sit $OV = r$, $VL = x$, angulus $BAG = \varphi$, $AB = l$, $AC = c$. Erit $AB : GB = AC : GH$ (vel AL) $= 1 : \mathit{fin.}\,\varphi$, seu $c : AL = 1 : \mathit{fin.}\,\varphi$, & $AL = c \times \mathit{fin.}\,\varphi$. Dein $OV + VL : AL = OV : VD$, vel $r + x : c\,\mathit{fin.}\,\varphi = r : VD = \frac{rc \times \mathit{fin.}\,\varphi}{r+x}$. Item habetur $1 : \mathit{cof.}\,\varphi = AB : AG, = l : AG = l \times \mathit{cof.}\,\varphi$. Proinde erit $OH = LO - AG = r + x - l \times \mathit{cof.}\,\varphi$; & quia $AC\ (c) : CB\ (l - c) = GH\ (c \times \mathit{fin.}\,\varphi) : HB$, habebitur $HB = \frac{(l-c)\,c\,\mathit{fin.}\,\varphi}{c} = (l - c)\,\mathit{fin.}\,\varphi$; & $OH\ (r + x - l\,\mathit{cof.}\,\varphi) : HB\ \big((l-c)\,\mathit{fin.}\,\varphi\big) = OV\ (r) : VE = \frac{r\,(l-c)\,\mathit{fin.}\,\varphi}{r + x - l\,\mathit{cof.}\,\varphi}$, adeoque $VD + VE = DE = t = \frac{rc\,\mathit{fin.}\,\varphi}{r+x} + \frac{r\,(l-c)\,\mathit{fin.}\,\varphi}{r+x-l\,\mathit{cof.}\,\varphi}$. Ex hac æquatione data t obtinetur x, vel data x invenitur t. Fig. 41. Tab. V.

78. Quod attinet ad radii principalis longitudinem, nil certi constitui potest, utpote cum præcipue attendendum sit ad locum, in quo ejusmodi delineationes aspectui exponuntur. Interim vix satis distincte exhibentur objecta, quæ majorem angulum ad oculum requirunt, quam octuaginta aliquot graduum, aut numero rotundo 90°. Illæ vero tabulæ, quæ angulum ad oculum multo minorem sexaginta gradibus

ſubtendunt, exilitate confuſionem vix evitant. Quare exiſtimatur, longitudinem radii principalis talem aſſumendam eſſe, quæ nec minor ſit dimidia diagonali tabulæ, nec longior integra (Inſtit. Optic. P. I. N. 74). Verum nulla regula ſine exceptione.

79. Altitudo oculi ſupra planum geometricum proportionata eſſe debet & ſpectatori, & objectis. Tabulæ ornatui cubiculorum deſtinatæ ita ſuſpendi deberent, ut ſpectatoris mediocris ſtaturæ oculo directe objicerentur, proinde linea horizontalis prope 5 pedes eſſe deberet ſupra planum terræ. At quando ingentia ædificia, horti &c delineantur, ut partes etiam ab oculo remotiores videri poſſint, longe major aſſumitur oculi altitudo; tanta nempe, ut ſpectator non in plano terræ collocatus, ſed ex edito id genus objecta videre ponatur. Ejusmodi delineationes ad *oculum volucris* fieri dicuntur.

Ut, quæ adhuc diximus, a tirone clarius perſpiciantur, ſubjungemus exemplum delineationis ſtylobatæ ex Perſpectiva *Cl. de la Caille* deſumptum, quod plurium utilium obſervationum ſimul occaſionem præbet.

ARTICULUS VI.

Exemplum, & obſervationes generales pro delineationibus perſpectivis omnis generis.

80. Cum objecti multis partibus conſtantis deſignatio optica facienda eſt, in eo maxime elaboret delineaturi induſtria, oportet, ut ſolerter advertat, quænam lineis ſimiliter ductis comprehendantur, quæ inter parallelas easdem, quæ in iisdem verticalibus, in iisdem diagonalibus conſiſtant, ut ſingulæ in projectione locum debitum ſortiantur, ne errorum numerus, quibus praxis a regularum accuratione deficit, etiam ex hoc capite augeatur.

81. Proponatur exempli cauſa ex regulis Perſpectivæ delineatio ſtylobatæ ordinis Tuſci cum plintho baſeos columnæ facienda, ita, ut trunci planum alterum aſpectabile inclinatum ſit ad planum verticale tabulæ ſub angulo 40° ex ſiniſtra parte, alterum ex parte dextera ſub angulo 50°, ſitque diſtantia anguli quadræ, qui oculo eſt propior, a plano tabulæ unius, & a plano verticali duorum modulorum verſus ſiniſtram. Omnium autem membrorum ſtylobatæ dimenſiones eæ ſint, quas Fig. 42 Tab. VI notatas numeris ſuis exhibet, quamvis ipſa deſcriptio illius utcunque rudis eſſe poſſit, quippe cujus nullus alius uſus in præſens eſt, quam ut ſingulorum membrorum nexum, & ordinem monſtret.

Fig. 42. Tab. VI.

Atque

Atque ne difficultatum, quæ in delineatione occurrere poſſunt, numerus, ſi ſimul aſpectui objiciantur, tironem abſterreat, eas plurium figurarum deſcriptione partiemur, quo etiam multiplicium linearum confuſioni occurretur. Unde pro aſſumptæ tabulæ magnitudine, ubi ſcalarum marginalium conſtructio peracta erit, ducatur ex puncto viſus V ad diviſionem 2 marginis infimi recta V2 (Fig. 43 Tab. VI); & per puncta 1, 1 marginum lateralium 1A1, cujus interſectio exhibet punctum perſpectivum A anguli ſtylobatæ oculo proximi. Fig. 43. Tab. VI.

82. E puncto A ducantur indefinitæ A $40^{\smile}$, A $50^{\smile}$, exhibentes ſitum planorum conſpicuorum; ex puncto viſus V vero ad marginis infimi diviſionem 7 recta V7, quæ interſectione ſua cum 1 A 1 determinat AC novem modulorum decreſcentium: tot enim ex ſtylobatæ dimenſionibus quadræ longitudini competunt. Jungatur C cum $20^{\smile}$ (medietate 40 graduum, qui complementum ſunt ad $50^{\smile}$) ex parte dextera ſumptis; habebitur projectio E anguli quadræ dextimi (50). Hinc jam facile poſitio tota quadræ ADFE abſolvetur, ducta ex A ad 5 (quæ ſcilicet directio diagonalis eſt) recta, & altera EF ad $40^{\smile}$; interſectio F erit angulus viciniori A oppoſitus. Denique ducatur per F, & $50^{\smile}$ recta occurrens alteri A $40^{\smile}$ in D, projectione anguli quarti quadræ.

83. Et quoniam quadræ latera æqualia in ichnographia quadratum efficiunt, & reliqua omnia ſtylobatæ membra ſingulorum laterum æquales dimenſiones habent; non ſolum diagonalis quadræ per A & F deſcripta, ſed etiam omnium reliquorum membrorum, quæ in eorum planis concipi poſſunt, verſus $5^{\smile}$ ex parte dextera lineæ horizontalis tendere debent, quippe quæ diviſio 45 gradibus abeſt a $40^{\smile}$ ex ſiniſtra, & $50^{\smile}$ ex dextera ſumptis.

Præterea manifeſtum eſt, quod ſi concipiatur planum perpendiculariter erectum ſuper diagonali A$5^{\smile}$ projectionis ichnographiæ quadræ, omnes reliquorum membrorum diagonales in eodem ſint futuræ.

84. Atque hinc I°, ut membrorum projecturæ, & retractiones commodius deſignentur, ejuſdem diagonalis portionem oculo propiorem in partes optice æquales dividere conſultum eſt. Et ne diverſi generis diviſionibus marginis infimi uſus impeditior fiat, adhibeatur pro novis hiſce linea AC margini parallela; cum porro arbitraria ſit puncti ad hanc diviſionem peragendam in linea horizontali electio, aſſumatur hoc in $40^{\smile}$, ducaturque inde per E (Fig. 44 Tab. VI) recta, donec AG ſecet in G, productam, ſi opus ſit. AG dividatur in 9 partes æquales, quoniam lateri quadræ 9 moduli tributi ſunt. Primæ duæ partes ad A ſubdividantur in minores, uti hic in dimidias. Ad puncta hæc ducantur ex $40^{\smile}$ rectæ occurrentes diagonali in H, Fig. 44. Tab. VI.

K, L, quæ constituendis projecturis, & retractionibus servient, ideoque iisdem numeris notanda sunt, ac partes in AG correspondentes.

Illud vero hic probe notandum, partes AH, HK, KL non esse projectiones perspectivas semimodulorum, sed esse eas ad semimodulos, ut est diagonalis quadrati ad latus suum, seu ut $\sqrt{2}$ ad 1. Dimidii moduli decrescentes sunt partes A*h*, *hk*, *kl*. Divisiones vero lineæ AF deinceps *scalam projecturarum* vocabo.

85. II°. Ut dimensio altitudinum expeditior sit, producta diagonali FA, usque dum occurrat margini inferiori in M, erigatur inde perpendicularis indefinita MT, in quam ex divisionibus marginis inferioris transferantur omnes dimensiones altitudinum, quæ in prima situs & magnitudinum constitutione (Fig. 42 Tab. VI) singulis partibus tributæ sunt, in N, O, P, Q, R, S, T. Rectam MT in sequentibus *scalam altitudinum* appellabo. (Fig. 44 Tab. VI)

Fig. 42. Tab. VI.

86. His ita constitutis erigantur ex quatuor angulis quadræ perpendiculares indefinitæ (Fig. 45 Tab. VII) AB, DI, FG, EC, & jungatur punctum N scalæ altitudinum cum puncto 5$^{\smile}$ lineæ horizontalis: intersectio cum AB abscindit altitudinem perspectivam quadræ in B. Ex hoc eodem puncto B agatur recta ad 40$^{\smile}$, quæ determinabit apicem I altitudinis DI anguli quadræ ex parte sinistra conspicui; item altera ad 50$^{\smile}$, quæ anguli dexteri altitudinem EC præbet. Ducantur ex C ad 40$^{\smile}$, & ex I ad 50$^{\smile}$ rectæ, habebitur earum intersectione in G altitudo anguli quadræ, qui angulo A opponitur. Quod si omnia accurate ex regularum præscripto hactenus facta sunt, intersectio modo dicta G non solum erit in perpendiculari FG, sed etiam in diagonali per N & 5$^{\smile}$ transeunte; id, quod examinis instar esse debet, tum ut errores ita deprehensi corrigantur, tum ut deinceps evitentur.

Fig. 45. Tab. VII.

87. Pro regula ON in (Fig. 42) situs & magnitudinum constitutione prima designata, ducantur primum diagonales (Fig. 46 Tab. VII) BG, IC; & quia hæc regula 0, 6 moduli retrahi debet, accipiatur in scala projecturarum pars AH = 0, 6. Dein erigatur ex H perpendicularis occurrens diagonali GB in D; erit D angulus inferior regulæ, qui si jungatur cum 40$^{\smile}$ & 50$^{\smile}$, intersectiones diagonalis IC exhibent ejusdem regulæ angulos K, & F. Rectæ porro ex K ad 50$^{\smile}$, & ex F ad 40$^{\smile}$ ductæ, se in ipsa diagonali BG secabunt, atque illic in E habebitur quartus angulus regulæ. Unde quadrilaterum DKEF basin regulæ exhibet, qua quadræ incumbit. E quatuor repertis modo punctis erigantur perpendicula indefinita; tum nectatur punctum O scalæ altitudinum, quod regulæ altitudinem designat, cum 5$^{\smile}$ recta O5$^{\smile}$, quæ occurrens perpendiculari DV in V angulum superiorem regulæ, qui oculo proximus, designat; in Y vero (ubi alteram perpendicularem ex E erectam secat) huic oppositum: rectæ denique ad V ex 40$^{\smile}$ & 50$^{\smile}$ ductæ se in Y intersecare debent, id, quod examinan-

Fig. 46. Tab. VII.

dæ

dæ operationi ſerviet. Atque hunc in modum projectio optica regulæ perfecta eſt.

88. Ut jam truncus ſtylobatæ ſuper his erigatur, fiant diagonales LX, VY (Fig. 47 Tab. VIII); & quia ex prima magnitudinum Fig. 47 Tab. VIII conſtitutione 1, 2 moduli retrahi debet, in ſcala projecturarum ſumatur AC = 1, 2. Erigatur in C perpendicularis indefinita, occurrens diagonali VY in K, in quo erit angulus inferior trunci, ſi eum apophyge carere fingamus. Jungantur 40ᵕ & 50ᵕ cum K, ut in diagonali LX acquirantur B & D, anguli laterales; & ductis ex B ad 50ᵕ, & ex D ad 40ᵕ rectis, obtinebitur etiam quartus I in diagonali VY, eritque quadrilaterum KBID projectio perſpectiva plani trunci, quo regulæ inſidet.

89. E quatuor angulis inventis perpendiculares indefinitæ excitentur KE, BG, DF, IH, & ut ſingularum altitudo debite abſcindatur, ducatur ex 5ᵕ ad Q ſcalæ altitudinum (in hoc enim punctum cadere altitudo trunci ponitur) recta 5ᵕ Q, quæ in E angulum anteriorem determinat. Ex E ducantur porro E 40ᵕ, & E 50ᵕ, quæ in G & F abſcindunt angulos laterales; rectæ denique ex G ad 50ᵕ, & ex F ad 40ᵕ ductæ interſectione ſua H in ipſa Q 5ᵕ dant angulum poſticum, oculo non conſpicuum.

90. Ut apophygis trunci deſcribatur, jungat recta punctum P ſcalæ altitudinum, quod aſſumptam altitudinem apophygis æquat, cum 5, quæ in *k*, ubi perpendiculum CK productum ſecat, eandem optice determinat; hinc porro rectæ ad 40ᵕ, & 50ᵕ ductæ, uti ſuperius in projectione regulæ, & quadræ factum, apophygis altitudines in reliquis angulis dabunt. Denique deſcribantur curvæ per *b* & L, per *d* & X, per *k* & V tranſeuntes, quarum prima & poſtrema cavitatem parti ſiniſtræ obvertant, cum oculus ad dexteram ſtylobatæ ſit conſtitutus.

91. Ventum jam eſt ad coronidem ſtylobatæ, cymatio Lesbio, altitudine RQ (Fig. 42), & regula SR conſtantem. Itaque plano ſu- Fig. 48. Tab. VIII. premo trunci (Fig. 48 Tab. VIII) rite delineato, fiant diagonales GF, EH, paullum ultra truncum excurrentes, cum cymatium projecturam habeat. Planum porro inferius, quo cymatium trunco inſidet, ex prima magnitudinum, & ſitus conſtitutione retrahi debet 0, 9 moduli. Unde ex puncto B ſcalæ projecturarum erigatur perpendicularis BC, occurrens diagonali EH productæ in C: erit C angulus anterior hujus plani, ex quo facile reliqui in I & L diagonalis GF, & in K diagonalis EH productæ reperientur.

92. Et quoniam regulæ latera ſunt in iisdem planis cum lateribus quadræ baſeos ſtylobatæ, producantur indefinite perpendicula angulorum V, A, X quadræ, qui ſcilicet videri poſſunt. Ex puncto R ſcalæ altitudinum ducatur R5ᵕ, quæ interſectione in P cum perpendiculo AP, abſcindit angulum inferiorem regulæ: quod ſi altera

quo-

quoque ex S ad 5ᵕ ducatur (eſt autem RS regulæ altitudo) ſupremus quoque ejusdem in D habebitur. Ex D & P rectæ ad 40ᵕ & 50ᵕ ductæ, reliquos N*n*, *o*O præbent, ut alias factum.

93. Quia planum ſupremum cymatii intra regulam o, 3 moduli ex aſſumptis magnitudinibus retrahendum eſt, ducta diagonali NO (Fig. 49 Tab. IX), atque erecta ex o, 3 ſcalæ projecturarum perpendiculari, quæ R 5ᵕ ſecet in *c*, habetur angulus ſupremus cymatii *c*; hinc vero rectæ ad 40ᵕ, & 50ᵕ ductæ, ubi diagonalem NO in *i*, & *l* ſecant, alios quoque determinant. Deſcribantur curvæ *i*I, *c*C, *l*L, eæ cymatii projectionem abſolvent.

Fig. 49. Tab. IX.

Supereſt modo plinthus baſeos columnæ, & cum eadem quantitate, ac truncus ſtylobatæ, retrahatur, producantur rectæ angulares trunci indefinite. Punctum altitudinis plinthi T in ſcala acceptum iungatur cum 5ᵕ recta T5ᵕ, erit interſectio E cum producto angulo trunci, angulus ſupremus plinthi, qui ſi nectatur cum 40ᵕ, & 50ᵕ, etiam G, & F, reliquos conſpicuos, determinabit.

94. Hiſce ſubjungamus obſervationes quasdam in præcedentes operationes.

I°. Si in prima magnitudinum, & ſitus conſtitutione, ſit projectura quædam ultra angulum infimum baſis, cui totum objectum inſiſtit, excurrens, ea in ſcala projecturarum deſignetur diviſione cis punctum A.

95. II°. Si margo ſupremus tabulæ eodem modo, ac infimus, diviſus ſit, ut N. 39 inſinuatum eſt, facilis erit omnium perpendicularium occurrentium erectio, quippe quæ fiet, ſi regula ita ad punctum, ex quo perpendicularis excitanda eſt, applicetur, ut per easdem utriusque marginis diviſiones tranſeat.

96. III°. In Perſpectiva practica diagonalium inſignis eſt uſus, tum ut angulorum in polygonis ſitus ad examen revocetur, tum etiam ut reperiantur polygonorum centra. Sic in allato exemplo operationum bonitas examinari potuit hunc in modum, obſervando ſcilicet, an omnium diagonalium, quæ ductæ ſunt, interſectiones ſint in eadem recta ad lineam verticalem parallela, cum omnes debeant in axe ſtylobatæ, cujus projectio eſt linea perpendicularis, eſſe.

97. IV°. Interſectio diagonalium etiam adhiberi poteſt ad reperiendum in tabula punctum, in quod cadit perpendiculum ex apice alicujus pyramidis, turris campanariæ, alteriusve in cuſpidem coeuntis, aut tentorii militaris &c, demiſſum.

98. V°. In diagonalibus commodiſſime etiam projecturæ, & retractiones diverſarum partium objecti determinantur; attamen hic uſus, quem præcedente exemplo oſtendimus, ad quadrata ſolum, & polygona regularia reſtringendus eſt; projecturæ enim, & retractiones ad ſingula latera æquales quadrata, aut polygona regularia concentrica

centrica conſtituunt, ideoque earum anguli ſunt in diagonalibus per centra planorum, quibus inſiſtunt, tranſeuntibus.

99. Quod ſi itaque hæc plana quadrata non ſint, ſed ut plerumque evenit, parallelogramma rectangula, velut ABCD (Fig. 50 Tab. IX), ubi AB, CD ſunt 3, 5 modulorum, & BC, AD 4, 5 decreſcentium; accipiantur in projectionibus laterum in ſe longiorum partes AE, BF; DG, CH optice æquales lateribus in ſe minoribus, in noſtro exemplo 3, 5 modulorum decreſcentium, ut in plano ABCD deſcribantur duorum quadratorum ABFE, DCHG projectiones, quarum diagonales BE, AF; GC, DH, uti ſuperius ad angulos projecturarum, & partium retractarum reperiendos adhibere poterunt. Commodum quoque fuerit, ſi ex his diagonalibus aliqua dividatur, & *ſcalæ projecturarum* vices agat. Fig. 50. Tab. IX.

100. At ſi planum ſit polygonum irregulare, tum loco rudioris illius partium adumbrationis, quæ veras magnitudines, ac ſitum ſolis notis numericis indicet, accurata, & geometrica conſtructio facienda eſt, projecturis, & retractionibus ex veris dimenſionibus conſtitutis, & id quidem ope ſcalæ exactæ, magnique partium numeri, ac tantæ magnitudinis, ut etiam minores partes rite accipi poſſint. Præterea binæ perpendiculares in hoc plano ducendæ ſunt, quarum altera ſitum tabulæ, altera plani ejuſdem verticalis habeat, ut ope circini ſingulorum punctorum ab his diſtantia accipi, & in ſcalam transferri poſſit, eorumque projectio perſpectiva fieri.

CAPUT II.

Perſpectiva Umbrarum.

ARTICULUS I.

Notiones, & principia.

101. Cum ſæpe exhibenda ſint in delineationibus perſpectivis corpora non modo a ſole, vel luna illuminata, verum etiam quæ radios candelæ, aut lampadis ardentis excipiant, neceſſe eſt, tu non minus projectio umbrarum ex certis Optices legibus, quam ipſo-

rum corporum, fiat. Porro ex iis, quæ de natura luminis in Optica adduximus, ſequentia in Perſpectivæ uſum deducere poſſumus.

I°. *Umbra corporis cadit in partem corpori, vel puncto lucido directe oppoſitam.* Sequitur evidenter ex propagatione lucis rectilinea. Hinc

Si in parte oppoſita ſit corpus alterum, vel planum, quod umbram excipiat, umbra terminatur; ſecus, eſt interminata, niſi corpus lucidum ſit majus corpore opaco. Sumenda autem eſt hoc loco magnitudo apparens lucidi, non vera, ut eſt in ſe. Sic etſi diameter ſolis vel lunæ in immenſum excedat dimenſiones corporum, quæ delineari ſolent, nihilominus tamen umbræ ab iis projectæ in planum terræ, dum hæc ſidera in horizonte ſunt, terminari in plano horizonti parallelo nequeunt, modo eorum dimenſiones angulum dimidii circiter gradus ſubtendant.

Præterea ſequitur ex hoc principio, umbras terminari in plano geometrico, ſi lucidum ſit altius opacis, quia tunc ex lucido per apicem corporis ducta recta neceſſario incurrit in idem planum. Verum ſi major ſit corporis opaci altitudo, quam lucidi, eadem recta a plano geometrico ſemper longius diſcedit; & niſi forte in tabula exhibeatur aliquod planum altius corpore opaco, velut tabulatum quodpiam, umbra erit interminata.

102. II°. *Umbra lineæ rectæ in planum projecta eſt itidem recta.* Cum enim projectio perſpectiva lineæ rectæ ſit itidem recta, & umbra nil aliud, quam ſpatium, ad quod radii rectilinee propagati pertingere nequeunt, evidens eſt, illud debere eſſe rectam.

Quod ſi igitur habeantur duo puncta, quæ in umbra ſint, vel per quæ umbra, ſi producatur, tranſeat, ſitus umbræ determinatus eſt.

103. III°. *Umbra a linea perpendiculari in quodcunque planum projecta, ſi producatur verſus lucidum, tranſit per punctum, in quod cadit verticalis per lucidum ducta.* Sunt enim linea perpendicularis umbram projiciens, & umbra ipſa in eodem plano verticali, & umbra quidem lucido directe oppoſita eſt: quare ſi producatur hoc planum verſus lucidum, neceſſario tranſibit per verticalem, quæ per lucidum tranſit, conſequenter etiam umbra per punctum illud, in quo ea verticalis plano umbram excipienti occurrit. Sic ſi (Fig. 51 Tab. IX) ſit AB verticalis, DC planum quomodocunque obliquum, LP verticalis per lucidum ducta, quæ in *p* occurrit plano DC producto, umbra EA producta per *p* tranſire debet. Nam EAB, E*p*L, ob parallelas AB, L*p*, erunt duo triangula ſimilia, & quidem cum AE ſit in eodem plano cum L*p*, in uno eodemque plano; igitur fieri nequit, ut EA ſit in alio plano, quam *p*, vel extra rectam D*p*. Eodem modo umbra MG a recta verticali MN in planum CH projecta, per P tranſire debet, ubi verticalis LP ei plano occurrit.

Fig. 51. Tab. IX.

104.

104. Quando igitur lucidum est ante opacum in tabula, vel etiam ante tabulam, umbra procurrit versus lineam horizontalem. Ex opposito versus marginem tabulæ, quando lucidum est post corpus opacum. Denique si lucidum sit in eodem plano parallelo ad planum tabulæ, in quo est opacum, umbræ directio est pariter tabulæ parallela.

105. IV°. *Umbra est vel ejusdem latitudinis cum corpore opaco, si radii lucis sint paralleli; vel est pyramidalis, si lucidum est majus opaco; vel crescit, prout longius ab opaco discedit, si lucidum sit minus.* Idem est de longitudine corporum lucidorum, & umbræ. Hæc omnia vel exigua adhibita attentione deducuntur ex iis, quæ *Part. I Instit. Opt.* a N. 91 dicta sunt.

106. V°. *Quando lucidum est punctum, umbræ perimeter determinatur projectione optica ambitus extimi corporis opaci, loco, in quem cadit umbra, instar tabulæ considerato, ante quam corpus opacum sit collocatum, & puncto lucido instar puncti oculi.* Est iterum propagationis rectilineæ radiorum lucis sequela, magisque adhuc patebit ex ipsa umbrarum projectione perspectiva.

107. VI°. *Tot exprimendæ sunt umbræ, quot sunt lucida.* Vide N. 92 *Part. I Instit. Opt.*

108. Cum casus admodum rarus sit, quo etiam penumbræ exhiberi debeant, nullam de iis mentionem fecimus. Patebit vero e sequentibus, non aliam projectionis penumbræ esse rationem, quam si tot considerentur puncta lucida, quot attendi debent extrema maximarum dimensionum in corpore lucente. Hunc in modum si spectemus penumbram, ejus projectio etiam in sequente Problemate generali includitur.

109. *Problema generale:* exhibere projectionem perspectivam umbræ corporis opaci.

Resolutio. Ex puncto lucido demittatur in planum geometricum perpendiculum; punctum, in quod cadit, dicetur nobis *pes lucidi.* Eodem modo determinentur perspective omnia puncta baseos, qua corpus incumbit plano geometrico. E pede lucidi ducantur per singula puncta baseos rectæ indefinitæ. Denique ex ipso puncto lucido ducantur aliæ rectæ per vertices altitudinum corporis, quæ in diversis ejus dimensionibus habentur; concursus harum cum prioribus per puncta baseos ductis dabit angulos perimetri umbræ, qui inter se connexi umbræ perimetrum præbent.

Ratio manifesta est. Hac enim methodo determinantur omnia triangula, quorum latus unum sit linea in ambitu corporis, alterum sit radius lucis, qui extremum ejus lateris prætervehitur, & in planum objectivum incurrit, illicque umbram lineæ ejus terminat: tertium denique designet umbram, sive rectam, ad quam radii lucis pertingere nequeunt. Quare alia re opus non est, quam ut extrema um-

brarum a verticalibus projectarum connectantur. Verum applicemus jam hoc problema casibus particularibus.

ARTICULUS II.

De umbris corporum a sole, vel luna collustratorum.

110. Projectio perspectiva umbrarum corporum radios solares vel lunares intercipientium multis ex capitibus facilior est, quam si lucidum sit punctum, ex quo radii divergant, & corpori opaco vicinum. Puncti porro nomine intelligimus haudquaquam punctum quodpiam physicum, verum lucida exigua, uti plerumque sunt flamma candelæ, vel lampadis ardentis; immo ipse sol, & luna ob exilitatem anguli, sub quo apparent, puncti rationem plerumque habent, nisi expresse contrarium moneatur. Attamen cum eorum distantia immensa sit respectu corporum in tabula exhibitorum, censentur radios parallelos emittere. Triplex autem casus considerari potest: *Primo* quando sol vel luna est in plano (producto scilicet) tabulæ; & tum objecta æque delineata, & ipse spectator ob ingentem ab his sideribus distantiam, censentur in eodem plano. *Secundo* dum sol aut luna est post planum tabulæ, quo casu simul est post omnia corpora, quæ in tabula exhiberi possunt. *Tertio* quando hæc sidera sunt a tergo spectatoris, sive ante tabulam, ideoque etiam ante omnia objecta, quæ in tabula repræsentantur. Percurramus jam singulos.

111. Problema I. Delineare perspective umbras corporum, quando sol vel luna est in plano tabulæ. Duplex rursus in hac hypothesi est casus, nempe vel sol est in ipso horizonte spectatoris, vel supra eundem? Unde sit

Fig. 52. Tab. IX. Resolutio I[a], dum sol vel luna est in horizonte. Sit AB (Fig. 52 Tab. IX) projectio perspectiva rectæ verticalis puncto B plano geometrico insistentis; si nullum alterum corpus obstet, ducatur per B recta margini infimo tabulæ parallela BG, donec occurrat margini dextero PQ; erit hæc umbra rectæ AB. Ratio patet ex problemate generali, & hypothesi, quod radii e sole vel luna veniant paralleli; nam fieri nequit, ut recta ad BG parallela, & per A transiens concurrat cum BG.

Verum si recta BG incurrat in corporis alterius projectionem, velut si RQPS repræsentet planum aliquod verticale, cujus intersectio cum plano geometrico sit PS, ubi recta BG in G secat PS, erigatur perpendicularis G*o* indefinita; agatur ex A ad BG parallela, quæ occurrat perpendiculari G*o* in *o*; habebitur umbra BG*o* in *o* terminata.

112.

112. Eodem modo, si ante planum RQPS consistat parallelepipedum *abhefdcg*, ubi BG secat latus basis *ab* in C, erigatur perpendicularis CD occurrens lateri basis superioris in D; & si quidem planum *dfgc* sit parallelum horizonti, ducatur DE parallela itidem horizonti, secus vero, erigatur etiam in F, ubi BC producta secat latus *bh*, perpendiculum, quod in E occurrat lateri *cg*, & conjungantur D, E, siquidem AB sit altior parallelepipedo; cetera peragantur ut numero præcedente; erit projectio umbræ BCDEFG*o*.

Et quoniam parallelepipedum etiam ipsum umbram projicit, ducantur per puncta *a*, *e*, *h*, *b* parallelæ ad horizontalem lineam, quæ PS secent in *i*, *q*, *k*; inde in plano verticali ducantur perpendiculares *im*, *qn*, *kl*, quarum altitudo determinatur per parallelas ad TP ex *d*; *f*, *g*, *c* ductas, erit umbra parallelepipedi in plano geometrico *eikb*, in verticali vero *mnlki*.

Illud quoque per se clarum est, earum rectarum umbras exprimi non debere, quæ intra ambitum aliarum eas projiciunt. Verum quia hoc non semper liquet, antequam omnia determinata sunt, nihil omitti debet.

112. Resolutio II^a^, dum sol vel luna est supra horizontem. Esto delineanda umbra parallelepipedi *hc* (fig. 53 Tab. IX). Ducantur per singulos angulos baseos *a*, *b*, *c*, *d* parallelæ ad lineam horizontalem indefinitæ. Tum ad angulos basis superioris *g*, *e*, *f*, *h* fiant anguli *lgb*, *mec*, *iah*, *kfd* singuli æquales complemento altitudinis solis supra horizontem; rectæ *gl*, *hi*, *em*, *fk* terminabunt umbram, si inter se, & cum punctis baseos *a*, *b* nectantur. Fig. 53. Tab. IX.

Quod si umbra a corpore opaco projecta incurrat in alterum corpus perspective delineatum, velut in planum verticale GHIF, res hunc in modum absolvitur. Projiciat umbram recta verticalis AB; ducta iterum BE parallela lineæ horizontali, & facto angulo EAB æquali complemento altitudinis solis, erigatur in C, ubi EB secat FI, intersectionem nempe plani verticalis cum plano geometrico, perpendiculum, usque dum occurrat in D rectæ AE: erit pars umbræ in plano geometrico BC; pars altera in plano verticali usque ad D ex C assurget.

Quid agendum sit, quando plana, in quæ umbræ incurrunt, non sunt verticalia, vel horizonti parallela, inferius videbimus.

114. Problema II. Exhibere optice umbras corporum, quando sol, vel luna sunt post tabulam. Cum sol vel luna esse possint vel in ipso horizonte, vel supra illum, rursus duplicem habemus resolutionem.

Resolutio I^a^, quando sol est in horizonte. Quoniam vel datur, vel assumitur azimuthum, seu distantia puncti horizontis, in quo sidus versari concipitur, a meridiano oculi, id est, a puncto visus, sit sol in S, corpus umbram projiciens cylinder verticalis FEBA (fig. 54 Fig. 54.
Tab. IX). Ducantur per extrema diametri baseos tabulæ parallelæ A, Tab. IX.

B ex S rectæ SAC, SBD, usque ad marginem infimum tabulæ, ſi nullum alterum corpus occurrat. Evidens eſt, rectas ex S per F & E ductas, utpote parallelas ad SA, SB, nuſpiam poſſe cum his concurrere; quare umbra indefinite verſus marginem tabulæ procurrere debet.

At vero ſi umbra parallelepidi *abcdfgeh* eodem modo determinetur, ductis ſcilicet per *a*, *b*, *c*, *d* ex S rectis, ponamus haſce incurrere in planum verticale *trsu*, & ejus interſectionem *sr* cum plano geometrico ſecare in *n* & *i*; erigantur in plano hoc perpendicula *ro*, *ik*; ex *i*, & *k* ducantur in novo plano horizonti parallelo *tyxu* rectæ *op*, *kl*, quæ productæ tranſirent per S, & occurrant in *p*, & *l* interſectioni *yx* hujus plani horizontalis cum altero verticali *yzax*. Fiant *pq*, *lm* verticales, & applicata regula ad S & *f*; item ad S & *e* abſcindantur altitudines *pq*, *lm*; habebitur projectio umbræ parallelepidi *beni* in plano geometrico; *noki* in primo plano verticali; *oplk* in plano horizontali; & denique *pqml* in novo plano verticali, quod altius eſſe ponitur, quam parallelepipedum *gc*.

115. Reſolutio II^a^, quando ſol vel luna eſt ſupra horizontem. Ex diviſionibus lineæ horizontalis transferatur tangens altitudinis ſolis in verticalem RT (Fig. 55 Tab. IX); tum ſumpto azimutho RC fiat CS parallela verticali, & vel deſcripta hyperbola TS, vel conſtructione alia determinetur punctum S almucantarathi, in quo ſol perſpective eſt. Evidens eſt, ex ſole demiſſum perpendiculum ob immenſam diſtantiam non poſſe cadere niſi in ipſam lineam horizontalem, ideoque C erit quodammodo *pes lucidi*.

Fig. 55. Tab. IX.

Itaque ſi quæratur umbra rectæ verticalis AB, ducatur per C & B recta indefinita; tum ex S per A altera, quæ priori occurrat in D; erit BD umbra rectæ verticalis, ſi citra obſtaculum verſus marginem tabulæ procurrere ponatur.

Eſto modo pyramis triangularis LVNM, cujus altitudo perſpectiva ſit VP. Ductis rurſus CPO, SVO, conjungantur M, O; N, O (LO enim cadit intra perimetrum), habebitur umbra pyramidis MNO. Nam cum umbra lateris MV, utpote lineæ rectæ, ſit itidem linea recta, & habeantur jam duo puncta M & O, ejus ſitus & longitudo MO determinata eſt. Idem eſt de latere VN.

116. Problema III. Delineare ex Optices legibus umbram corporis, quando ſol eſt a tergo ſpectatoris.

Reſolutio I, quando ſol eſt in ipſo horizonte. Debet dari, vel aſſumi azimuthum, & quidem cum locus ſolis ipſe in tabula exhiberi nequeat, accipiatur punctum diametraliter oppoſitum, uti ſi a meridiano oculi verſus ſiniſtram ſpectatoris partem diſtet 30°, accipiatur VQ (Fig. 56 Tab. X) tangens 30° lineæ horizontalis verſus dexteram partem. Ex Q ducatur ad punctum B lineæ verticalis

Fig. 56. Tab. X.

lis AB recta; erit BQ umbra interminata ejusdem verticalis, quæ ſemper fit dilutior verſus horizontalem.

Quod ſi incurreret in alterum corpus, ſatis e ſuperioribus conſtat, quid agendum eſſet.

Reſolutio II^a^, dum ſol vel luna eſt ſupra horizontem. Ponamus azimuthum eſſe verſus dexteram ſpectatoris; accipiatur hoc in diviſionibus lineæ horizontalis verſus ſiniſtram, nempe VP. Sit VG tangens altitudinis in iisdem diviſionibus, GS hyperbola, vel projectio almucantarathi, in quo eſt locus ſoli diametraliter oppoſitus S; SP perpendiculum ex S ad lineam horizontalem. Debeat exhiberi umbra lineæ verticalis CD, incurrens in planum verticale NMOK. Conjungatur P cum D; & C cum S; ubi hæ duæ rectæ in *e* ſe interſecant, terminaretur umbra DE*e*, ſi non obſtaret planum NO. Occurrat hujus plani interſectioni KO cum plano geometrico recta D*e* in E; ex E fiat verticalis EF, occurrens SC in F, habebitur umbræ portio altera in plano geometrico DE, altera in plano verticali EF.

117. Quæ paullo plus difficultatis habent, reſervamus poſtremo articulo, ubi varia problemata de projectione umbrarum, ſeu fiant ex interceptis radiis ſolaribus, ſeu alterius lucidi, proponemus.

ARTICULUS III.

De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens.

118. Dum lucidum corporibus opacis vicinum eſt, projectio perſpectiva umbrarum haud paullo moleſtior eſt, quam ſi corpora a ſole vel luna colluſtrentur. Caſus, qui expendendi ſunt, ad ſequentes reducuntur. Lucidum vel eſt ante tabulam, vel poſt tabulam, vel in ipſo plano tabulæ, & quidem vel altius corpore umbram projiciente, vel humilius. Generalem autem hanc præſcribimus regulam: *quotiescunque lucidum non debet ipſum delineari in tabula, fiat ſaltem projectio perſpectiva pedis, & ipſius puncti lucidi.* Projectio hæc ſemper fieri poteſt, modo tabula, quantum requiritur, produci ponatur, niſi in unico caſu, quo lucidum ponitur poſt tergum ſpectatoris. Quando autem volumus fieri projectionem pedis lucidi, qui eſt velut punctum quoddam accidentale, ad quod omnes umbræ in planis ad horizontem parallelis convergere debent, intelligitur etiam, fieri debere in caſu, quo opacum altius eſt lucido, ut umbræ cadant etiam in lacunar, ſi quod in tabula repræſentetur, productionem perpendiculi

per

per punctum lucidum transeuntis, donec occurrat tabulato, vel lacunari, quippe cum etiam umbræ ad punctum hujus occursus convergant.

Fig. 57. Tab. X. 119. Exhibeat (fig. 57 Tab. X) P pedem lucidi. Agatur PQ parallela ad marginem infimum tabulæ, donec occurrat intersectioni *ah* plani verticalis cum plano geometrico in Q, ubi erigatur perpendicularis QR, quæ in R secat *bc*, intersectionem ejusdem plani verticalis cum lacunari *bedc*. Fiat ex R ad horizontalem lineam parallela RS; producatur PL, dum occurrat in *p* rectæ RS; erit *p* punctum convergentiæ omnium umbrarum a verticalibus in lacunar projectarum. Ut igitur umbra verticalis AB repræsentetur, ducatur ex P per B recta PBC, quæ in C occurrit intersectioni plani verticalis *bh* cum plano geometrico. Ex C fiat verticalis CD, secans *bc* in D. Conjungatur D cum *p*, & agatur recta ex L per A, donec secet D*p* in E; habebitur projectio umbræ rectæ verticalis BCDE.

120. Sit recta MN suspensa in lacunari ex puncto M, velut funiculus pendulus, qui non attingat planum geometricum. Agatur ex *p* per M recta *p*MO secans *ed* (in qua planum verticale occurrit lacunari) in O. Ex O fiat verticalis indefinita in plano *edgf*, quam in K abscindat recta ex L per extremum N verticalis MN ducta; erit MOK projectio perspectiva umbræ rectæ verticalis MN in lacunari fixæ.

121. Quando lucidum est ante tabulam, attamen vicinius tabulæ, quam oculus spectatoris, jam ostendimus, qua ratione etiam graphice fieri possit projectio & lucidi, & pedis eiusdem, producta scilicet infra marginem infimum projectione plani geometrici. Verum quando distantia lucidi a tabula excedit radium principalem, vel eidem æquatur, hæc projectio fieri nequit. Unde ad aliam methodum confugiendum est, tum ut situs, tum ut longitudo umbræ determinari possit. Ponimus autem corpus ipsum (quod interim verticalem lineam sumimus) in tabula exhiberi.

Fig. 58. Tab. X. Sit (fig. 58 Tab. X) altitudo lucidi LD, verticalis umbram projiciens AB, hujus a lucido distantia data BD. Cogitetur AC ad BD parallela; erit LC : CA = AB : BE; hoc est, *differentia altitudinis lucidi & verticalis est ad distantiam lucidi a verticali, ut altitudo verticalis ad longitudinem umbræ.*

Ut autem etiam situs umbræ exhiberi possit, concipiatur (fig.
Fig. 59. Tab. X. 59 Tab. X) idem triangulum figuræ 58[e] ita in præsente ELD collocatum, ut basis ejus DE secet sub angulo DFO marginem infimum tabulæ PMNO. Ducatur item DGH ad marginem tabulæ perpendicularis, & EH tabulæ parallela. Cum detur distantia lucidi a tabula DG, & angulus obliquitatis FDG, datur etiam FG; unde fiat DG ad GF, ita radius principalis SV ad terminum quartum, qui erit VQ tangens anguli obliquitatis, sub quo recta DE, consequenter etiam

umbra

umbra BE versus sinistram a plano verticali recedit. Ratio facile intelligitur: si enim cogitetur triangulum QSV erigi, ut plano tabulæ insistat perpendiculariter, erit triangulo DFG in plano geometrico descripto simile, & DF, SQ parallelæ, quarum punctum concursus, seu accidentale, proinde est Q. Igitur si habeatur projectio verticalis AB, cum prima analogia dederit longitudinem umbræ, secunda vero punctum Q, versus quod in plano geometrico dirigi debet, projectio perspectiva fieri potest.

122. Posuimus, lucidi altitudinem majorem, quam sit altitudo corporis opaci. Si contrarium contingat, exhibeat AB (fig. 58 Tab. X) lucidi altitudinem, & LD altitudinem lineæ verticalis; fiatque AC : CL = 1 : tang. LAC = radius principalis ad tang. anguli LAC in divisionibus lineæ horizontalis. Angulus obliquitatis FDG, sive punctum azimuthale, ad quod umbra in plano horizontali tendere debet, quæritur ut numero præcedente. Fig. 58. Tab. X.

Habita inclinatione rectæ AL ad planum parallelum horizonti, & azimutho, umbra hunc in modum exhiberi potest. Sit in fig 60[a] Tab. X, VT tangens anguli LAC figuræ 58[æ], in divisionibus lineæ horizontalis; MV azimuthum. Descripta hyperbola TL ducatur ex M per B (est AB projectio perspectiva verticalis, cujus umbra desideratur) recta, quæ erit directio umbræ in plano geometrico, & quidem interminatæ, si nullum aliud corpus interponatur. Si in C recta BM occurrat plano verticali FGHI, conjungatur etiam L cum A, & ex C erigatur perpendicularis CE: si LA non occurrat rectæ CE, umbra ultra planum FH versus M projicietur; si autem LA secet alicubi rectam CE intra C & E, umbra in plano verticali pertinget usque ad punctum intersectionis, illicque terminabitur. In nostro casu tabula exhibeat tabulatum superius FNKG, cujus intersectioni cum plano verticali FG umbra CE occurrit in E. Ex B fiat B*a* ad lineam horizontalem parallela, *ab* vero parallela ad lineam verticalem, ac demum *bc* rursus horizontali parallela. Producatur BA, donec in P secet rectam *bc*; erit P punctum, ad quod in lacunari umbra dirigi debet. Nam si ipsa verticalis AB ad P usque protenderetur, evidens est, umbram in P terminatum iri: igitur partium rectæ AB, quæ infra P sunt, umbræ ad idem punctum tendere debent. Conjungatur A cum L; LA intersecabit rectam EP in D, atque ibidem terminabitur umbra in lacunar projecta. Fig. 60. Tab. X.

Nihil in hac constructione ambigui esse potest. Est enim reapse punctum L illud almucantarathi supra horizontem angulo LAC fig. 58 elevati, ad quod tendit AL producta, donec superficiei sphæræ cœlestis occurrat. Usus autem puncti P, (in quo verticalis umbram projiciens occurrit tabulato superiori) idem prorsus est, ac illius, in quo verticalis per lucidum transiens eidem lacunari occurrit, uti patet ex ratione in constructione addita.

123. Quod in hypothesi lucidi humilioris verticali umbram projiciente fecimus, facilius etiam fieri potest, quando lucidum est altius. Nam si angulus AEB (fig. 58), & angulus obliquitatis FDG (fig. 59 Tab. X) vel detur, vel calculatus fuerit, tantummodo opus est, ut sumpto azimutho (fig. 56 Tab. X) VP, & facta projectione puncti almucantarathi infra horizontem S, ad quod dirigitur recta LE figuræ 58, servetur eadem constructio, quam N. 116 adhibuimus.

Fig. 58. Tab. X. Fig. 59. Tab. X.

124. Ex hisce autem intelligitur, quando puncta lucida sunt a tergo spectatoris, usum almucantarathorum pro singulis verticalibus umbram projicientibus eundem esse, ac quando a sole, vel luna illuminantur, modo notetur, & angulos singulos inclinationis ad horizontem rectarum ex lucido per vertices altitudinum ductarum quærendos esse, & angulos obliquitatis, quando corpus umbram projiciens diversarum dimensionum diversas altitudines habet; quæ quidem res non peculiare incommodum censendum est, quod usui almucantarathorum annexum sit; verum semper delineationis laborem difficiliorem reddit, quando projectio lucidi in tabula fieri nequit. *Cl. de la Caille* calculum tantummodo adfert pro longitudine, & situ umbræ, dum lucidum est a tergo spectatoris; existimavimus laboris aliquod compendium nos facturos, si constructionem ad usum almucantarathorum expressius reduceremus.

ARTICULUS IV.

Nonnulla Problemata de projectione perspectiva umbrarum.

125. Problema I. Invenire punctum in perpendiculo per lucidum transeunte, ad quod diriguntur umbræ a rectis verticalibus in plana inclinata projectæ.

Resolutio. Si ejusmodi planum FIE sub dato angulo ad horizontem inclinatum (fig. 61 Tab. X); sit item projectio pedis lucidi L in plano geometrico P. Intersectio plani verticalis CD cum plano terræ producatur usque ad lineam horizontalem in R, & etiam versus marginem tabulæ, si opus sit, uti etiam supremum hujus latus EF. Ex P agatur ad horizontalem parallela *Pp*, fiatque *pm* ad verticalem parallela. Evidens est, esse *pm* altitudinem perspectivam lateris CF in distantia pedis lucidi Pa tabula. Ducatur FM ad *p*P parallela. In horizontali accipiatur inde a puncto visus V versus S tangens complementi anguli, cujus tangens est VR, & ducatur MS, secans FR in N; erit angulus SNR = FNM rectus, & NM ad FR perpendicularis. Erecta ad S verticali SQ, & æquali tangenti anguli, sub quo planum FIR ad horizontem inclinatur, pro azimutho VS, ducatur ex

Fig. 61. Tab. X.

Q per

Q per N recta, quæ LP productam secet in T; erit T punctum, ad quod diriguntur umbræ a verticalibus in planum FIE projectæ.

126. Nil aliud demonstrandum est, quam quod planum FIE, si indefinite versus Q, & LP produceretur, tam per Q, quam per T transiret, ideoque T sit punctum, in quod cadit verticalis per lucidum transiens, in plano FIE producto (103).

Ex constructione patet, esse angulum SNQ æqualem angulo, sub quo planum datum inclinatur ad horizontem, esseque præterea SN ad latus plani EF perpendicularem, ideoque lineam NQ sitam esse in plano FIE producto. Dein triangula QNS, MNT sunt optice similia, quod MT sit parallela tam ad planum verticale FEDC, quam ad QS, angulique recti sint ad M & S, utpote cum MS, FS sint horizonti, & inter se parallelæ, adeoque ad verticales MT, FC perpendiculares. Quare manifestum est, lineam NT esse etiam in plano FIE producto, & propterea esse T punctum quæsitum. Q. E. D.

127. Invento puncto T difficultas nulla esse potest in delineatione umbræ a recta verticali AB projectæ. Ducatur enim per B ex pede lucidi P recta indefinita B*aet*, secans plana verticalia FD, GC in *a* & *e*, e quibus punctis erigantur perpendiculares *ab*, *ed*, quæ occurrant lateribus FE, FG in *b* & *d*. Ex T ducatur in plano FIE recta *bc*, quæ secet FI in *c*; conjungatur *c* cum *d*; denique agatur ex L per A recta, quæ in *t* secet indefinitam PB*t*, erit projectio umbræ quæsita B*abcdet*.

Ut autem exhibeatur etiam umbra corporis HID, ducantur ex P per D, C, H &c, item per punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum ex I demissum, rectæ indefinitæ. Applicetur dein regula, ut per L & F, per L & G, per L & I transeat; abscindentur priores rectæ ex P per puncta baseos ductæ in *q*, *r*, *s* &c; connectantur hæc puncta intersectionum rectis C*q*, *qr*, *rs* &c, habebitur umbræ perimeter.

128. Jam monuimus, omnium perpendiculorum, quæ in basin cadere possunt, projectionem saltem lineis cæcis faciendam esse, quando umbræ exhibendæ sunt, quod, antequam puncta *q*, *r*, *s* &c definiantur, sæpe nesciatur, quæ intra, extrave perimetrum cadant.

Ceterum observa, lateribus HC, GF versus marginem productis, & ex M in GF demisso perpendiculo, eodem modo potuisse in LP determinari aliquod punctum *z*, ad quod dirigitur umbra *dc* in planum G F cadens. Verum satis fuit unum invenire, cum habito *c* ex puncto T, & *d* ex perpendiculari *ed*, situs rectæ *cd* determinatus sit.

129. Problema II. Delineare umbram projectam in planum geometricum a recta obliqua ad horizontem.

Resolutio. Ut solutio haberi possit, vel actu debet dari projectio puncti, in quod cadit perpendiculum ab extremo superiore in

planum terræ demissum, vel saltem constare debet de angulo obliquitatis, sub quo ad planum verticale recta data inclinatur. Nam si
Fig. 62. Tab. X. (fig. 62 Tab. X) detur præcise projectio perspectiva rectæ AB, nescitur, utrum sita sit in plano geometrico, an oblique horizonti insistat. At si sciatur, eam inclinari ad planum verticale sub angulo, cujus tangens sit VR, tantum opus est, ut conjungatur alterum extremum B cum R, & ex A fiat AP ad lineam verticalem VS parallela; erit P projectio puncti, in quod perpendiculum incidit.

Ex pede itaque lucidi *p* agatur per P indefinita *p*PC, cui in C occurrat recta ex L per A ducta Evidens est, haberi puncta B & C, quæ sint projectio perspectiva punctorum A & B, si punctum L consideretur instar puncti oculi (106). Et quia projectio umbræ itidem recta est (102), erit BC umbra quæsita.

Quod si ponatur lucidum in *l* humilius, quam extremum *a* lineæ objectivæ *ab* umbram projicientis, accipiatur in *ab* quodvis punctum aliud magis depressum, quam *l*, v. g. *m*, & ex eo ducatur ad *aq* parallela *mn*, quæ erit itidem perpendiculum ex *m* in planum geometricum demissum, & fiat projectio umbræ partis *bm*, nempe *bo*, quæ tamen indefinite in *r* producenda erit, cum nuspiam terminetur, nisi forte in aliud corpus incurrat.

130. Problema III. Determinare ex legibus Perspectivæ umbram lineæ oblique horizonti insistentis, dum ea incidit in planum obliquum.

Fig. 63. Tab. X. Esto lucidum L (fig. 63 Tab. X), ejus pes P, recta obliqua AB, M*b* latus plani inclinati, quo plano terræ insistit, tangens inclinationis hujus plani sit SR, tangens obliquitatis ad planum verticale VR. Producatur M*b*, donec secet lineam horizontalem in Q. Si angulus plani obliqui K*b*M sit rectus, erit VR complementum de VQ, & recta ex pede lucidi P ad R ducta, erit ad MQ in N perpendicularis, consequenter si LP producta secetur in T per rectam SNT, erit T punctum, ad quod umbræ in planum KM a lineis verticalibus projectæ diriguntur, per Probl. I.

Per punctum C plani geometrici, in quod cadit perpendiculum ex A demissum, ducatur ex P recta indefinita, quam in G secet altera recta ex L per A ducta. Patet ex præcedente problemate, si nihil obstaret, umbram rectæ AB futuram BG. Sed ponamus hanc in F occurrere intersectioni M*b* plani obliqui cum plano geometrico: incurret etiam recta CG alicubi in D in eandem M*b*, & siquidem perpendiculum AC umbram projiceret, ea inde a D dirigeretur versus T. Itaque ducatur TD*a* indefinita, & altera ex L per A, quæ priorem secet in *a*. Si punctum *a* sit adhuc in plano obliquo (velut si id foret HIK*b*), conjungatur F cum *a*, habebiturque projectio umbræ rectæ datæ BF*a*. Verum si *a* sit extra planum, recta ex F ad *a* ducta terminanda est in *r*, ubi postremum latus plani inclinati MO secat, &

pars

pars umbræ cadet ultra planum inclinatum versus G. Atque ut hæc exhibeatnr, siquidem visibilis sit, projiciatur etiam umbra postremi lateris MO plani inclinati. In hunc finem ducta MR, demittatur in eam ex O perpendiculum, vel ex quovis ejus puncto X, nempe XE. Agatur ex P per E indefinita, quæ in Y secetur a recta ex L per X ducta, aut si spatium admittat, & O non sit altius quam L, applicata ad L & O regula ducatur OZ. Punctum M conjungatur cum Y, vel Z, recta MZ secabit FG (directionem umbræ in plano geometrico) in *n*. Erit MYZ limes umbræ projectæ a plano KOM*b*, ultra quem umbra rectæ AB ab *n* usque in G procurret.

Nihil in tota hac constructione occurrit, cujus ratio ex prioribus non sit clara. Quod enim pertinet ad directionem rectæ CD, quæ in plano inclinato versus T dirigi debet, abunde ex primo Problemate perspicitur; quod autem in *a* umbra rectæ AB cum D*a* concurrere debeat, evidens est, cum D*a*F sit projectio partis trianguli supremæ BAC.

131. Problema IV. Exhibere umbram corporis, quod a pluribus lucidis illuminatur.

Resolutio. Nihil in hoc problemate novæ difficultatis occurrit. Si enim lucidorum (fig. 64 Tab. XI) *l* & L pes sit *p* & P, & Fig. 64. Tab. XI. projicienda sit umbra plani verticalis ABDE, ducantur ex *p* per A, B rectæ indefinitæ, quæ terminentur dein in H, I, ubi iis rectæ ex *l* per E, & D ductæ occurrunt; erit ABIH umbra ex lucido *l*. Eodem modo definitur umbra ABFG ex lucido L. Patet, spatium umbræ prioris CBIH illustrari adhuc radiis lucidi L, uti etiam spatium GACF radiis lucidi *l*; itaque portio triangularis ACB, ad quod ex neutro lucido radii pertingere possunt, multo nigrior apparere debet, quam residuæ partes umbrarum, quod unum hoc loco tiro monendus erat.

132. Problema V. Separare umbram a penumbra.

Sit corpus lucidum sphæra OMLN (fig. 65 Tab. XI) Ducatur Fig. 65. Tab. XI diameter verticalis LKO, quæ producta cadat in punctum horizontis Q; ductis ex Q per C, D rectis indefinitis determinentur in utraque tria puncta T, F, S; E, X, H, velut L, K, O forent tria lucida diversæ altitudinis. Demittantur ex M, & N itidem in horizontem perpendicula MP, NR; & agantur rectæ indefinitæ per D & C tam ex P, quam ex R, crescet latitudo umbræ prioris utrinque; conjungatur T cum E, erit spatium CYVD, lineis RCY, PDV comprehensum umbra vera, reliquum spatium inter GH & lineas RDI, PCG, erit penumbra.

Quoniam quo propius ad umbram veram acceditur, eo minus lucis in penumbram incidere potest, veri umbræ limites difficulter discernuntur: at vero ab his versus extimum ambitum penumbra fit perpetuo magis diluta, ut demum perimeter discerni haud possit. Solis aut lunæ discus optice si exhibeantur in tabula, haud ultra dimidium

gradum diametrum habere debent, ideoque nisi ingentes sint tabulæ, vix ullus penumbræ usus esse poterit. Si alia sunt lucida opacis corporibus vicina, velut ingens fax, aut rogus, maximæ eorum dimensiones pro diametris sumendæ erunt, ceteraque peragenda, ut in Problemate.

133. Atque hæc fere sunt, quæ de Perspectiva umbrarum adferenda erant. In utroque vero Capite posuimus semper, tabulam esse planam, & quidem verticalem: contingit quandoque, ut objectum quodpiam delineandum sit seu in plano horizontali, ut in certo oculi situ erectum, & verticale appareat; seu etiam in lacunari, aut in plano aliquo verticali quidem, verum parallelo ad planum verticale oculi. Quin immo tabulæ vices subinde agunt fornices, aliæve superficies irregulares. Quando pauca puncta satis sunt, ut dein tota delineatio perfici possit, Geometriæ gnarum ars non destituet, qua eadem determinet; at quando plura sunt objecta exhibenda, ut geometrica determinatio nimis laboriosa accideret, ad alia artificia confugiendum est. In hunc finem subjicimus breviter usum craticulæ.

APPENDIX

De usu craticulæ in projectione imaginum in plana horizontalia, vel etiam verticalia, aut superficies irregulares.

α. Construatur craticula prototypi ABCD eodem prorsus modo, quo diximus, quando Part. III Instit. Opt. de speculis cylindricis egimus (fig. 66 Tab. XI). Latus infimum transferatur in A'D', sumpta PO distantia oculi, & OV ejus altitudine supra planum horizontale (vel etiam depressione infra lacunar) (fig. 67 Tab. XI). Agatur ex O per A' (est autem PA' dimidia basis craticulæ prototypi) indefinita, & ad A' erigatur perpendicularis A'B' æqualis altitudini prototypi, ac in totidem partes æquales A'*a*, *ab*, *bc* &c divisa. Eodem modo sit OV, altitudo oculi, ad OA' perpendicularis, & ducantur ex V per *a*, *b*, *c* &c rectæ, occurrentes lineæ OA'E in α, β, γ, &c & habebitur, si fiant ex hisce punctis α, β, γ, &c parallelæ ad A'D', & agantur per divisiones ejusdem A'D' ex O itidem rectæ, projectio craticulæ prototypi in plano horizontali in totidem trapezia divisa, quot parallelogramma continet prototypum. Itaque si in correspondentes areolas transferantur partes depictæ in areolis craticulæ prototypi, oculus

Fig. 66. Tab. XI.
Fig. 67. Tab. XI.

oculus in diſtantia PO, & altitudine OV conſtitutus videbit imaginem FD'A'E eadem proportione partium depictam, quæ eſt in craticula prototypi.

β. Ut imago in plano horizontali terminetur, debet altitudo oculi OV eſſe major altitudine lateris AB craticulæ prototypi; & ut projectio ſit ſatis accurata, diviſio facienda eſt in, quantum fieri poteſt, multas areolas. Cterum projectio eorum punctorum, quæ ſunt in interſectionibus linearum horizontalium, & verticalium craticulæ prototypi, geometrice accurata eſt. Unde ſi certus eſſe velis de aliis non nullis, in quorùm accurata projectione ſit plus momenti, fieri poſſunt ſubdiviſiones aliquarum areolarum, ut ea puncta veniant ad ipſas interſectiones.

γ. Oblectandi ſpectatoris gratia ſolent etiam ejusmodi pingi tabulæ, quæ ſi ex alio ſpectentur puncto, quam qui pro oculo determinatus fuit, imagines mire deformatas exhibent; at ſi oculus debitum ſitum obtineat, non ſecus, ac aliæ, objectum debita partium proportione repræſent ant.

δ. Quando projectio facienda eſt in ſuperficiem irregularem, nihil conſultius in uſu, quam ut conſtruatur præter craticulam prototypi (fig. 66 Tab. XI) etiam e quatuor lemniſcis parallelogrammum, cujus limbi in totidem partes dividantur, atque in diviſionum punctis perforentur, ut fila eodem modo tendi poſſint, quo in craticula prototypi ductæ ſunt lineæ, quæ eam in parallelogramma minora dividunt. Noctu, aut ſi qua alia ratione obſcurari poſſit locus excluſa omni alia luce, ſtatuatur hæc craticula filaris ſuper baſi D'A' verticaliter erecta (fig. 67 Tab. XI), & candela ardens conſtituatur in eadem diſtantia PO, eademque altitudine OV, in qua oculus ponendus eſt. Dein ducantur in ſuperficie, in qua pictura facienda eſt, lineæ juxta umbram filorum; habebitur projectio craticulæ prototypi, in cujus areolas correſpondentes partes in areolis prototypi contentæ cum proportione transferantur.

Fig. 66. Tab. XI.

Fig. 67. Tab. XI.

ε. Umbrarum uſus eſſe poteſt etiam in aliis quibusdam caſibus, quando objecti projectio per ſe difficilis eſt, & ſuperficies irregularis. Extat adhuc hodie, dum hæc ſcribo, in Cæſareo-Regio hoc Collegio Academico, in fornice ambulacri (quod gradus poſtremos ad contignationem ſecundam ducentes aſcendentibus ſe ſe objicit) projectio elegans ſphæræ armillaris cum omnibus circulis ad eam pertinentibus, quæ non alio artificio quam ope umbræ, facta eſt. Nempe ſuſpendebatur illic, ubi imago incipit, vera ejusmodi ſphæra, & lampas ardens (ut eadem perpetuo haberetur altitudo) eo ponebatur loco, ex quo ſpectari debet: pctor ductum umbræ ſequebatur.

Pro minoribus projectionibus delineari etiam poſſunt imagines in charta firmiore, & ductus linearum præcipuarum minuſculis foraminibus pertundi, ut dein collocata in loco oculi candela radii per fora-

foramina in ſuperficiem, in qua pictura facienda eſt, incurrant. Quod ſi deinde puncta lucida lineis continuis conjungantur, projectio facile perficitur. Verum id genus artificia ſæpe loci, & rerum conditio ſuggerit; nos obvia exponere voluimus, ne tirones, dum forte in ejusmodi picturas incidunt, neſcio quid profundæ theoriæ iis fuiſſe exiſtiment, qui fortaſſis nec prima Perſpectivæ elementa tenuerunt.

Finis Perſpectivæ.

INDEX CAPITUM
ET
ARTICULORUM.

Pag.

CAPUT I. Perſpectiva corporum.......................... 5

ARTICULUS I. Notiones, & principia.......................... 5

ARTICULUS II. Proponuntur tres methodi delineationes perſpectivas ex legibus Optices faciendi.......................... 10

Methodus I delineandi ope craticulæ perſpectivæ.......... 10

Methodus II ſine craticula perſpectiva.......................... 13

Methodus III delineandi perſpective ope ſcalarum marginalium.......................... 16

ARTICULUS III. Problemata, quibus methodus poſtrema illuſtratur 19

ARTICULUS IV. De projectione perſpectiva almucantarathorum, & punctis accidentalibus parallelarum ad horizontem obliquarum. 29

ARTICULUS V. Non nullæ animadverſiones in projectionem geographicam hemiſphærii, uti etiam de determinanda magnitudine tabulæ, quando plura ſunt, & majora objecta.......................... 33

ARTICULUS VI. Exemplum, & obſervationes generales pro delineationibus perſpectivis omnis generis.......................... 36

CAPUT II. Perſpectiva umbrarum.......................... 41

ARTICULUS I. Notiones & principia.......................... 41

ARTICULUS II. De umbris corporum a ſole, vel luna colluſtratorum 44

ARTICULUS III. De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens.......................... 47

ARTICULUS IV. Non nulla problemata de projectione perſpectiva umbrarum.......................... 50

Uſus Almucantarathorum extenditur ad caſum, quo lucida in tabula exhiberi nequeunt, velut quando candela ardens ponitur a tergo ſpectatoris.

APPENDIX

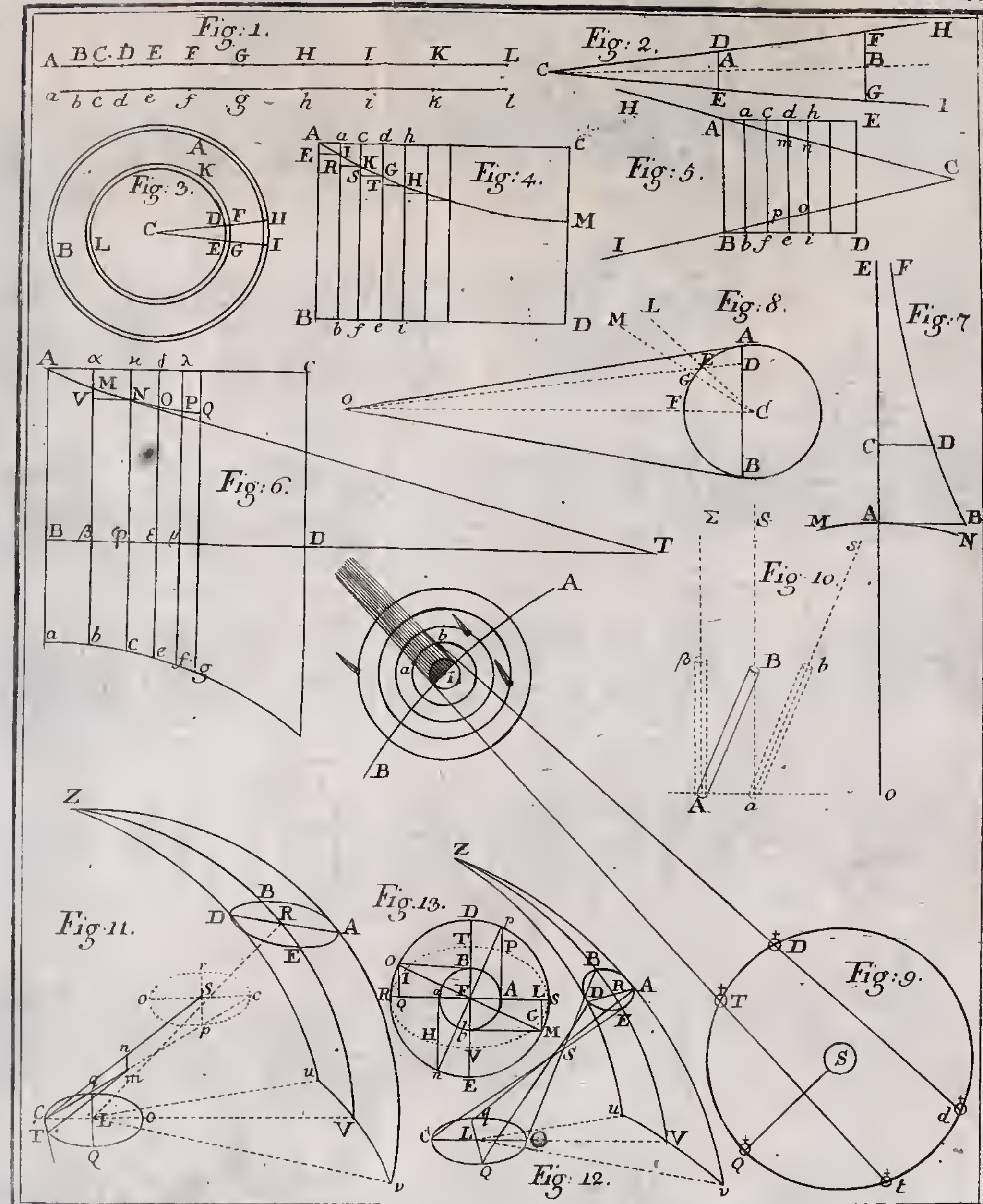
De uſu craticulæ in projectione imaginum in plana horizontalia, vel etiam verticalia, aut ſuperficies irregulares. Item de non nullis aliis artificiis analogis.......................... 54

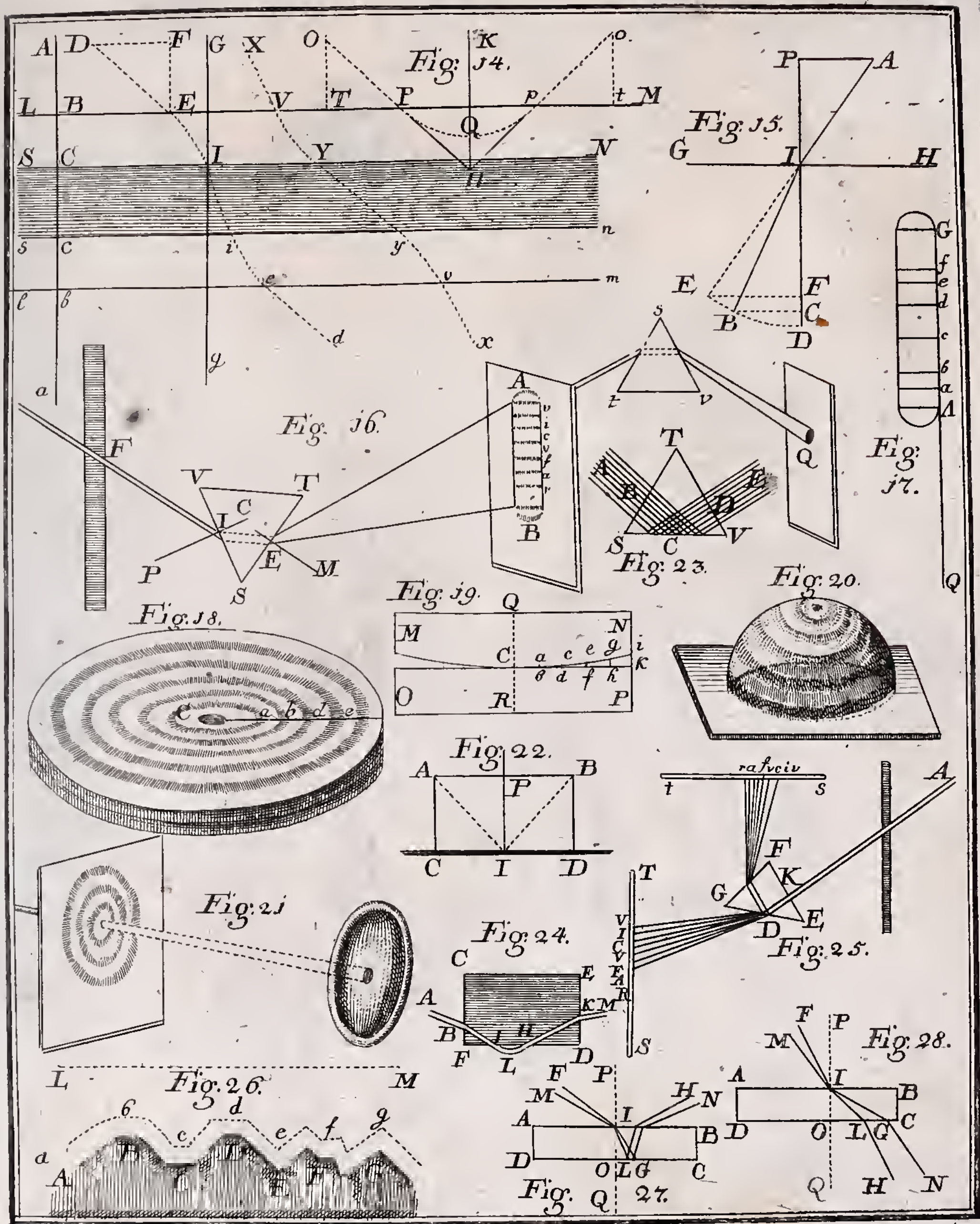
Moni-

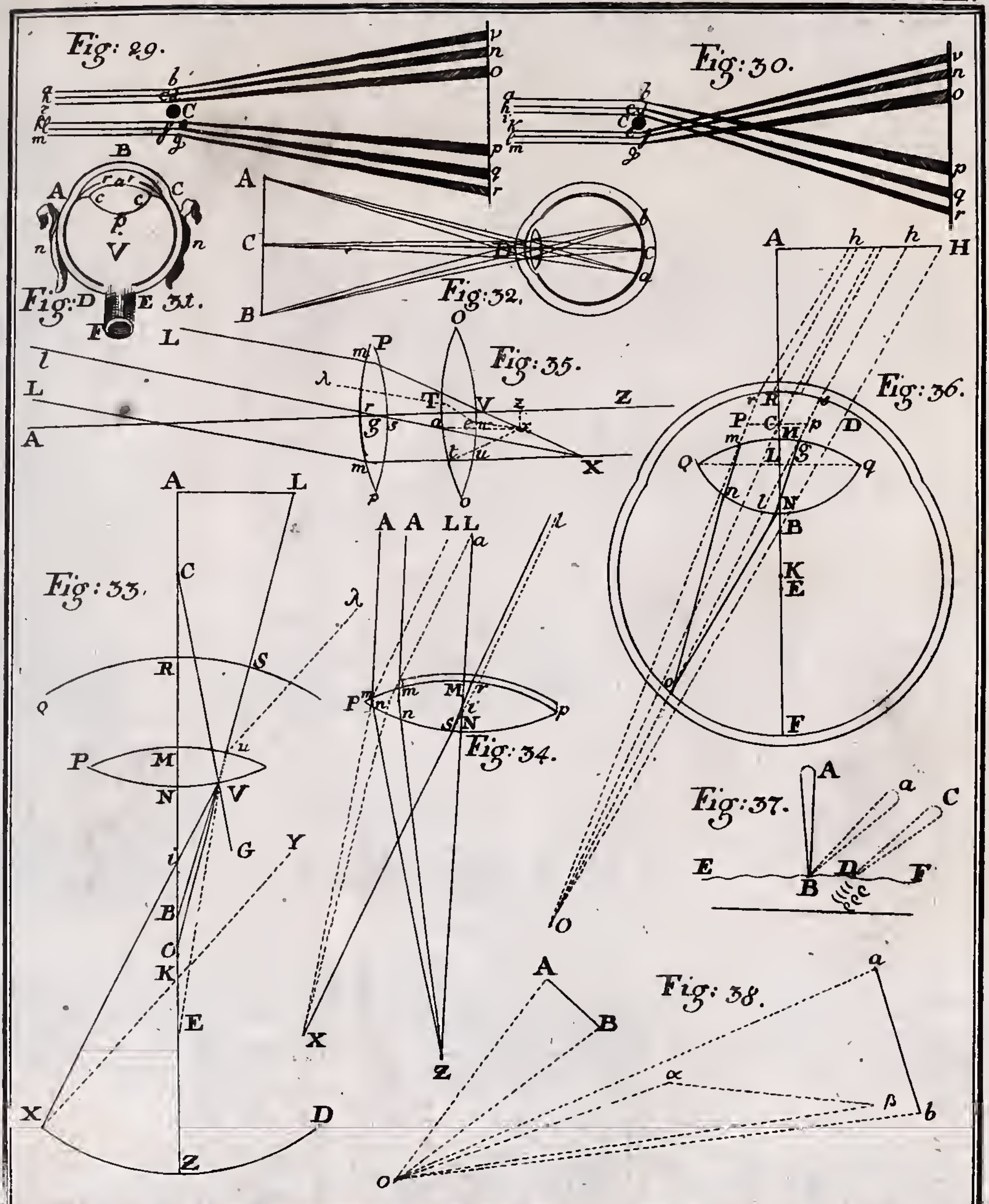
M O N I T U M.

Pag. 32. ad finem Nro. 71. ſequentia addat benevolus Lector.

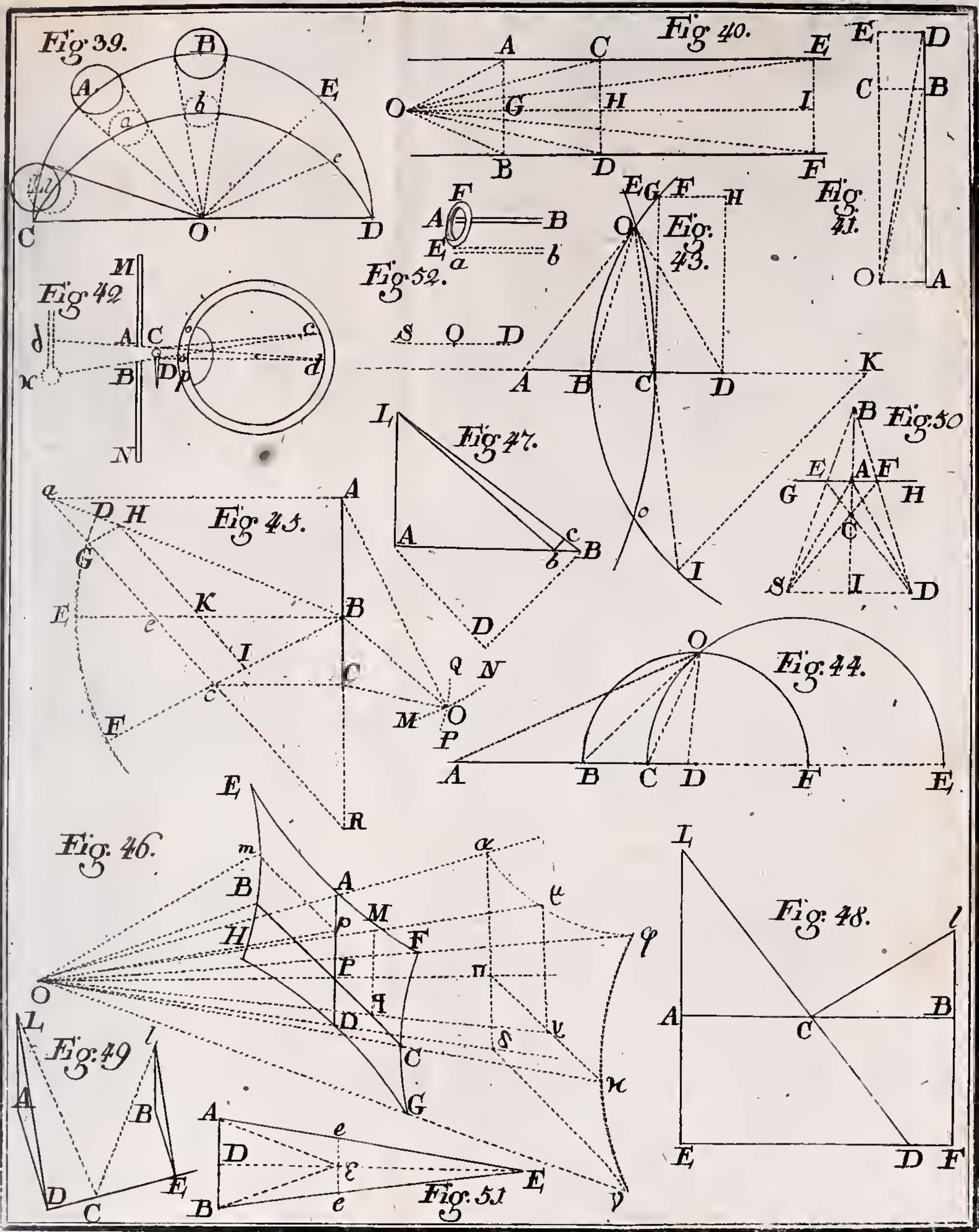
Si interſectio DV plani geometrici cum plano obliquo, in quo circuli projectio exhibenda eſt, non ſit parallela plano verticali (Fig. 34 Tab. V), adeoque V non ſit punctum viſus, ſed aliud quodpiam azimuthi dati, id tantum in delineatione erit diſcriminis, quod VQ, VP ſumendæ ſint ex diviſionibus tangentis, quæ dato azimutho competit, & non ex diviſionibus lineæ horizontalis. Nam etiam in hoc caſu planum circuli QVP per oculum tranſit; & loco radii principalis pro ſinu toto ſumenda eſt ſecans azimuthi relata ad radium principalem, tanquam ſinum totum.

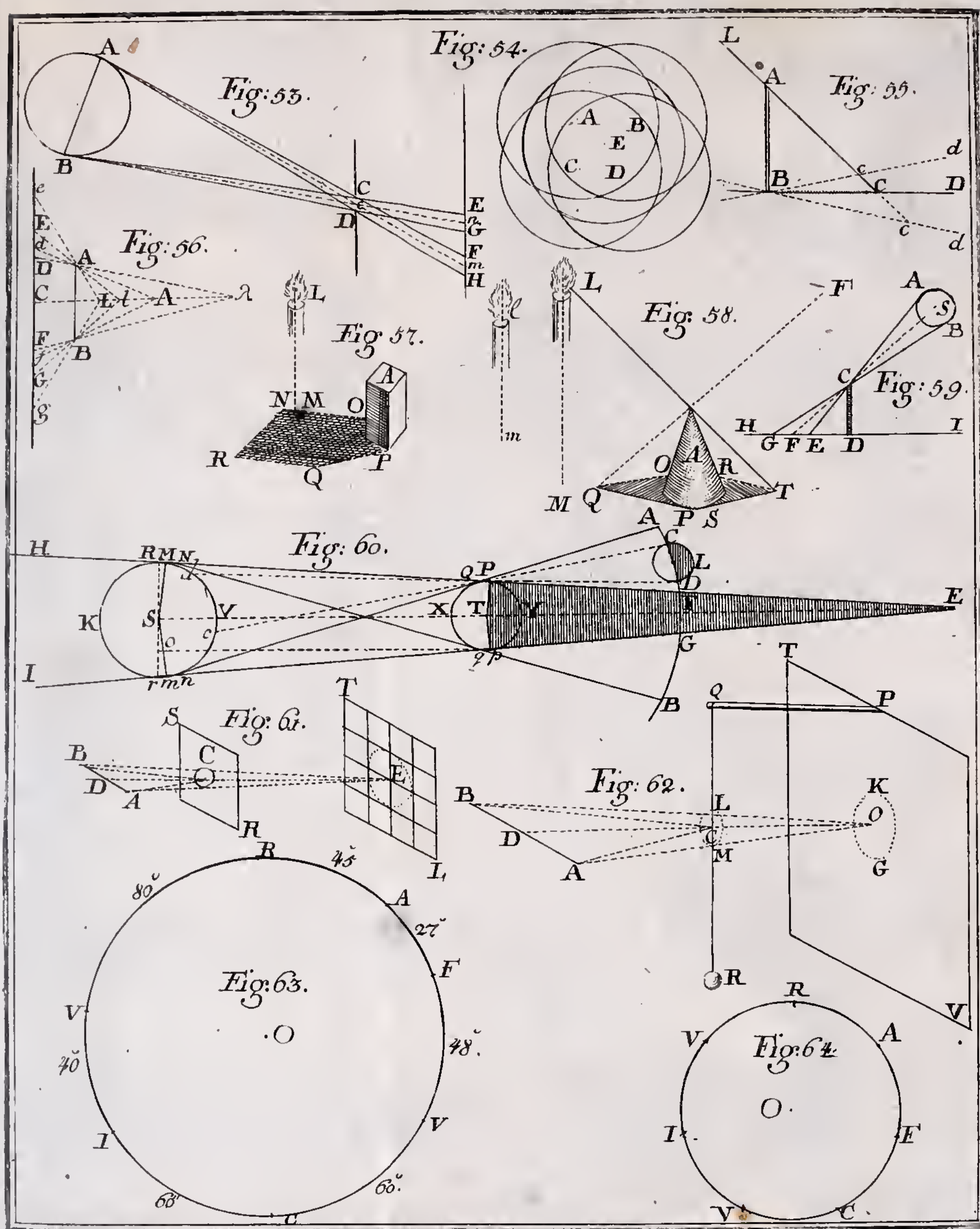

Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.

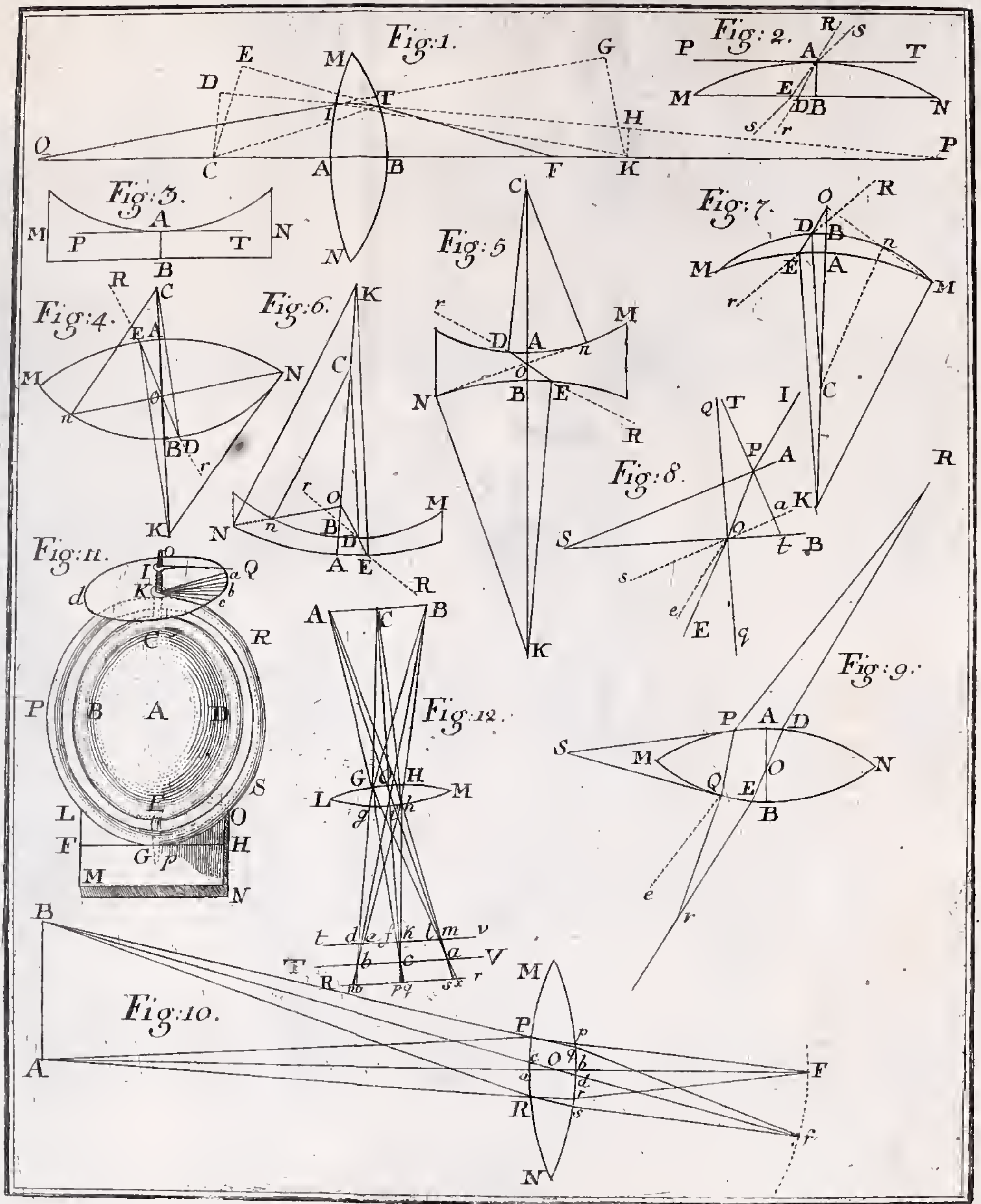

Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.


Fig: 29.
Fig: 30.
Fig: 31.
Fig: 32.
Fig: 33.
Fig: 34.
Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 37.
Fig: 38.

Aßner sc.


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.


Fig: 53.
Fig: 54.
Fig: 55.
Fig: 56.
Fig: 57.
Fig: 58.
Fig: 59.
Fig: 60.
Fig: 61.
Fig: 62.
Fig: 63.
Fig: 64.


Fig:1.
Fig:2.
Fig:3.
Fig:4.
Fig:5
Fig:6.
Fig:7.
Fig:8.
Fig:9.
Fig:10.
Fig:11.
Fig:12.

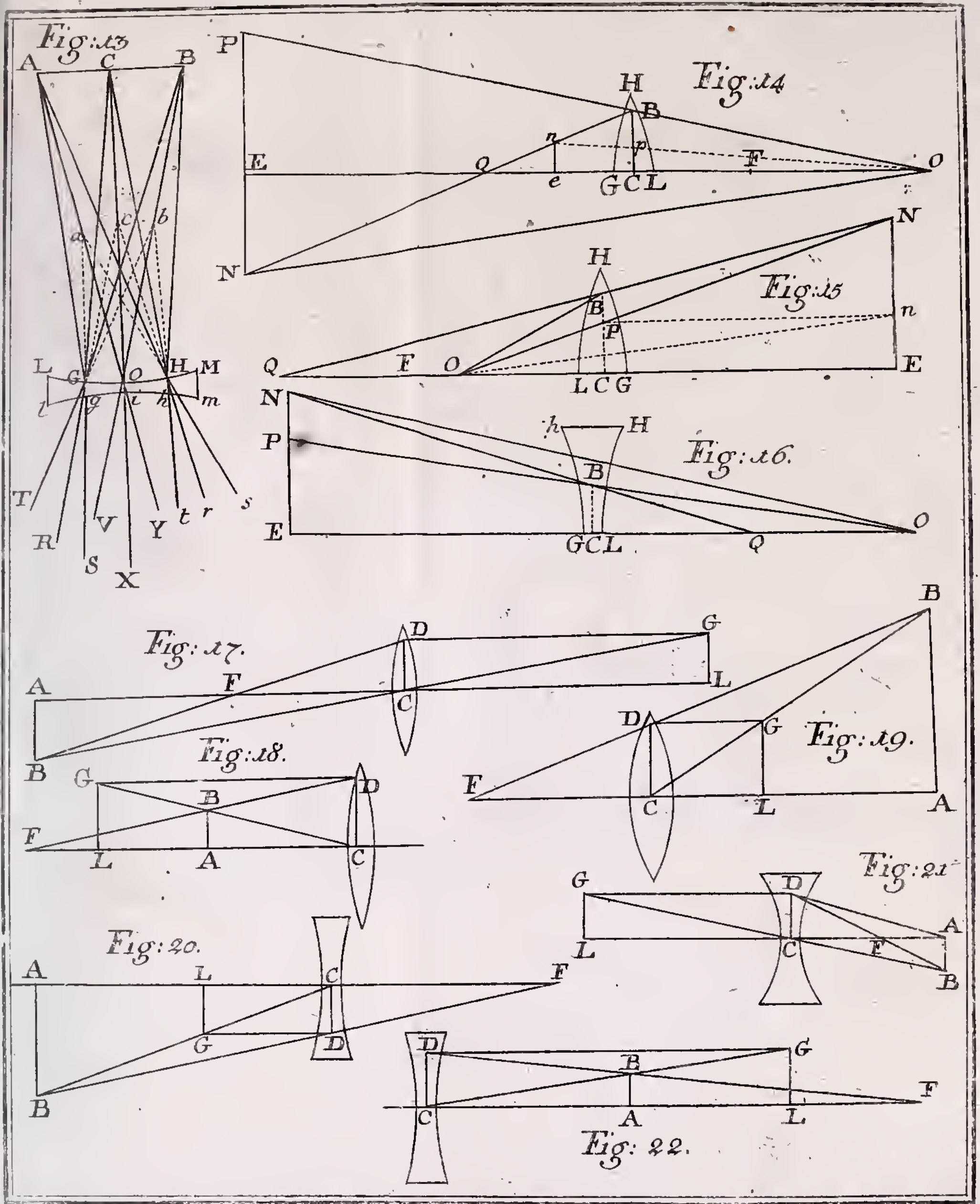
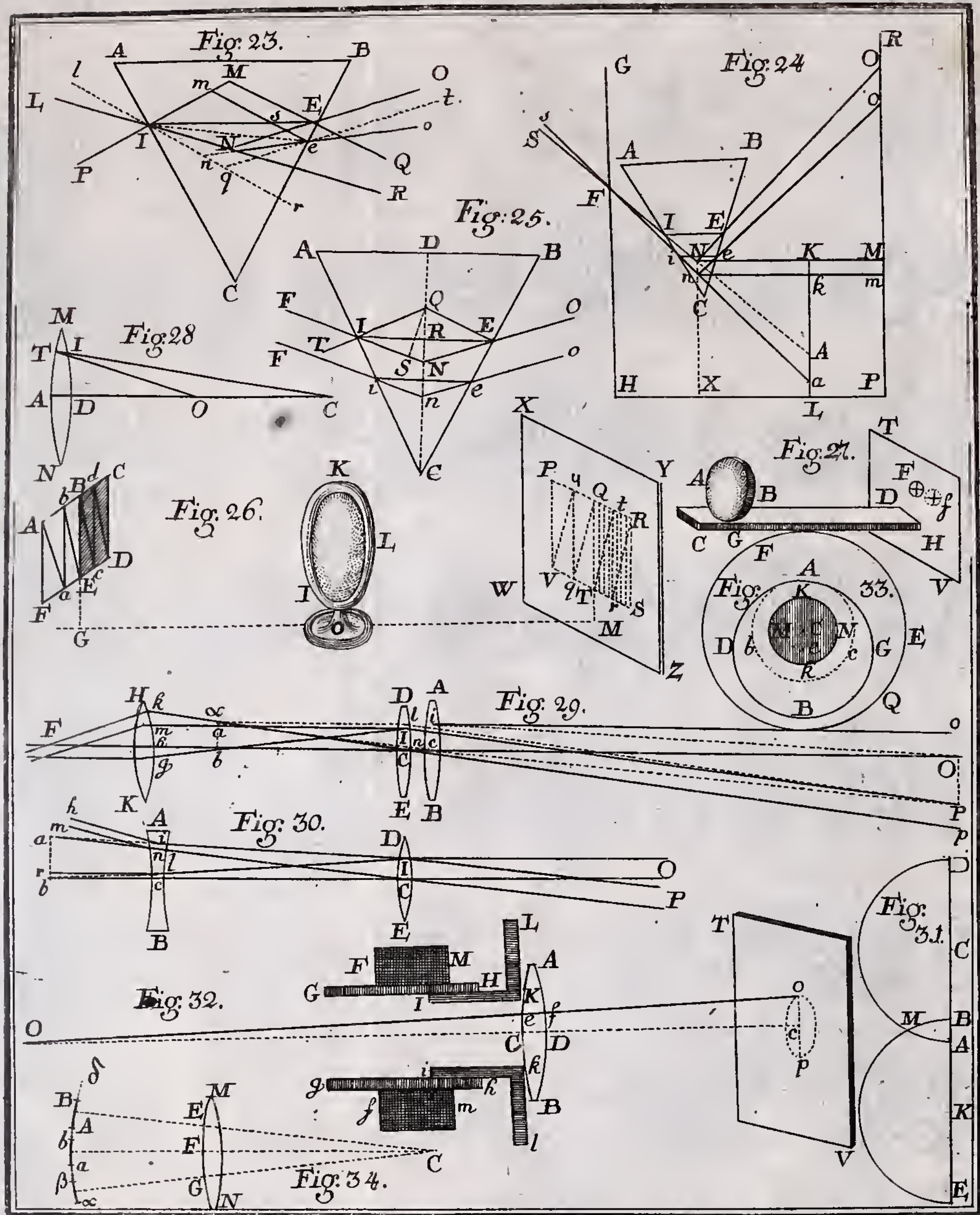
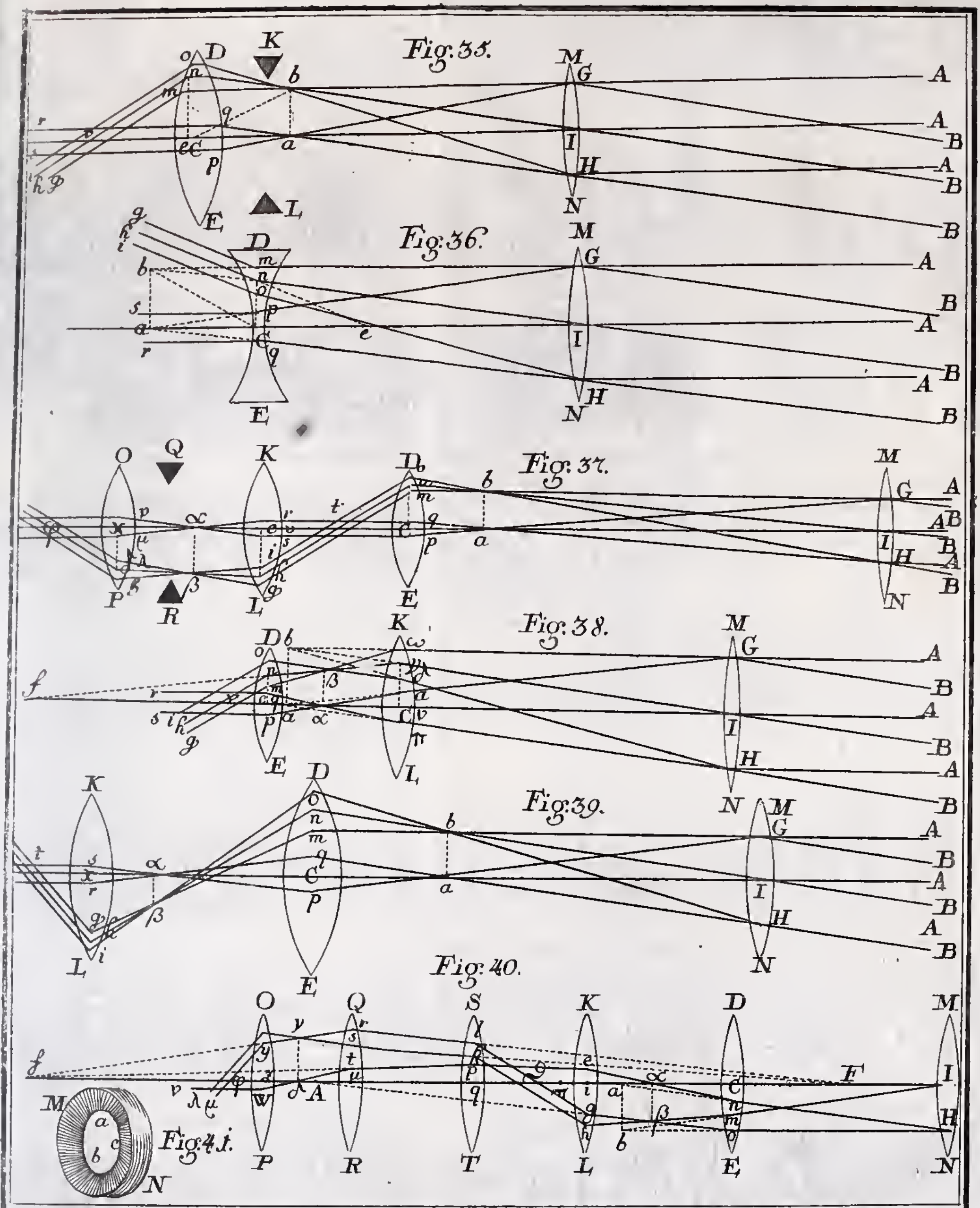
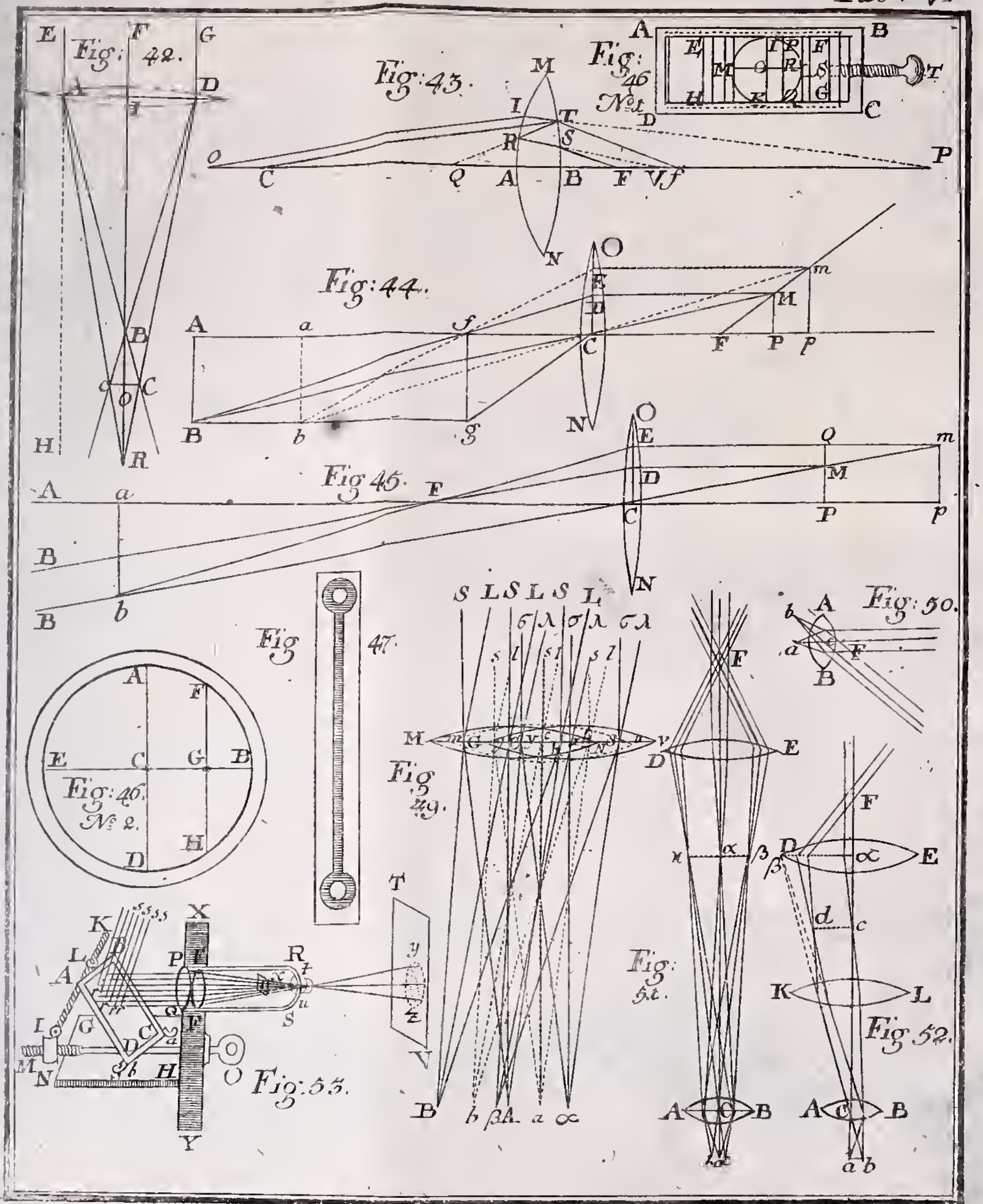


Fig: 13.
Fig: 14.
Fig: 15.
Fig: 16.
Fig: 17.
Fig: 18.
Fig: 19.
Fig: 20.
Fig: 21.
Fig: 22.


Fig. 23.
Fig. 24
Fig. 25.
Fig. 28
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 33.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 34.



Scherffers Dioptric.



Scherffers Dioptric.

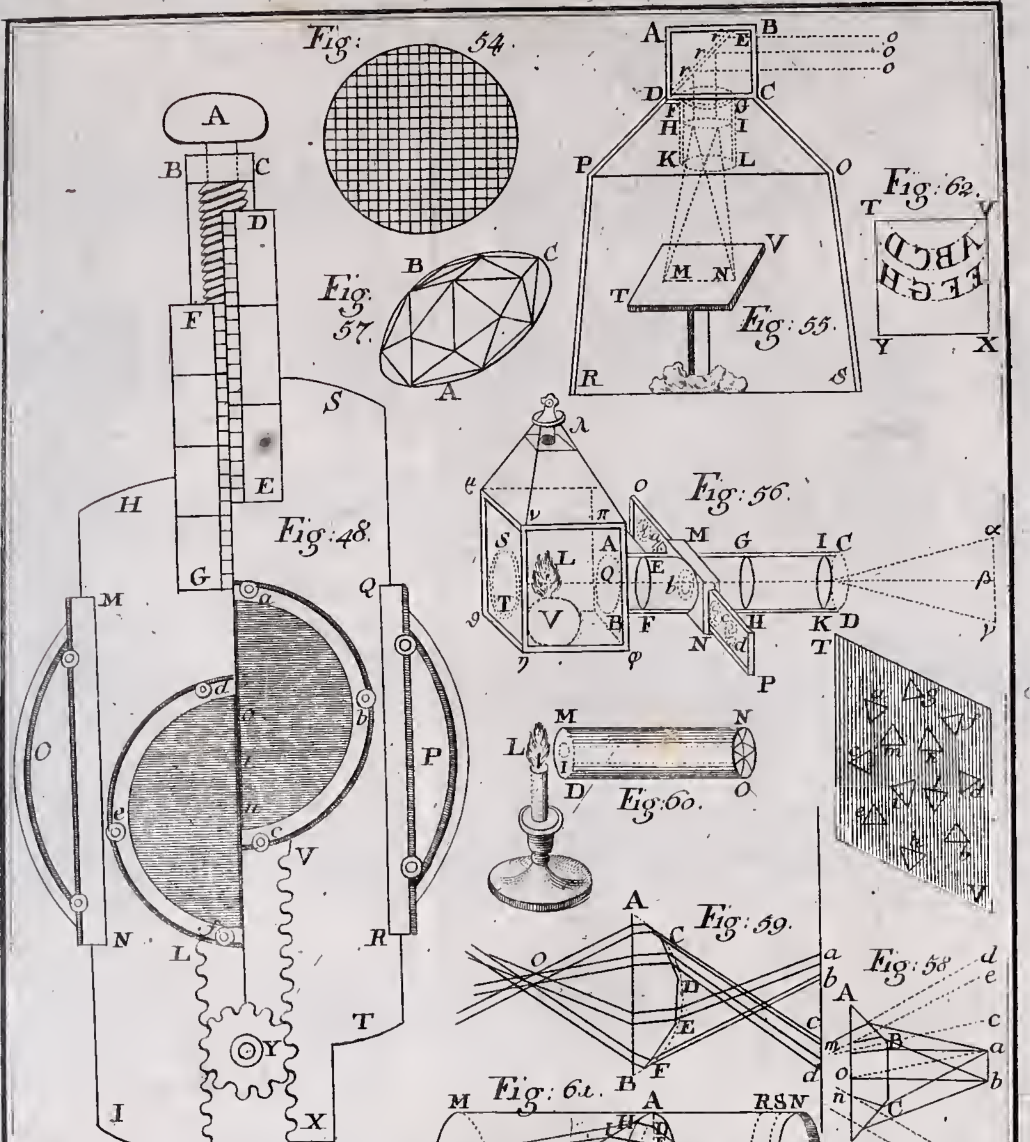
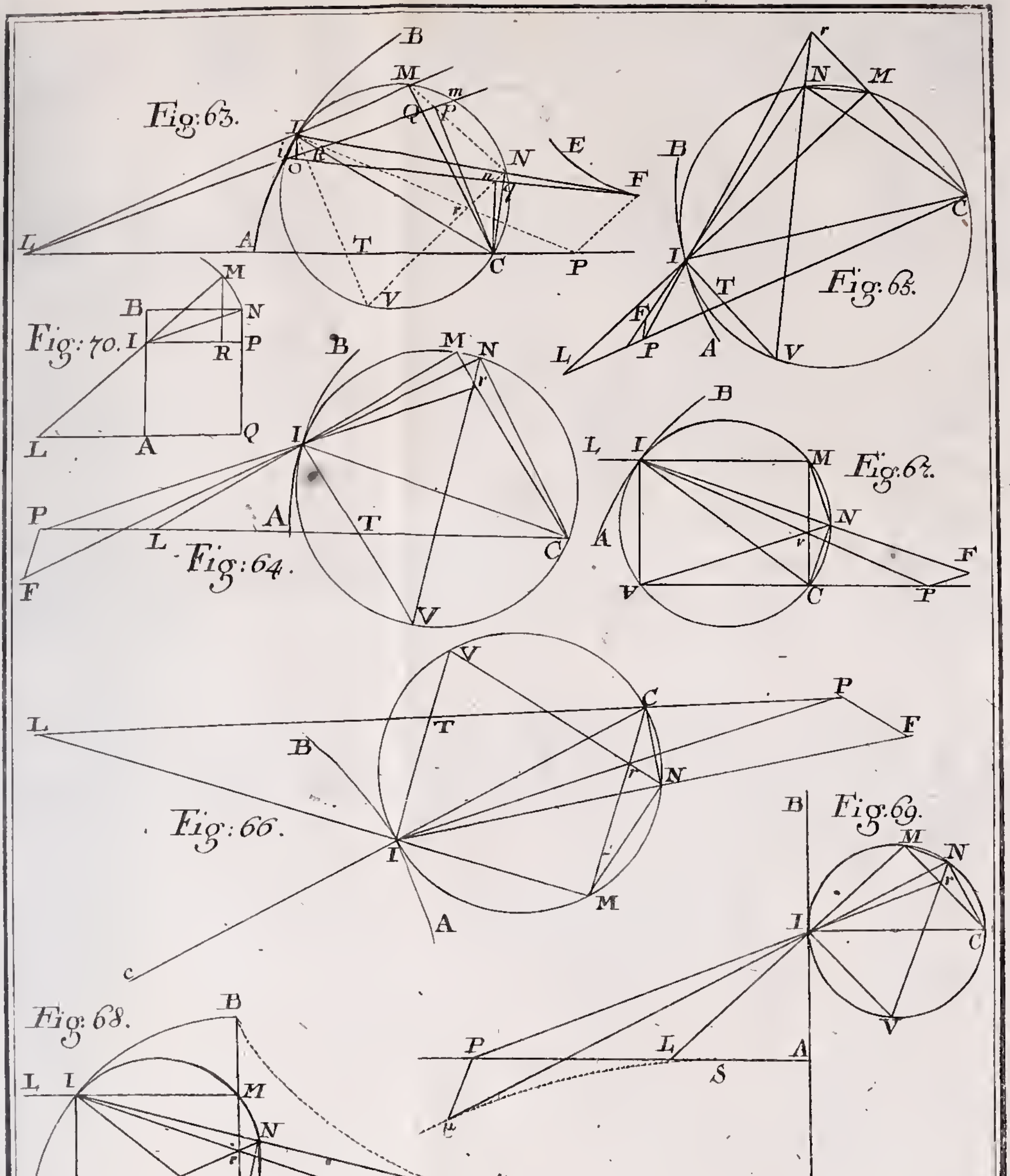
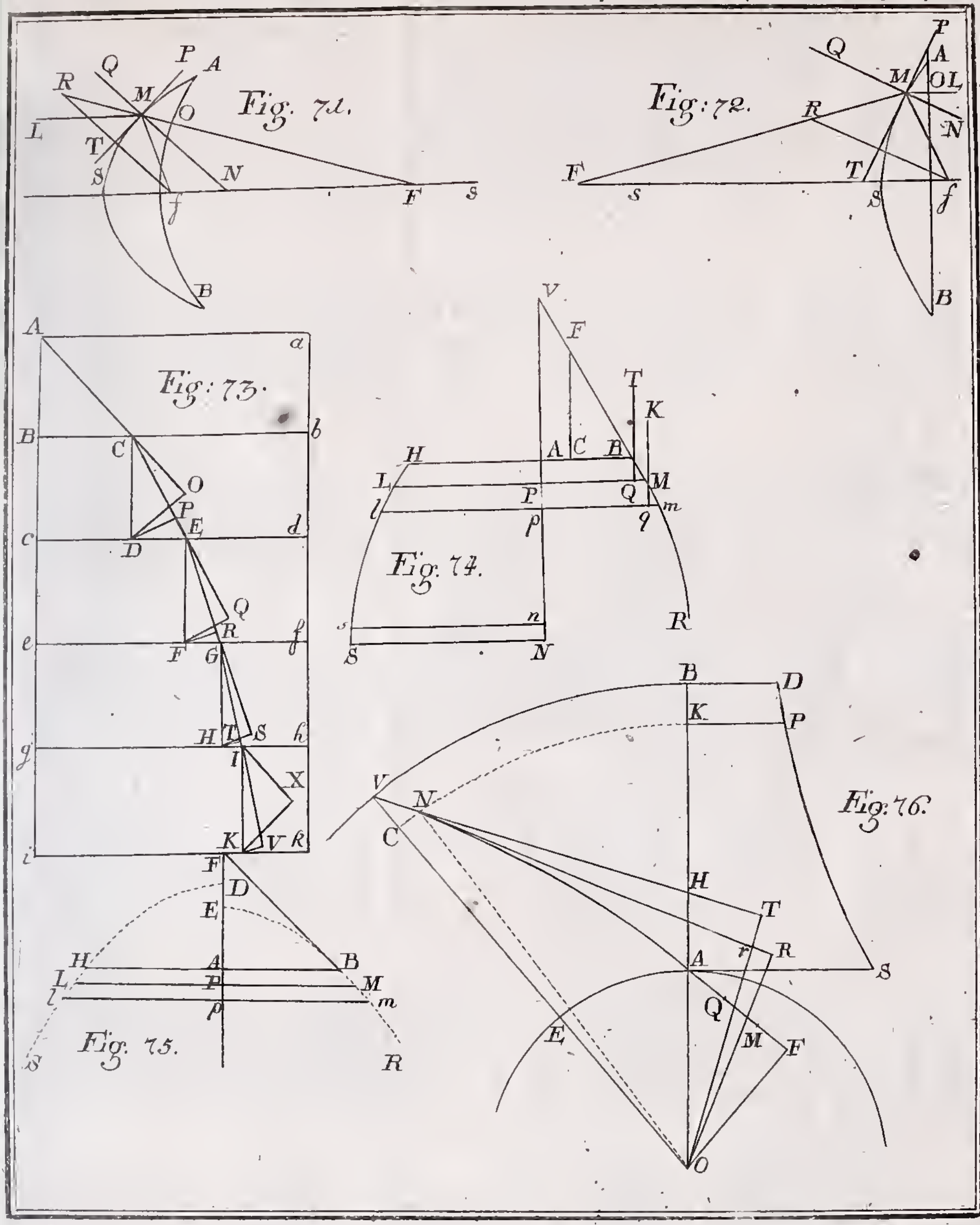
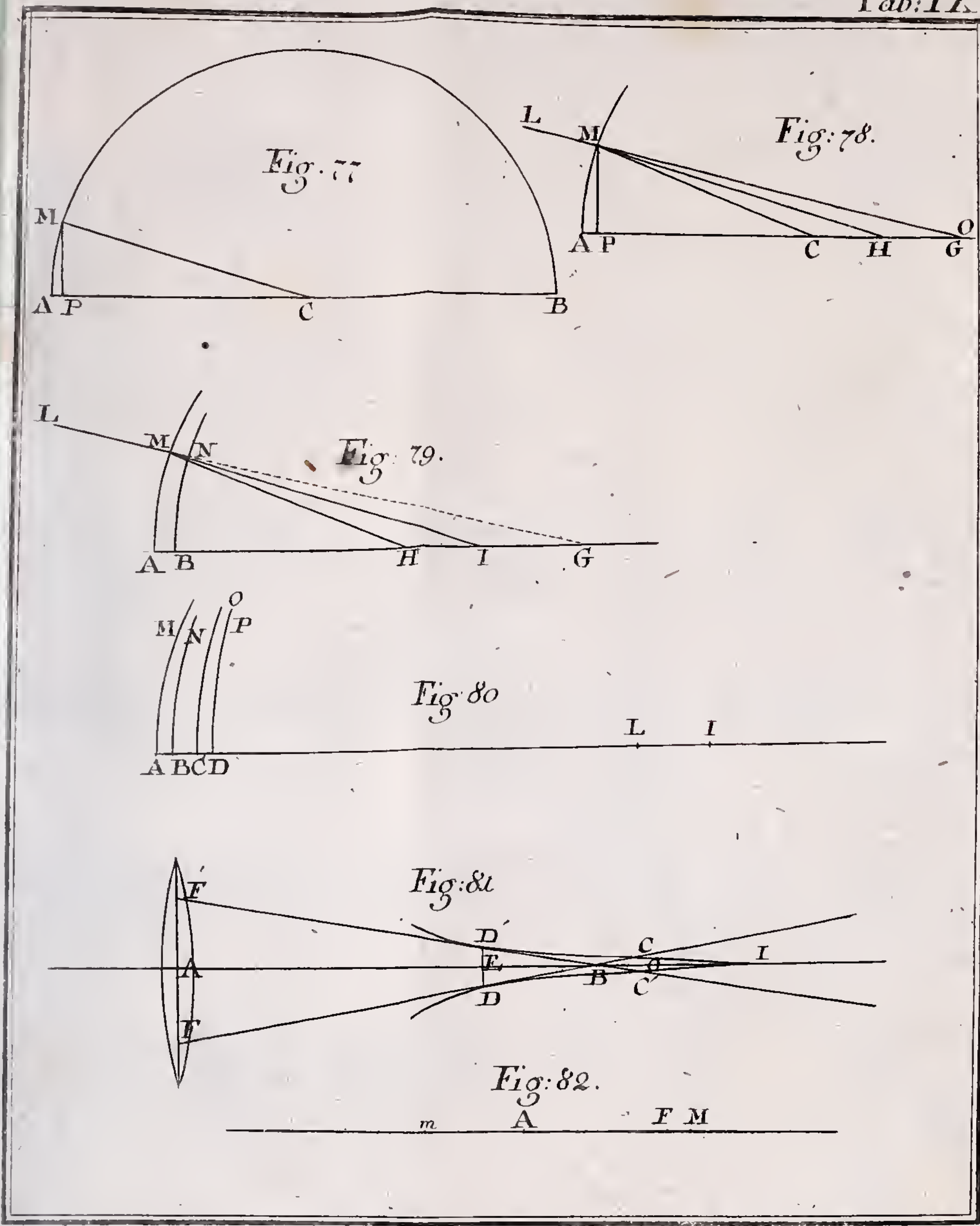


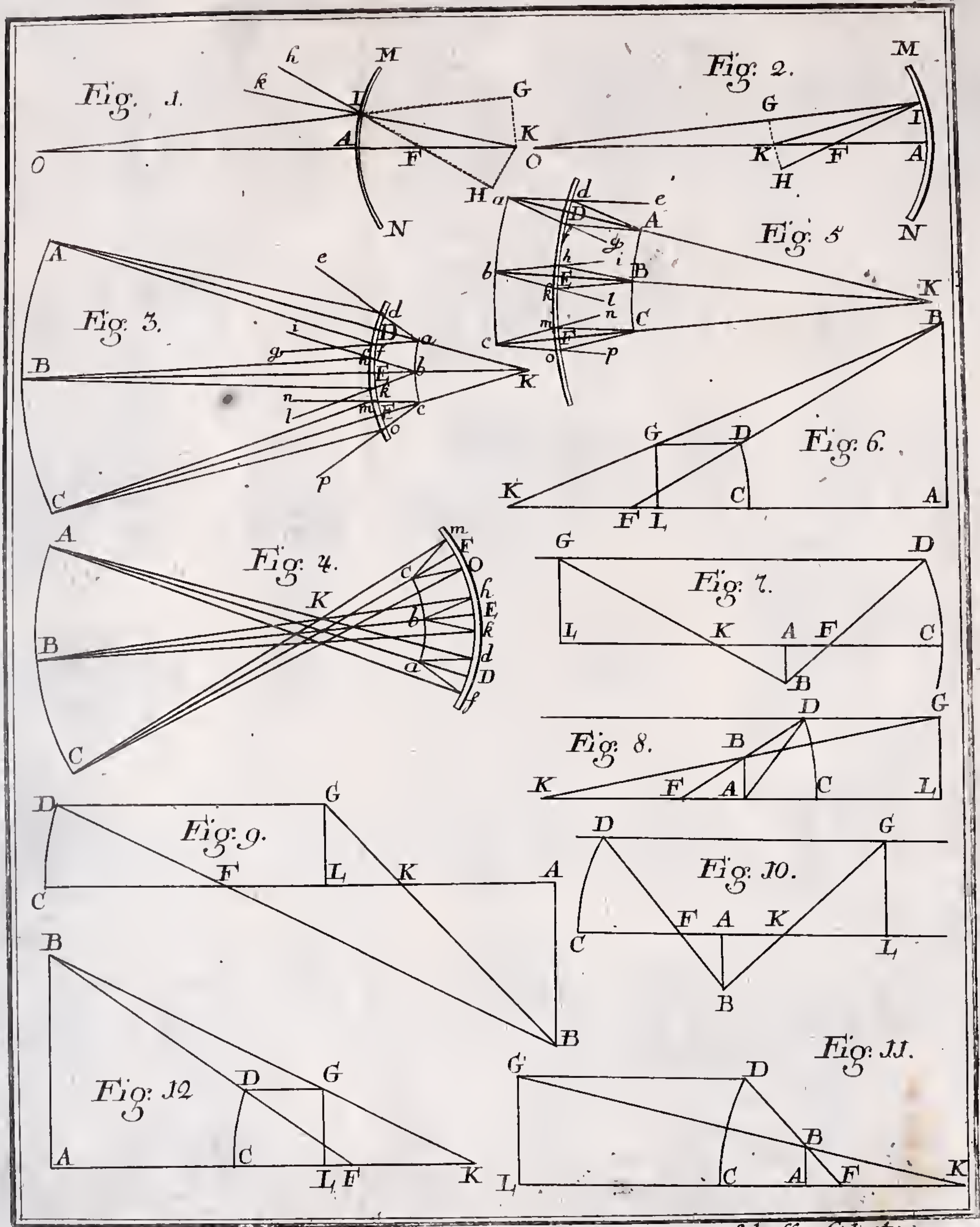
Fig: 54.
Fig: 55.
Fig: 56.
Fig. 57.
Fig: 58
Fig: 59.
Fig: 60.
Fig: 61.
Fig: 62.
Fig: 48.

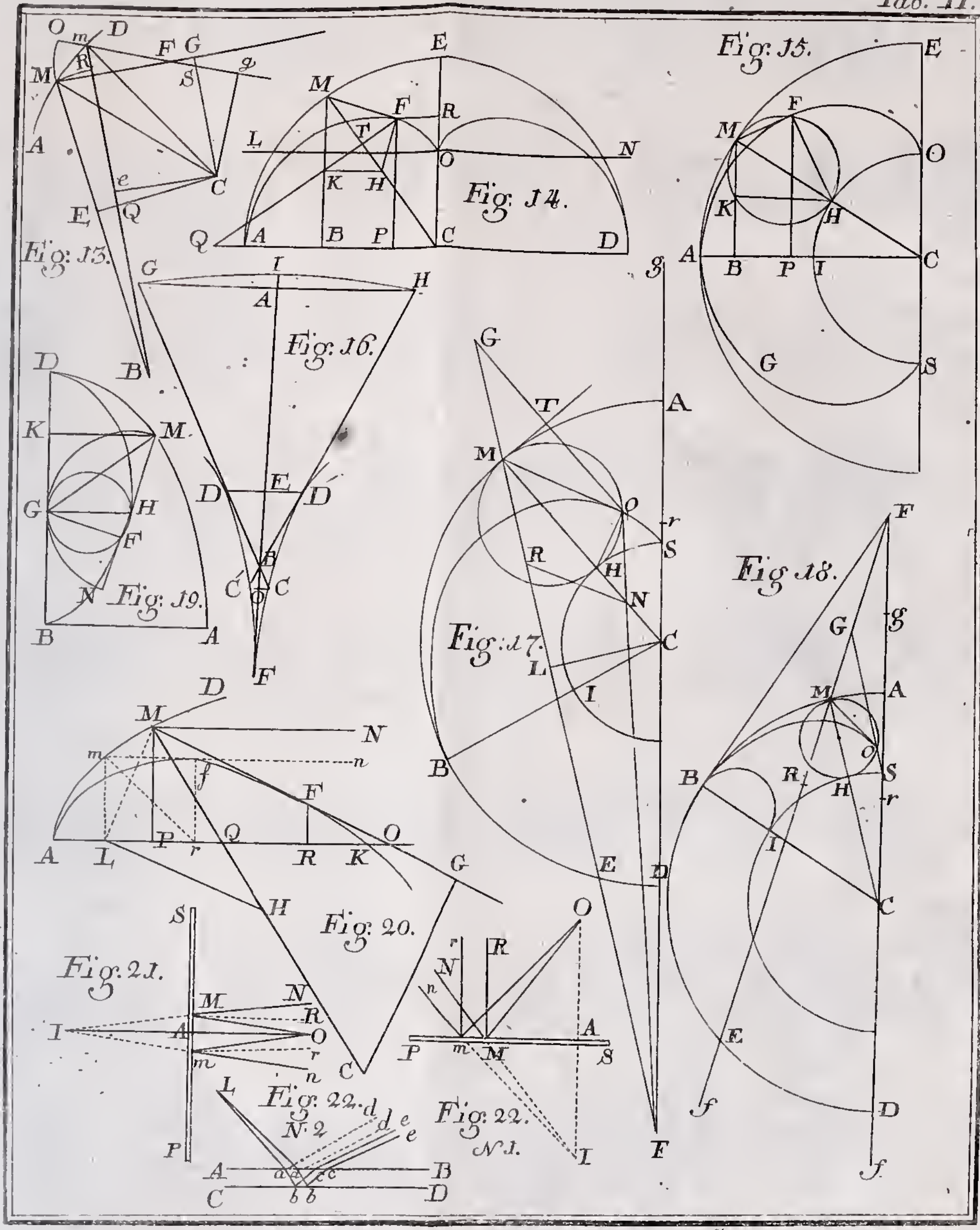

Fig:63.
Fig:65.
Fig:70.
Fig:64.
Fig:67.
Fig:66.
Fig:69.
Fig:68.

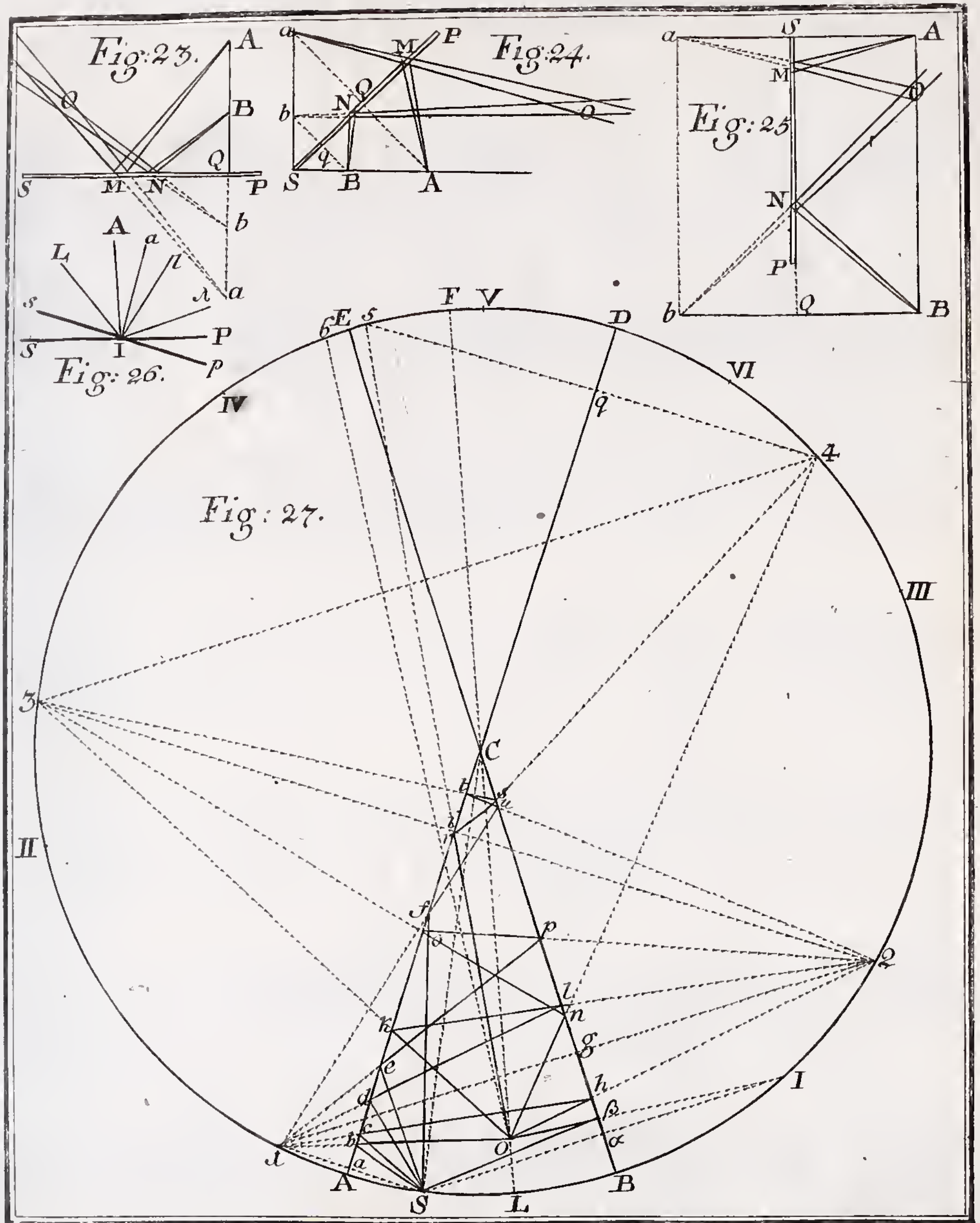

Fig. 71.
Fig: 72.
Fig: 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig: 76.

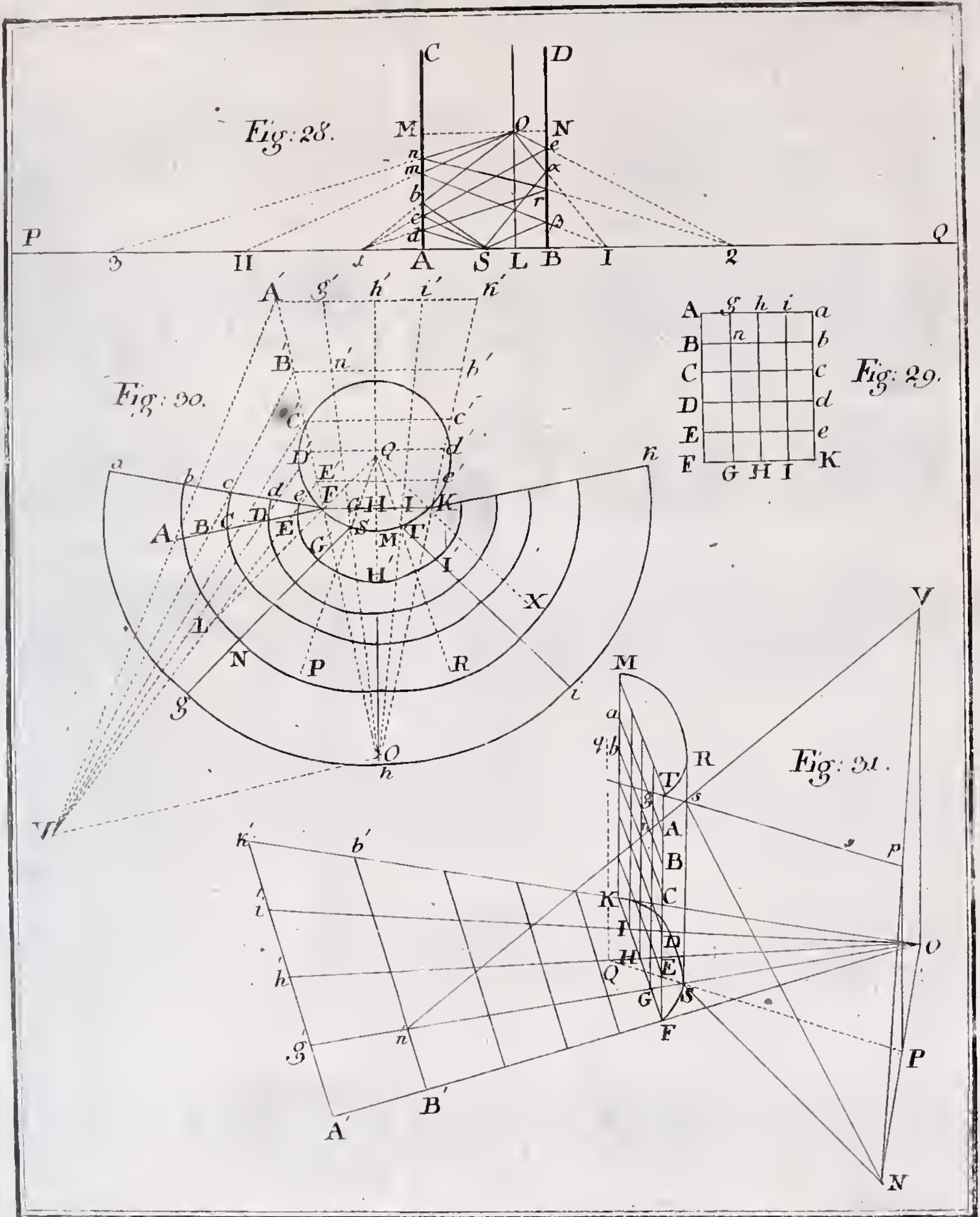


Scherffers Dioptric.

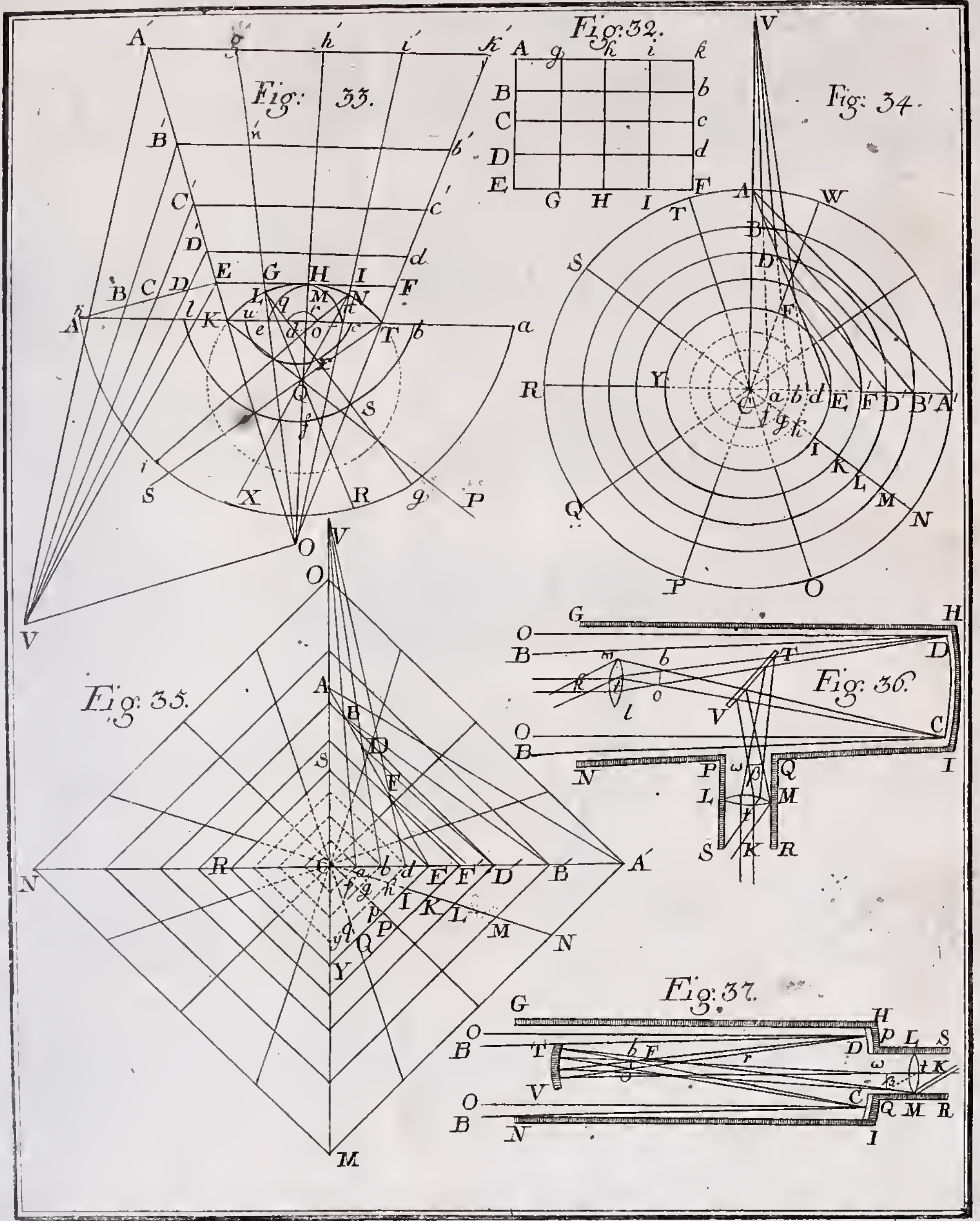

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12

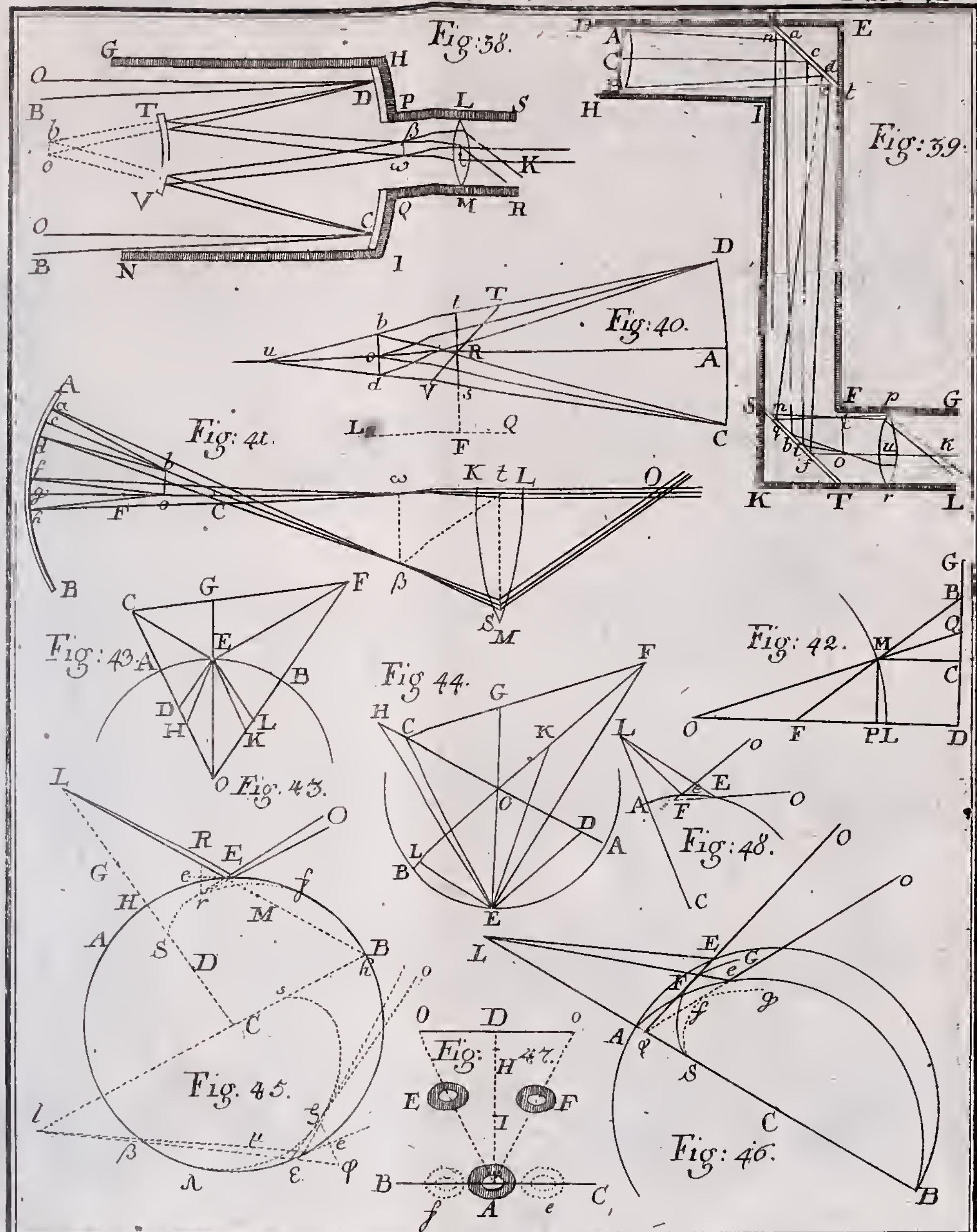

Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22. N. 2
Fig. 22. N. 1.

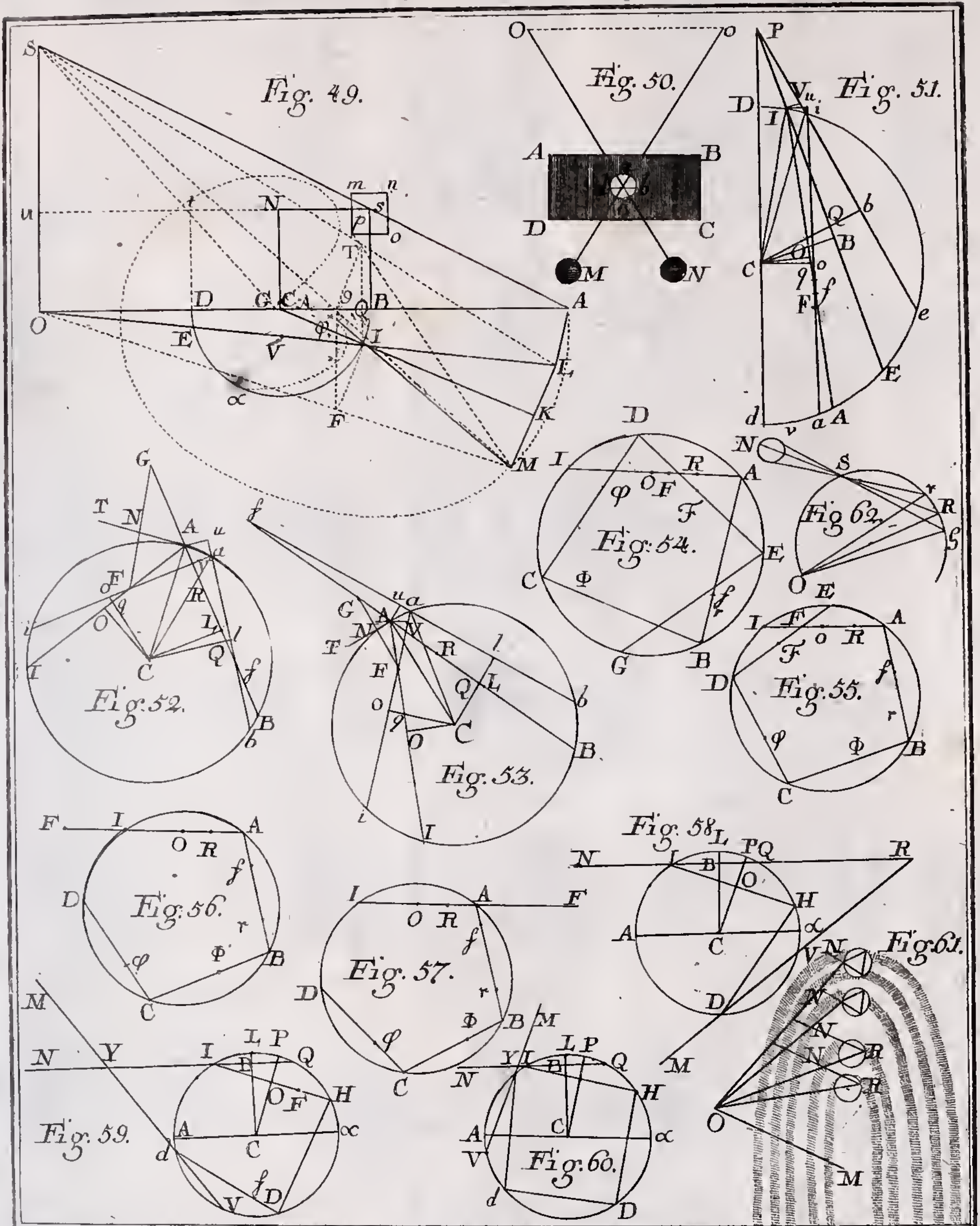

Fig: 23.
Fig: 24.
Fig: 25
Fig: 26.
Fig: 27.



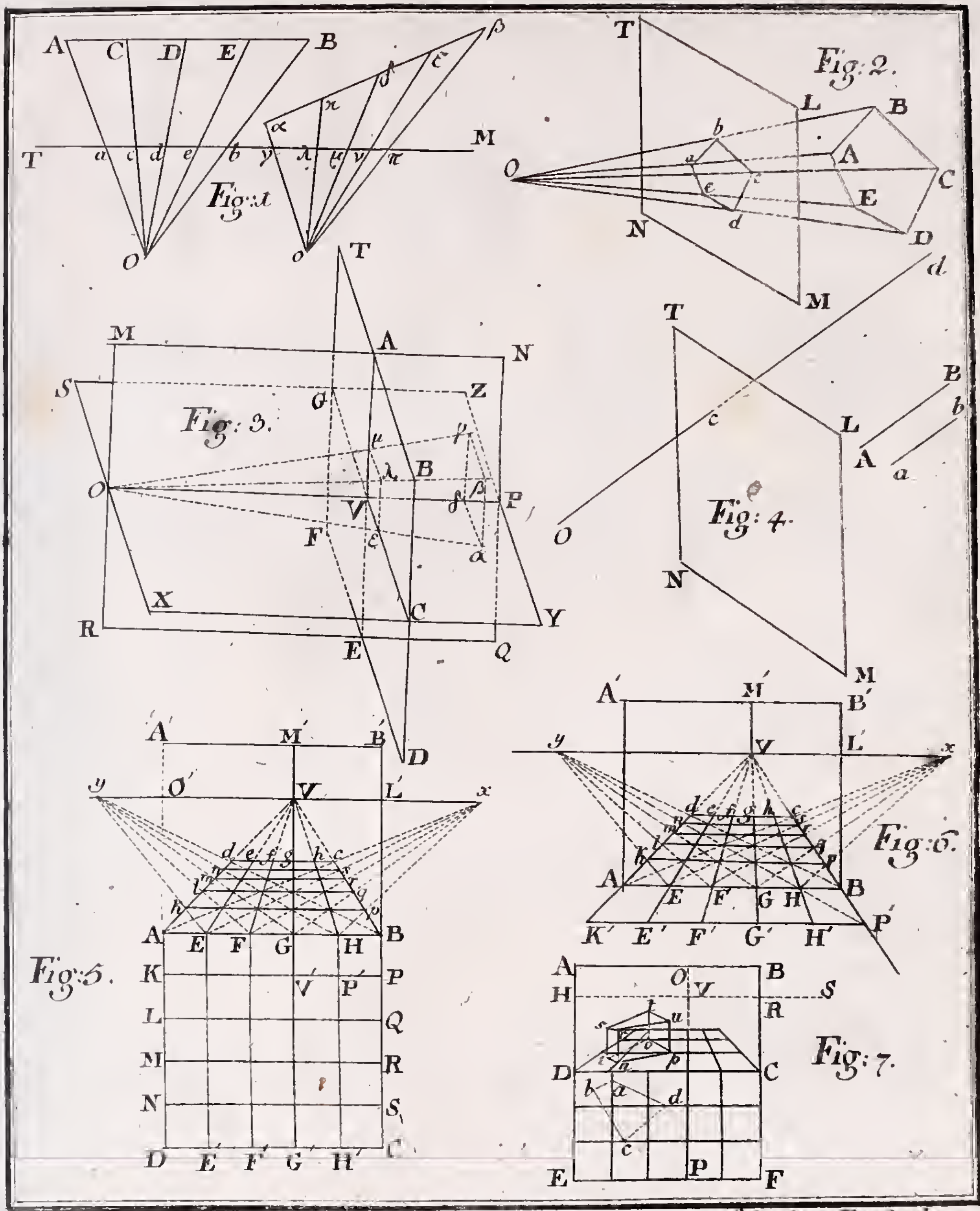
Scheiffers Calopt.


Fig: 32.
Fig: 33.
Fig: 34.
Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 37.

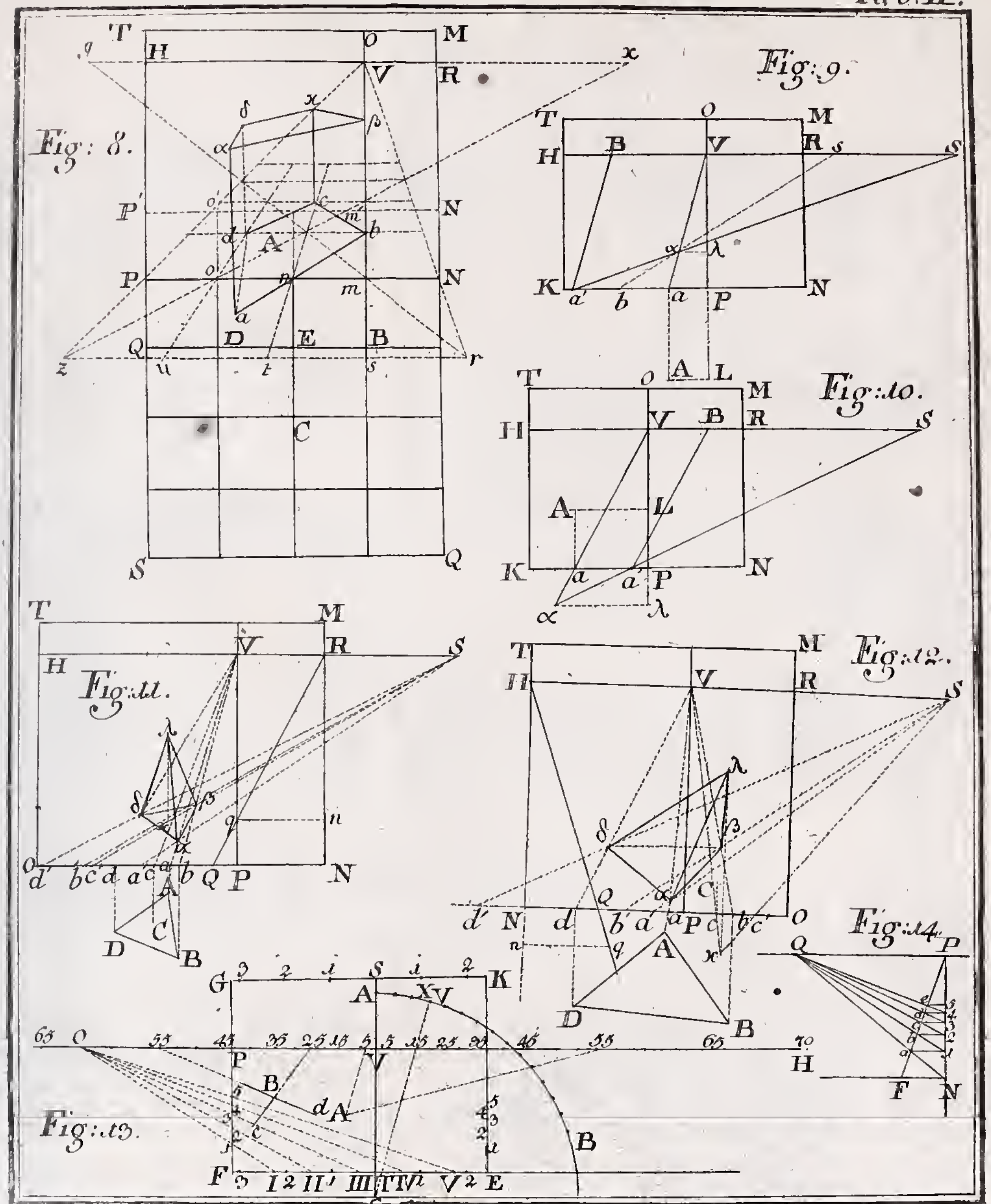

Fig: 38.
Fig: 39.
Fig: 40.
Fig: 41.
Fig: 42.
Fig: 43.
Fig. 43.
Fig 44.
Fig. 45.
Fig: 46.
Fig: 47.
Fig: 48.

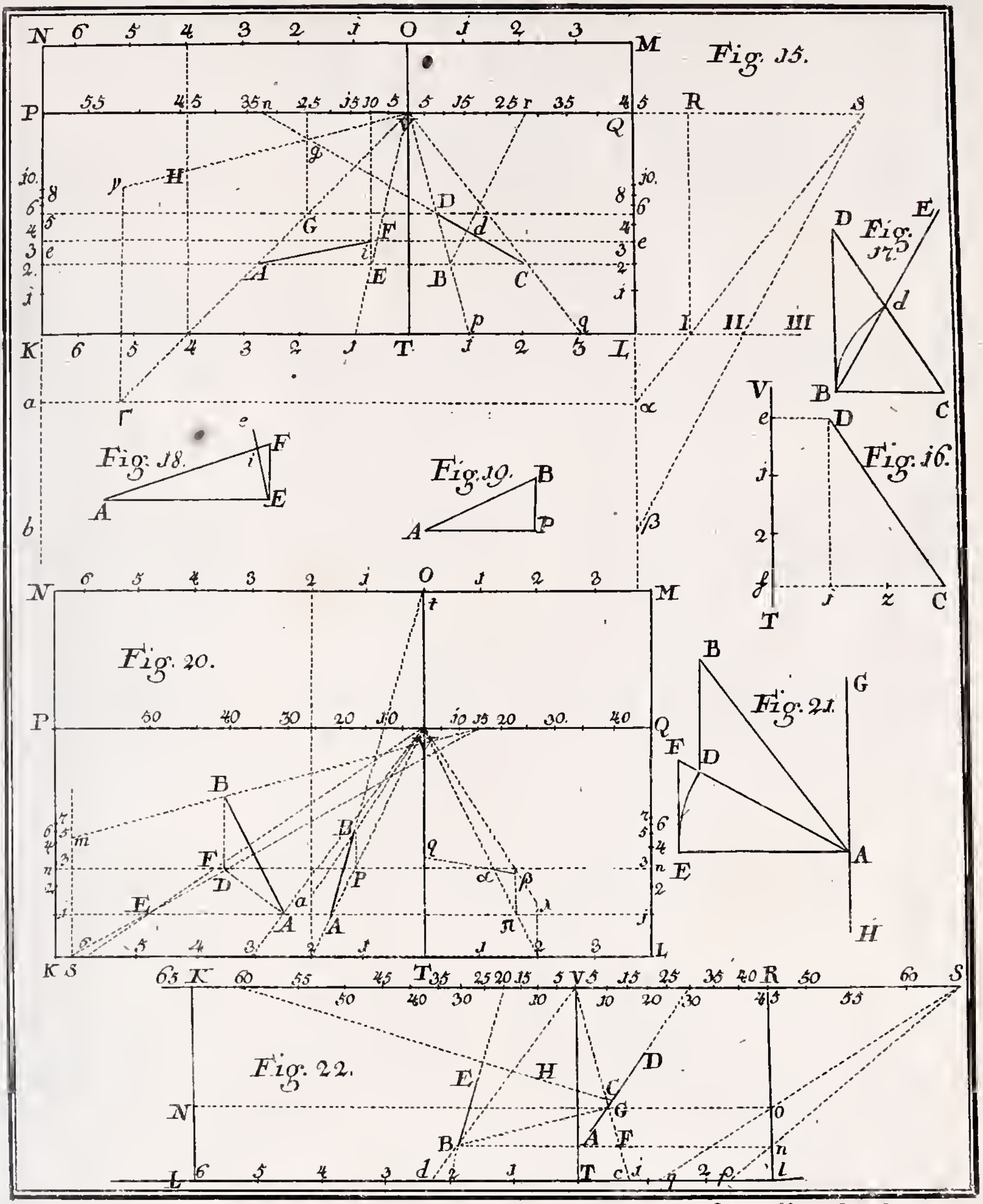

Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.

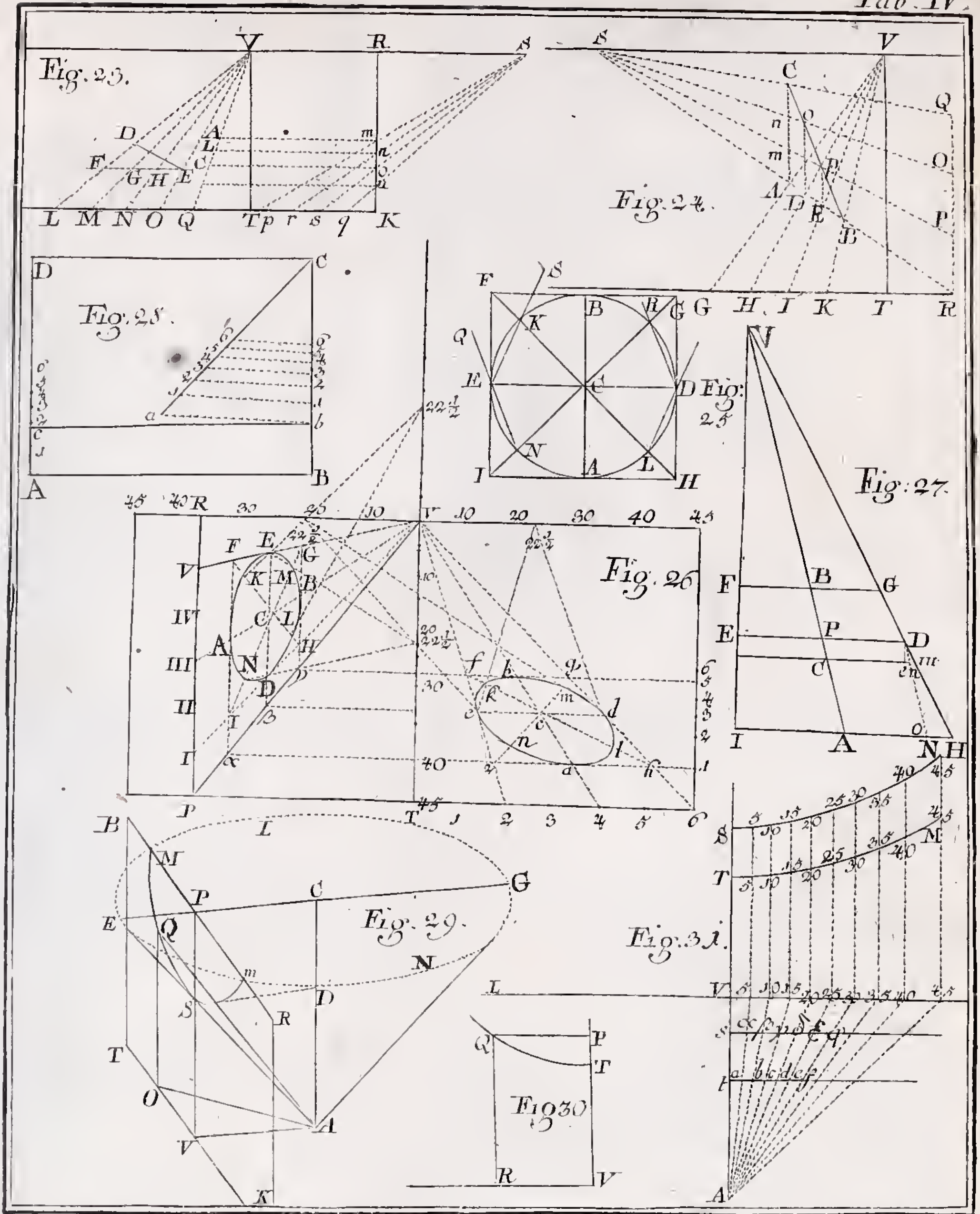
Tab: I.



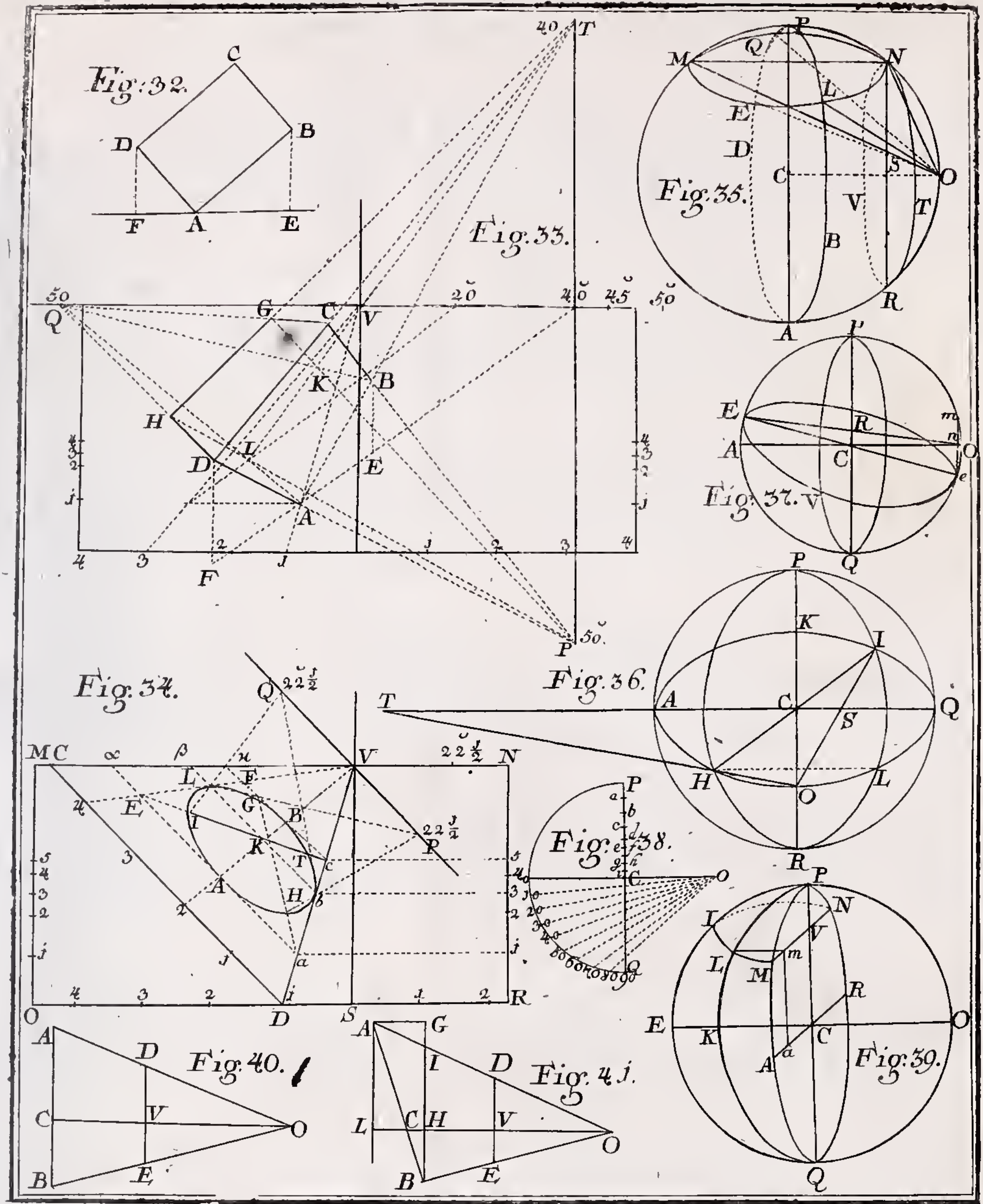
Scherffers Perspect:


Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.
Fig: 14.

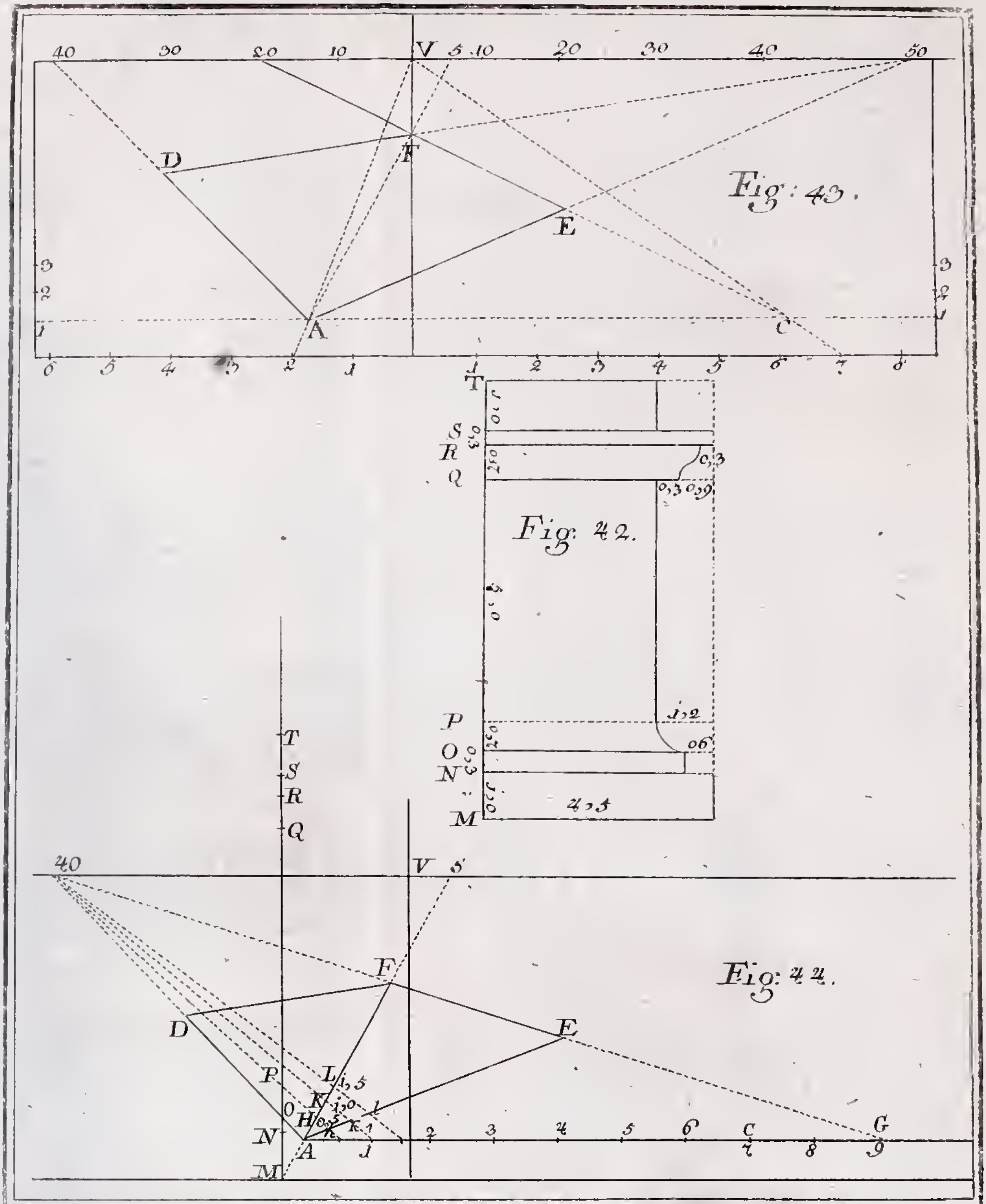

Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.


Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.

Tab: V.



Scherffers Perspect.



Scherffers Perspect.

Fig. 45.

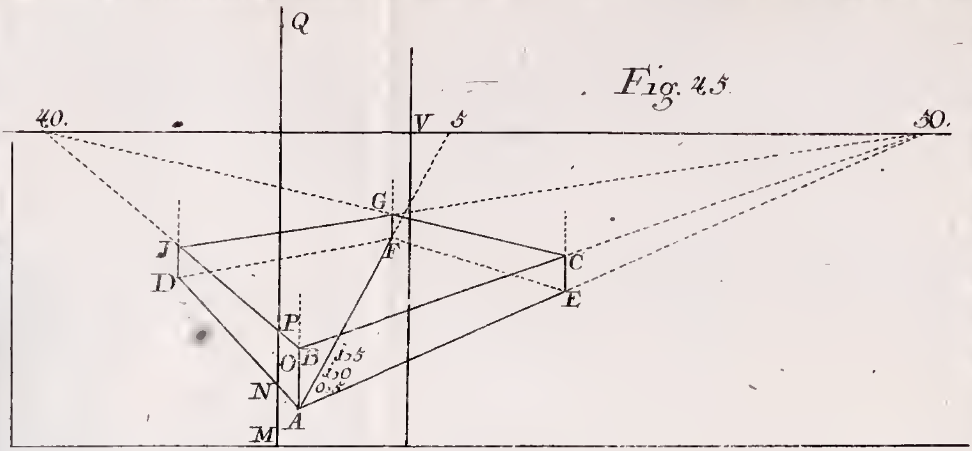
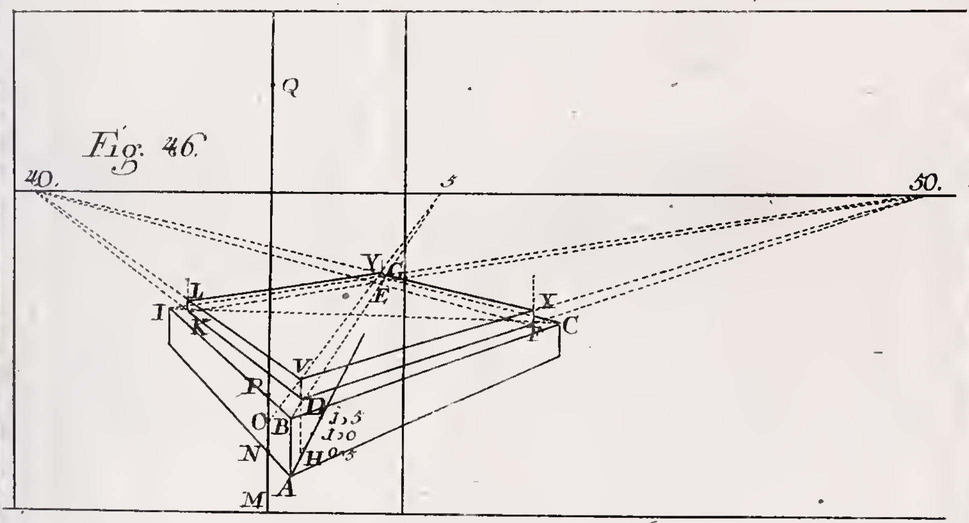

Q
40.
V
5
50.
G
J
F
C
D
E
P
O
B
1,5
1,0
0,5
N
A
M

Fig. 46.


Q
40.
5
50.
Y
G
L
E
X
I
K
F
C
V
P
D
1,5
O
B
1,0
N
H
0,5
A
M

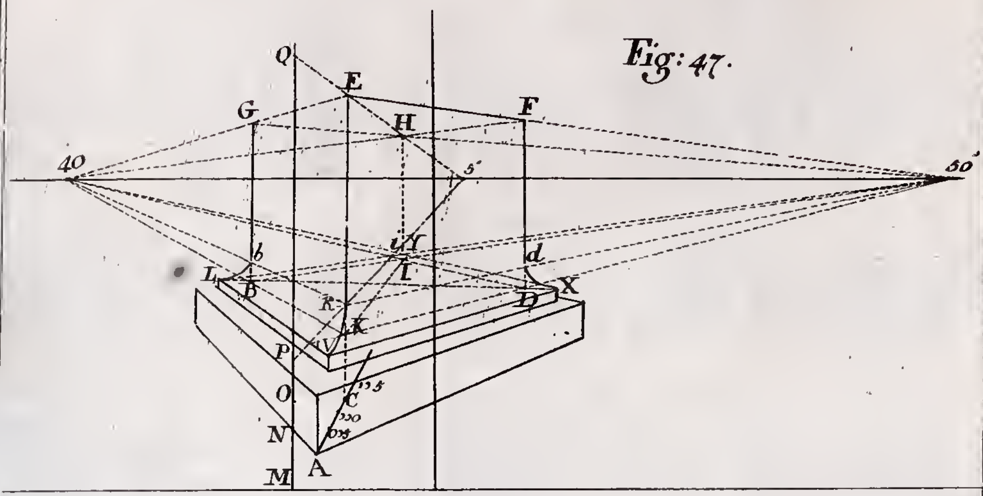


Fig: 47.

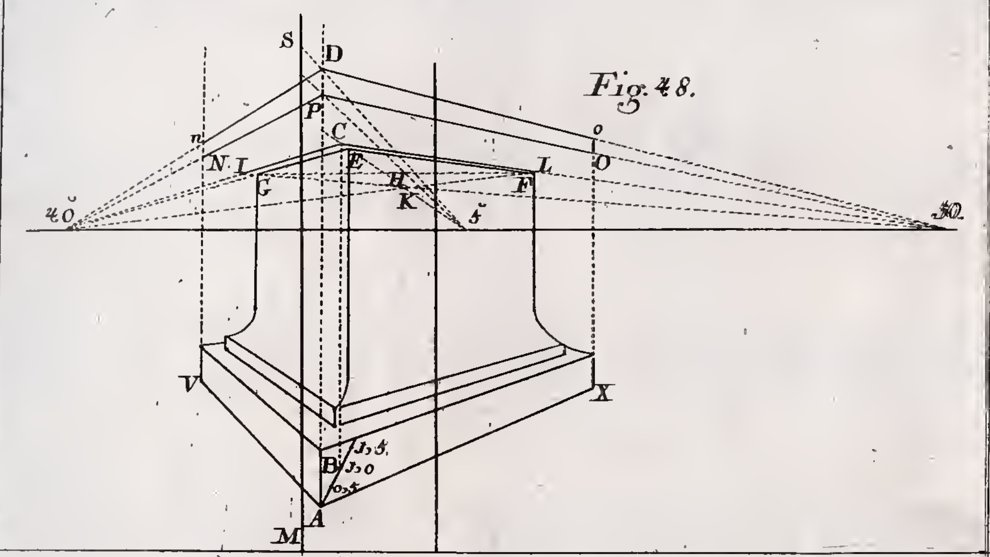
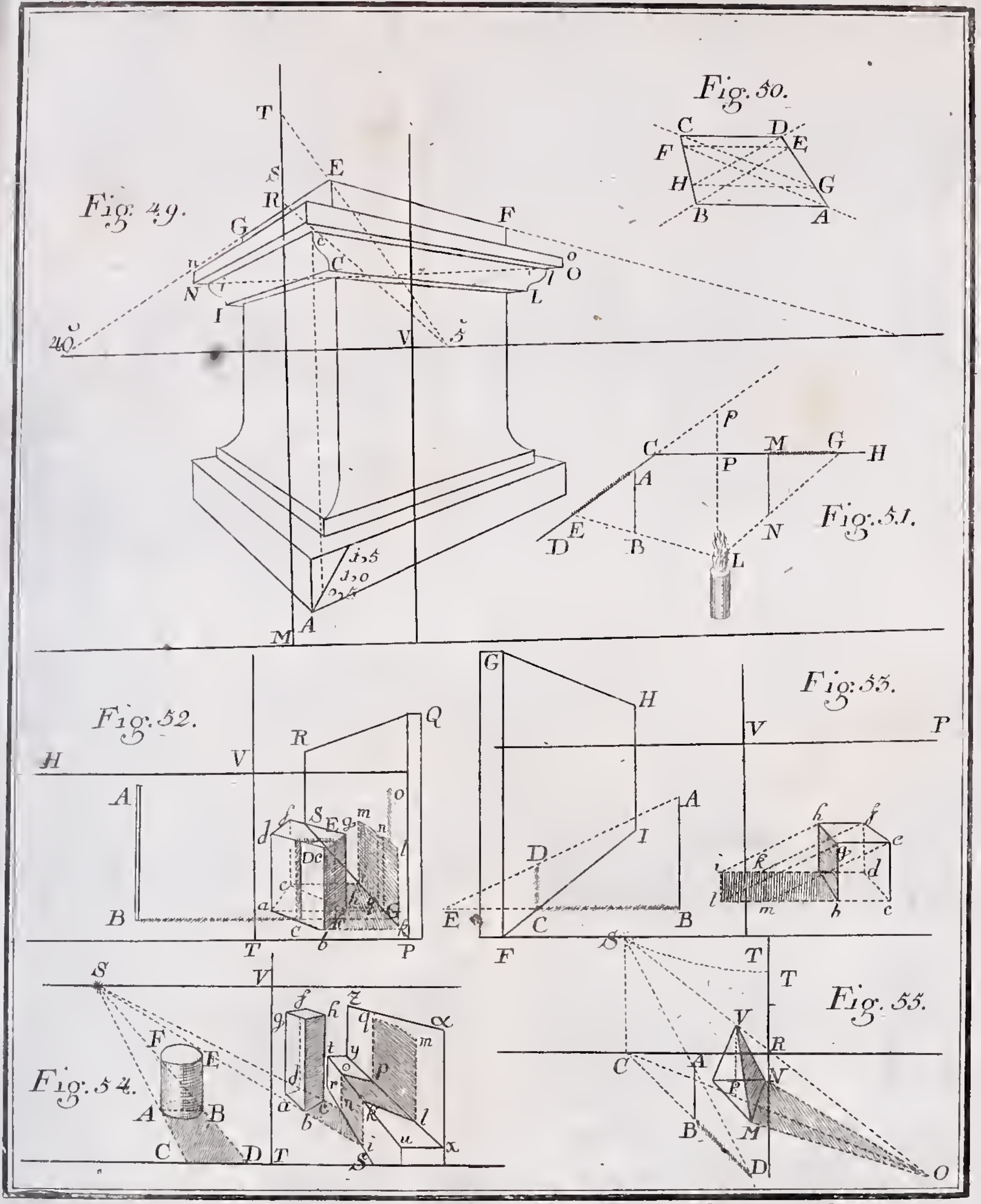


Fig. 48.

Tab. IX.



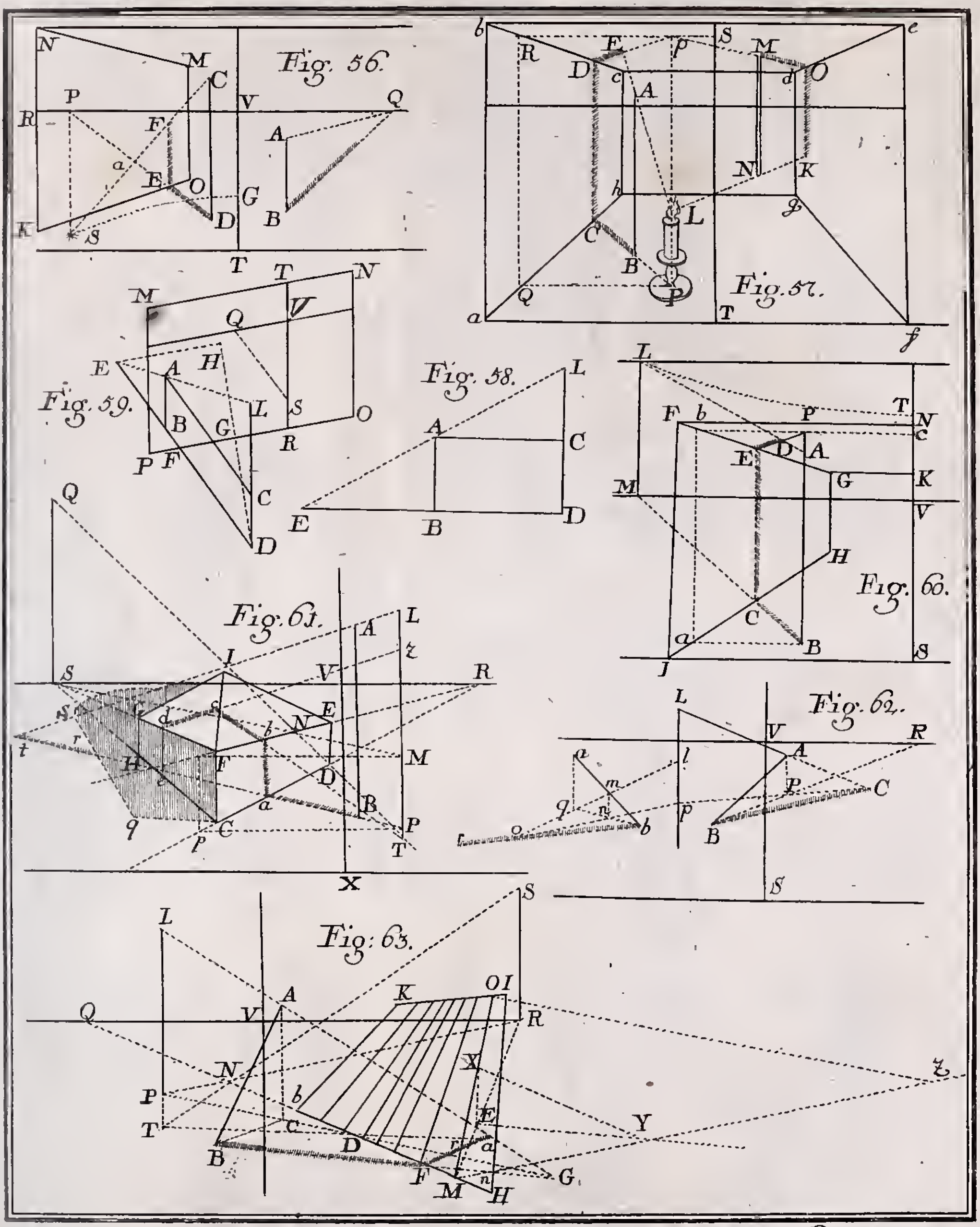
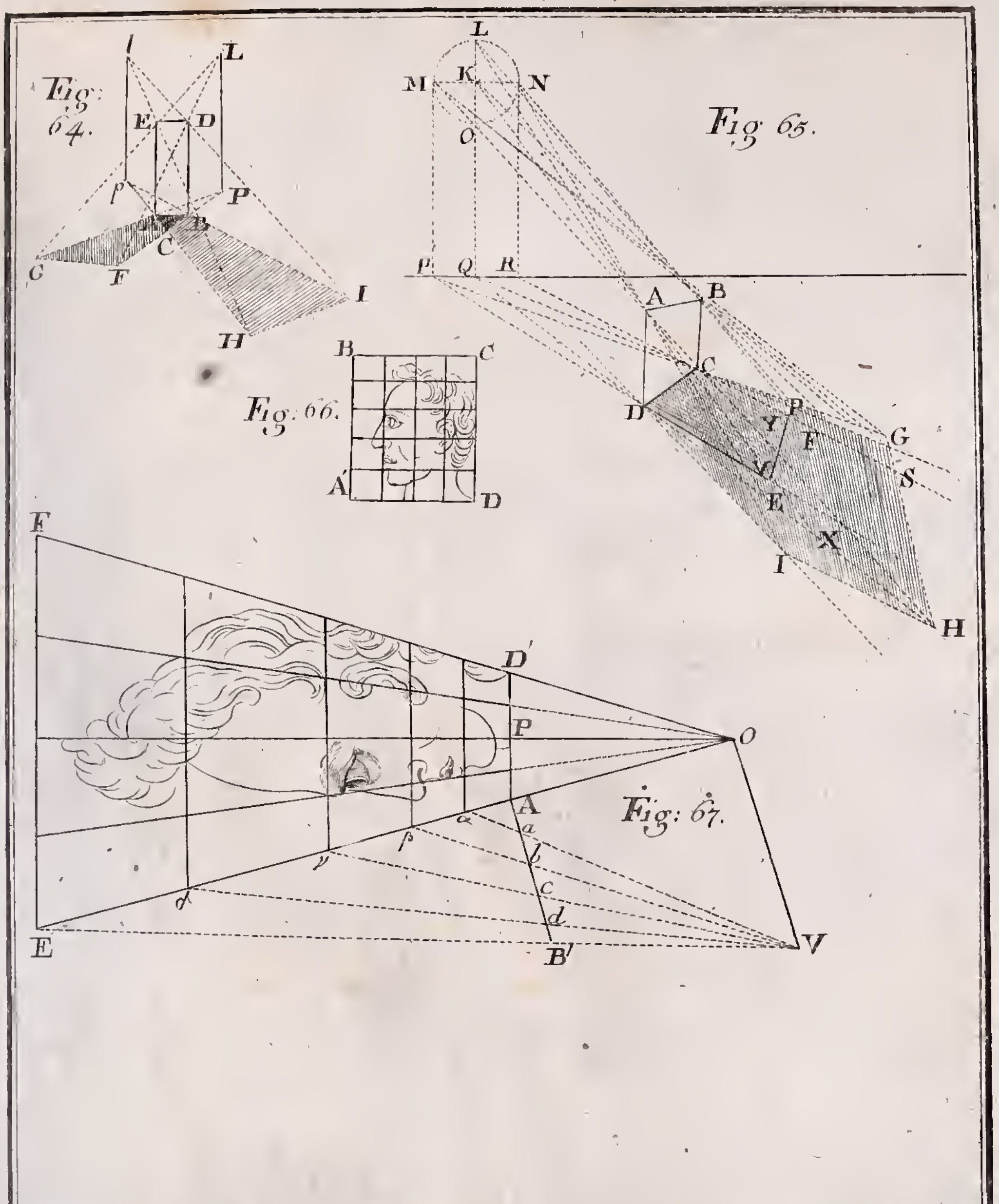


Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig: 63.


Fig: 64.
Fig 65.
Fig: 66.
Fig: 67.